ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

OPZIONI ESOTICHE

Tesi di Laurea in Matematica
per le applicazioni economiche e finanziarie

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
FRANCESCO
ROTONDO

Sessione III
Anno Accademico 2003-2004

A miei genitori,
e alla mia terra . . .

Indice

Introduzione

Con il termine opzioni esotiche si indicano quelle opzioni che presentano un payoff più complesso rispetto a quello delle opzioni standard: ciò può riguardare sia il processo di formazione del payoff nel tempo che la configurazione dello stesso a scadenza. Le ragioni principali che sono all'origine dello sviluppo delle opzioni esotiche possono essere sintetizzate nei seguenti fattori:

- esigenza di potenziare l'offerta, da parte degli intermediari finanziari, di strumenti in grado di garantire livelli di flessibilità maggiori nelle strategie operative degli investitori rispetto ai margini offerti dalle opzioni standard;
- profilo di rendimento potenzialmente più attraente rispetto a quello offerto dalle opzioni plain vanilla;
- possibilità di negoziare certi tipi di opzioni esotiche a costi più contenuti rispetto a quelle standard;
- maggiore competizione tra gli intermediari finanziari nella proposta di prodotti innovativi.

L'ingegneria finanziaria ha certamente avuto e continuerà ad avere un ruolo fondamentale nella creazione e nella diffusione di nuove tipologie di opzioni esotiche, che possono divergere da quelle standard per vari aspetti. Numerose sono le tipologie di opzioni esotiche presenti nella realtà operativa, al punto che risulta persino difficile catalogarle in poche classi omogenee.

In questo lavoro si è comunque cercato di descrivere alcuni tra i più importanti tipi di opzioni esotiche che le maggiori banche d'investimento sono

pronte ad offrire su sottostanti quali azioni, indici azionari e valute.
Lo scopo di questo lavoro è di dare un'idea dell'ampia varietà di strumenti che sono stati creati quindi non pretende di essere un elenco esaustivo di tutti i prodotti esotici che esistono.

Il primo capitolo tratta le opzioni cosiddette $path-dependent$, cioè quelle che dipendono dall'andamento del sottostante; le opzioni *asiatiche* infatti dipendono dalla media dei prezzi, quelle *barriera* si attivano o si estinguono se il prezzo dell'*asset* raggiunge o meno un valore e quelle *lookback*, in cui per esempio il prezzo minimo o massimo rilevato può diventare lo strike price.

Nei successivi tre capitoli si esamineranno altre tipologie di opzioni esotiche: le *binarie*, in cui il payoff dipende dal verificarsi di determinate condizioni finanziarie; le $forward\ start$, la cui vita inizia a decorrere da un certo istante futuro di tempo (il quale ci fornirà anche il valore del titolo che verrà poi considerato come strike price) e le *composte* in cui l'attività sottostante non è un titolo, ma un'altra opzione (di solito *europea*) con un proprio strike price e una propria vita residua.

Nell'ultimo capitolo dedicato all'illustrazione delle opzioni esotiche si farà un cenno a quelle di minore spessore.

La parte conclusiva di questo lavoro invece sarà dedicata all'implementazione del $metodo\ MonteCarlo$ nella valutazione di alcune opzioni esotiche. Ciò sarà effettuato tramite Matlab, un linguaggio ad alto rendimento per la computazione tecnica, che ci permetterà inoltre di mettere a confronto tale metodo con la valutazione in forma chiusa descritta precedentemente.

Capitolo 1

Opzioni Path Dependent

1.1 Opzioni Asiatiche

Le opzioni asiatiche (asian o average options) sono opzioni il cui valore finale dipende dall'andamento del prezzo dell'asset finanziario sottostante durante il periodo di vita delle stesse; infatti il loro profitto dipende da un valore medio dei prezzi che si riferiscono a un predeterminato periodo di osservazione. Per questa ragione rientrano nella categoria delle opzioni path-dependent. Ci possono essere 2 tipi di opzioni asiatiche:

- le *average price option*, che prevedono che la media dei prezzi calcolata venga considerata come prezzo finale medio;
- le *average strike option*, che prevedono che tale media svolga il ruolo di prezzo d'esercizio.

Il calcolo del valore medio è influenzato da alcuni fattori come il periodo di tempo utilizzato (la durata della vita dell'opzione o un suo sottinsieme), il tipo di media (aritmetica o geometrica), il peso attribuito a ciascun prezzo in base all'importanza del periodo e il tipo di campionamento (continuo o discreto). Nel caso di prezzi con pesi uguali e periodo di campionamento uguale alla durata della vita dell'opzione si hanno queste medie:

- $A_d = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S(t_k)$ media aritmetica nel caso discreto
(con $t_0 = 0$,$t_n = T$,$t_k = t_0 + hk$,$h = \frac{t_n - t_o}{n}$)
- $A_c = \dfrac{1}{T}\int_0^T S(u)du$ media aritmetica nel caso continuo
- $G_d = \sqrt[n+1]{(\prod_{k=o}^{n} S(t_k))}$ media geometrica nel caso discreto
- $G_c = exp\left\{\dfrac{1}{T}\int_0^T logS(u)du\right\}$ media geometrica nel caso continuo

Indicato con M uno dei valori medi definiti, il payoff di un'opzione average price è:

$$max\{0, \phi M - \phi X\}$$

con X prezzo d'esercizio è ϕ che vale 1 se l'opzione è di tipo call e -1 se l'opzione è di tipo put. Invece il payoff di un'opzione average strike è :

$$max\{0, \phi S_T - \phi M\}.$$

Anche nel caso di opzioni asiatiche, come in quelle europee, per la valutazione di un opzione Put si possono utilizzare le formule di CALL-PUT PARITY conoscendo il prezzo della call corrispondente. In particolare, se l'opzione è di tipo *average price* e si suppone di poter operare in ipotesi di neutralità al rischio, i prezzi all'epoca $t = 0$ di un'opzione call e put si ottengono attualizzando al tasso istantaneo privo di rischio r i rispettivi profitti alla scadenza $t = T$ cioè:

$$C_{AS} = e^{-rT}E[max\{0, M - X\}]$$

$$P_{AS} = e^{-rT}E[max\{0, X - M\}].$$

Dato che $max\{0, M - X\} - max\{0, X - M\} = M - X$ si ha

$$P_{AS} = C_{AS} - e^{-r(t_n - t_0)}[E(M) - X]$$

dove:
r = tasso free risk
t_n = data di scadenza dell'opzione
t_0 = data di valutazione
e pertanto, se è noto il prezzo teorico di un'opzione asiatica di tipo call, il prezzo di un'opzione put è immediatamente calcolabile una volta che si riesca a calcolare $E(M)$.

1.1.1 Valutazione in forma chiusa

Sebbene, nella prassi operativa, la maggior parte delle opzioni asiatiche negoziate abbia come parametro di riferimento medie di tipo aritmetico, la considerazione e l'applicazione della tecnica della media geometrica nella valutazione delle opzioni asiatiche riveste un ruolo importante. Ciò è dovuto al fatto che, a differenza della media aritmetica, per quella geometrica possono essere ricavate formule chiuse di valutazione. La considerazione di tale situazione costituisce il punto di partenza dello sviluppo di uno dei modelli più utilizzati nella prassi operativa per valutare le opzioni asiatiche: il modello di Vorst. Infatti tale tecnica di pricing utilizza la media geometrica quale approssimazione della media aritmetica delle rilevazioni di prezzo dell'asset sottostante, e tiene conto dell'effetto approssimazione attraverso una rettifica, come si vedrà successivamente, dello strike price. Dunque Vorst assume che il valore finale di un'opzione call asiatica, che può esser espresso in termini formali come:

$$max\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} - X; 0\right)$$

può essere calcolato attraverso la seguente approssimazione :

$$max\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}} - X; 0\right)$$

dove:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} = \ media\ aritmetica\ dei\ prezzi$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \ media\ geometrica\ dei\ prezzi$$

Da ciò ne deriva che il valore corrente di un opzione asiatica call, che indichiamo con C_{AS}, può essere scritto in prima battuta come:

$$C_{AS} = e^{-r(t_n - t_0)} E\left[max\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}} - X; 0\right)\right]$$

L'utilizzo della media geometrica, al posto di quella aritmetica, è reso necessario dal fatto che si vuole ricorrere a una forma di valutazione, ricavata dal modello di Black & Scholes. Infatti si deve tener presente che la somma di variabili stocasticamente indipendenti distribuite in modo lognormale non si distribuiscono secondo una lognormale, cosa che invece vale per il loro prodotto.

Tenendo presente ciò Vorst ha proposto la seguente variante del modello di Black & Scholes per valutare con una formula chiusa un'opzione asiatica call:

$$C_{AS} = e^{-r(t_n - t_0)}\left\{e^{M+\frac{V}{2}} N(d) - XN\left(d - \sqrt{V}\right)\right\}$$

dove:

$$d = \frac{M - ln(X) + V}{\sqrt{V}}$$

I termini M e V sono rispettivamente la media e la varianza del logaritmo della media geometrica; quest'ultimo, come noto, è dato in termini formali da:

$$ln\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

In particolar modo si ha che la media del logaritmo della media geometrica è data da:

$$M = ln\left(S_{t_0}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (t_i - t_0)$$

dove:
S_{t_0}= prezzo all'istante di valutazione
q = dividend yield
σ= volatilità del titolo sottostante
t_0 = data di valutazione
t_i = istante iesimo di rilevazione
r = tasso free risk
mentre la varianza dello stesso è determinata come:

$$V = \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} min(t_i - t_0, t_j - t_0).$$

Dal momento che la media geometrica delle rilevazioni del prezzo dell'asset sottostante risulta inferiore o al più uguale (nel caso di prezzo costante in tutte le date di rilevazione dello stesso) alla media aritmetica, Vorst ha proposto di rettificare il livello dello strike price per la differenza tra il valore della media aritmetica e quello della media geometrica; in termini formali lo strike price corretto è determinato nel seguente modo:

$$X^* = X - \left[E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}\right) - E\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right]$$

dove il valore atteso della media aritmetica e quello della media geometrica sono rispettivamente calcolati come:

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}\right) = S_{t_0} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{(r-q)\cdot(t_i-t_0)}}{n}$$

$$E\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = e^{M+\frac{V}{2}}$$

Tenendo dunque presente la necessaria rettifica da apportare allo strike price, si ha che il valore di un'opzione asiatica call, calcolato prima dell'inizio del periodo di rilevazione dei prezzi,è dato da:

$$C_{AS} = e^{-r(t_n-t_0)}\left\{e^{M+\frac{V}{2}}N(d) - X^* \cdot N\left(d-\sqrt{V}\right)\right\}$$

dove:

$$d = \frac{M - ln(X^*) + V}{\sqrt{V}}$$

Nel momento in cui si deve valutare un'opzione asiatica all'interno del periodo di rilevazione dei prezzi è necessario apportare alcune rettifiche alle formule di valutazione finora considerate.

In particolar modo si deve tener presente che all'interno del periodo di rilevazione un certo numero di prezzi è noto e quindi che una parte della media è stata determinata.

In generale se supponiamo di valutare l'opzione al tempo intermedio t_i con $t_m < t_i < t_n$, dove t_m è l'istante temporale relativo all'ultima rilevazione di prezzo effettuata e t_n è la data di scadenza dell'opzione, allora il valore finale della media dei prezzi, valutato all'istante t_i, risulterà pari alla media ponderata tra la media dei prezzi nota fino a t_m e la media dei prezzi ignota relativa al restante periodo di vita dell'opzione; in termini formali si ha che:

$$MF = \frac{m}{n}MN + \frac{n-m}{n}MI$$

dove:
MF = media finale dei prezzi
MN = media nota dei prezzi rilevati fino al tempo t_m
MI = media ignota dei prezzi, da rilevare fino alla scadenza t_n dell'opzione
n = numero di rilevazioni complessive dei prezzi
m = numero di rilevazioni dei prezzi già avvenute .
Tenendo presente ciò, il payoff dell'opzione asiatica è dato da:

$$\textit{payoff call asiatica} = \textit{max}(MF - X, \textit{0})$$

Essendo MF la media ponderata di due valori medi, il primo certo e il secondo incerto, allora il payoff di un *average price call options* può essere riscritto come:

$$\textit{payoff call asiatica} = \textit{max}\left(\frac{m}{n}MN + \frac{n-m}{n}MI - X, \textit{0}\right)$$

ovvero, evidenziando il termine $\frac{n-m}{n}$ si ottiene che:

$$\textit{payoff call asiatica} = \frac{n-m}{m}\textit{max}\left(MI - \frac{n}{n-m}\big(X - \frac{m}{n}MN\big), \textit{0}\right)$$

Il termine tra le parentesi a destra dell'uguale può essere considerato il payoff di un'opzione asiatica in cui la media futura si formerà a partire dalla data di rilevazione successiva a quella di valutazione e con strike price pari a:

$$X'' = \frac{n}{n-m}\left(X - \frac{m}{n}MN\right)$$

Questa è la seconda correzione e può essere utilizzata solo sotto la condizione che $X'' > 0$. Se $X'' \leq 0$, allora ne segue che la media aritmetica dei prezzi risulterà superiore allo strike price con probabilità pari a uno. Pertanto sulla base di quanto proposto da Vorst il valore di una call option asiatica è dato da:

$$\textit{call asiatica} = e^{-r(t_n - t_i)}\Big(\frac{m}{n}MN + \frac{n-m}{n}MI - X\Big)$$

dove MI è il valore atteso della media aritmetica.

Nel caso infine di un'opzione put asiatica, che indichiamo con P_{AS}, la formula di valutazione è la seguente:

$$P_{AS} = e^{-r(t_n - t_0)}\Bigg\{X^* \cdot N\Bigg(-d + \sqrt{V}\Bigg) - e^{M+\frac{V}{2}}N(-d)\Bigg\}$$

1.1.2 Valutazione con tecniche ad albero

Questo tipo di tecnica non è molto utilizzata poichè si pensa che non sia adatta per le opzioni path-dependent invece si può dimostrare che tramite qualche codifica si riesce a memorizzare l'insieme delle informazioni che consentono di calcolare i valori medi richiesti dei prezzi del bene sottostante e così utilizzare un modello di tipo binomiale (che è certamente il più noto tra le tecniche ad albero). Sia $[0, T]$ l'intervallo temporale di riferimento che supponiamo di dividere in M sottointervalli di ampiezza $\Delta t = \frac{T}{M}$. L'ipotesi fondamentale del metodo binomiale è che da ciascun prezzo S_m, relativo all'epoca $t = m\Delta t$, $m = 0, 1, ..., M-1$, si possa passare a due soli prezzi all'epoca immediatamente successiva:

$$S_{m+1} = \begin{cases} uS_m & \text{con probabilità } p \\ dS_m & \text{con probabilità } 1-p \end{cases} .$$

Come nel caso delle opzioni ordinarie si può supporre che i fattori d e u e la probabilità neutrale al rischio p siano legati alla volatilità σ e al tasso non rischioso δ dalle relazioni:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u}$$

$$p = \frac{e^{\delta\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{e^{\delta\Delta t} - d}{u - d}.$$

Se con $S_{0,0}$ si indica il prezzo del bene sottostante l'opzione al tempo $t = 0$, allo stadio m $(1 \leq m \leq M)$ i prezzi possibili sono $S_{m,n}$ (n = 0,1,...,2^m - 1) e si possono calcolare ricorsivamente con la relazione:

$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{m-1,n/2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ S_{m-1,\lfloor n/2 \rfloor} u & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

dove con $\lfloor n/2 \rfloor$ si è indicata la parte intera di $n/2$.

Dato che il profitto alla scadenza di un'opzione asiatica dipende dalla media dei prezzi, ad ogni stadio si dovranno memorizzare le informazioni che consentono di calcolare le medie delle singole traiettorie. A tal fine nel caso della media aritmetica, posto $C_{0,0} = S_{0,0}$, le somme sono calcolabili con le relazioni:

$$C_{m,n} = C_{m-1,\lfloor n/2 \rfloor} + S_{m,n} \qquad m = 1, 2, ..., M \qquad n = 0, 1, ..., 2^m - 1.$$

Le medie aritmetiche dei prezzi alla scadenza sono date da:

$$A_{M,n} = \frac{C_{M,n}}{M+1} \qquad n = 0, 1, ..., 2^M - 1.$$

Nel caso delle opzioni asiatiche di tipo *average price* i profitti alla scadenza sono:

$$V_{M,n} = max[0, A_{M,n} - X] \qquad n = 0, 1, ..., 2^M - 1;$$

se invece le opzioni sono di tipo *average strike* i profitti alla scadenza sono:

$$V_{M,n} = max[0, S_{M,n} - A_{M,n}] \qquad n = 0, 1, ..., 2^M - 1.$$

Applicando queste formule si trova che i tempi di esecuzione si mantengono entro livelli accettabili solo se $M \leq 25$; se M è maggiore l'esecuzione potrebbe diventare onerosa.

Infine si può affermare che le valutazioni binomiali nei casi di opzioni *in* $(S > X)$ e *at the money* $(S = X)$ convergono rapidamente ai valori esatti, mentre la convergenza risulta più lenta per le opzioni *out of the money* $(S < X)$ e inoltre da un'analisi dei risultati si potrebbe concludere che le valutazioni ottenute con il modello binomiale presentino la caratteristica di essere monotone crescenti rispetto al numero M degli stadi utilizzati (mentre in effetti non è così e ciò si può verificare considerando variazioni unitarie del numero degli stadi).

1.2 Opzioni Barriera

Le opzioni a barriera sono state fra le prime opzioni esotiche ad essere negoziate. Una prima call di tipo down-and-out apparve sul mercato Over The Counter americano già nel 1967, ma bisognerà attendere la fine degli anni ottanta per vedere emergere anche altre tipologie di opzioni barriera.
Questa tipologia di opzioni ha la peculiarità di apparire (knock-in) o scomparire (knock-out) quando il prezzo dell'attività sottostante raggiunge un determinato valore detto appunto barriera (H). Siano esse call o put, le opzioni barriera possono essere distinte in quattro categorie:

- up-and-in (knock-in), il prezzo dell'attività sottostante S deve, prima della scadenza, crescere fino a raggiungere il valore H. Solo in questo caso il possessore avrà diritto ad esercitare l'opzione;

- down-and-in (knock-in), l'opzione "appare" solo nel momento in cui S decresce fino a raggiungere H;

- up-and-out (knock-out), il possessore perde il diritto ad esercitare l'opzione se, durante la vita della stessa, S aumenta fino a raggiungere H;

- down-and-out (knock-out), in questo caso il contratto è cancellato se, entro la scadenza dello stesso, il prezzo dell'attività sottostante S raggiunge o va al di sotto del valore della barriera H.

Comunemente la barriera si trova nella regione out-of-the-money, ossia è posizionata al di sotto del prezzo di esercizio X per le opzioni call. Queste vengono dette standard o regular barrier (e sono quattro). Tutte quelle opzioni la cui barriera è situata invece nella regione in-the-money (barriera sopra al prezzo d'esercizio) sono dette reverse barrier (anche queste quattro). Proprio per la presenza della barriera, che limita le possibilità di esercizio, queste opzioni hanno premi più contenuti rispetto a quelli previsti per acquistare opzioni standardizzate di tipo europeo. La struttura delle opzioni barriera può essere complicata dalla presenza di una barriera discontinua (se per esempio è in funzione del tempo) e/o di rebate.
Un rebate è un pagamento fisso fatto al detentore dell'opzione quando l'attività sottostante raggiunge la barriera (per le knock-out) o non la raggiunge mai (nel caso delle knock-in) e può essere applicato a qualsiasi tipo di opzione barriera, sebbene sia una clausola tipica delle reverse barrier.

1.2.1 Valutazione in forma chiusa

In questo lavoro si è preso in considerazione il calcolo di uno dei casi possibili in quanto gli altri sono analoghi. Secondo la metodologia proposta da Rubinstein e Reiner, il valore di una call di tipo down-and-out si può scrivere come la somma di tre addendi che sintetizzano rispettivamente:

1. il valore di un'opzione call ordinaria con analoghe caratteristiche
2. la riduzione nel valore dovuta alla clausola della barriera
3. il valore (eventuale) del rimborso.

Nell'ipotesi che la barriera H e il rimborso R siano costanti e che si abbia $S_0, X \geq H$ si può dimostrare che il valore della call presa in questione all'epoca $t = 0$ è:

$$C_{DAO} = \underbrace{\Bigg[S_0 N(a_1) - Xe^{-rT} N(a_2)\Bigg]}_{(1)} -$$

$$\underbrace{-\Bigg[S_0\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2(\eta+1)} N(b_1) - Xe^{-rT}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\eta} N(b_2)\Bigg] +}_{(2)}$$

$$\underbrace{+\Bigg[R\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\eta+\gamma} N(c_1) + R\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\eta-\gamma} N(c_2)\Bigg]}_{(3)}$$

dove:

$$\eta = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \qquad \gamma = \sqrt{\eta^2 + 2\frac{r}{\sigma^2}}$$

$$a_1 = \frac{log(S_0/X)}{\sigma\sqrt{T}} + (1+\eta)\sigma\sqrt{T} \qquad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$b_1 = \frac{log(H^2/S_0X)}{\sigma\sqrt{T}} + (1+\eta)\sigma\sqrt{T} \qquad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$c_1 = \frac{log(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \gamma\sigma\sqrt{T} \qquad c_2 = c_1 - 2\gamma\sigma\sqrt{T}.$$

1.3 Opzioni Lookback

Le opzioni lookback permettono al possessore di esercitare alla scadenza l'opzione comprando (*lookback call*) o vendendo (*lookback put*) l'asset finanziario sottostante rispettivamente sulla base delle condizioni di prezzo più convenienti, registrate durante la vita della stessa.

Si distinguono due categorie di lookback option:

- le *standard lookback option* si caratterizzano per il fatto che lo strike price risulta variabile nel senso che a esso si applica la logica di comprare o vendere al prezzo più conveniente;
- le *extrema lookback option* si caratterizzano per il fatto che lo strike price risulta fisso, per cui la logica di acquistare o vendere al prezzo più conveniente è riferita in questo caso al titolo sottostante e non allo strike price.

Quindi la prima tipologia di opzione prevede che l'investitore fissi lo strike price sulla base del prezzo più basso (acquirente call) o di quello più alto (acquirente put) assunto dall'asset finanziario sottostante durante la vita dell'opzione. Se dunque consideriamo una *standard lookback call option* il payoff può essere definito come:

$$\textit{payoff standard lookback call option} = max\left(0, S_{t_n} - \min_{0 \leq i \leq n} S_{t_i}\right)$$

dove $\min_{0 \leq i \leq n} S_{t_i}$ è il prezzo minimo dell'asset finanziario sottostante rilevato nel periodo di vita dell'opzione.
Se si considera invece una *standard lookback put option* il relativo payoff può essere scritto come:

$$\textit{payoff standard lookback put option} = max\left(0, \max_{0 \leq i \leq n} S_{t_i} - S_{t_n}\right)$$

dove $\max_{0 \leq i \leq n} S_{t_i}$ è il prezzo massimo dell'asset finanziario sottostante nel periodo di vita dell'opzione.

Invece per quanto riguarda la seconda tipologia, cioè le *extrema lookback option*, essa ha la caratteristica di avere lo strike price fissato, e il suo valore finale è calcolato considerando il prezzo più alto (per l'acquirente call) o quello più basso (per l'acquirente put) registrato dall'asset finanziario sottostante durante la vita dell'opzione. Il payoff della call viene così definito:

$$\textit{payoff extrema lookback call option} = \textit{max}\left(\mathit{0},\ \max_{\mathit{0}\leq i\leq n} S_{t_i} - X\right)$$

Mentre per la put il payoff può essere scritto come:

$$\textit{payoff extrema lookback put option} = \textit{max}\left(\mathit{0}, X - \min_{\mathit{0}\leq i\leq n} S_{t_i}\right)$$

1.3.1 Valutazione in forma chiusa

Di seguito si elencheranno le formule di valutazione nei quattro casi:

1. *standard lookback call option*:

$$C_{SL} = S_0 e^{-q\tau} N(d_1) - S_{min} e^{-r\tau} N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) +$$

$$+ \left[\frac{S_0 e^{-r\tau} \left(\frac{S_{min}}{S_0}\right)^{2\eta} N(-d_1 + 2\eta\sigma\sqrt{\tau}) - e^{-q\tau} S_0 N(-d_1)}{2\eta} \right]$$

2. *standard lookback put option*:

$$P_{SL} = S_{max} e^{-r\tau} N(-d_2 + \sigma\sqrt{\tau}) - S_0 e^{-q\tau} N(d_2) -$$

$$- \left[\frac{S_0 e^{-r\tau} \left(\frac{S_{max}}{S_0} \right)^{2\eta} N(d_2 - 2\eta\sigma\sqrt{\tau}) - e^{-q\tau} S_0 N(d_2)}{2\eta} \right]$$

3. *extrema lookback call option*:

$$C_{EL} = S_0 e^{-q\tau} N(d_3) - X e^{-r\tau} N(d_3 - \sigma\sqrt{\tau}) +$$

$$+ \left[\frac{S_0 e^{-q\tau} N(d_3) - S_0 e^{-r\tau} \left(\frac{X}{S_0} \right)^{2\eta} N(d_3 - 2\eta\sigma\sqrt{\tau})}{2\eta} \right]$$

4. *extrema lookback put option*:

$$P_{EL} = X e^{-r\tau} N(-d_3 + \sigma\sqrt{\tau}) - S_0 e^{-q\tau} N(-d_3) +$$

$$+ \left[\frac{S_0 e^{-r\tau} \left(\frac{X}{S_0} \right)^{2\eta} N(-d_3 + 2\eta\sigma\sqrt{\tau}) - e^{-q\tau} S_0 N(-d_3)}{2\eta} \right]$$

dove:

S_0 = prezzo corrente del titolo sottostante

$S_{min} = \min_{0 \le i \le n} S_{t_i}$ = prezzo minimo rilevato nel periodo di osservazione

$S_{max} = \max_{0 \le i \le n} S_{t_i}$ = prezzo massimo rilevato nel periodo di osservazione

$\tau = t_n - t_0$ = differenza tra la data di scadenza e la data corrente di valutazione

σ = volatilità del titolo sottostante

r = tasso free risk

q = dividend yeld

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0 e^{-q\tau}}{S_{min} e^{-r\tau}}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0 e^{-q\tau}}{S_{max} e^{-r\tau}}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_3 = \frac{ln\left(\frac{S_0 e^{-q\tau}}{X e^{-r\tau}}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\eta = \frac{(r-q)}{\sigma^2}$$

Ci sono anche altre due formule che si utilizzano se il prezzo corrente massimo alla data di valutazione risulta più grande dello strike price nel caso di una extrema lookback call o se il prezzo corrente minimo è al di sotto dello strike price nel caso di una extrema lookback put ma si ometteranno in quanto analoghe.

Capitolo 2

Opzioni Forward Start e Tandem

Le forward start option sono opzioni caratterizzate da una partenza differita nel tempo, nel senso che dati tre istanti temporali t_0, t_1, t_n tale tipo di opzioni vengono emesse in t_0 ma iniziano a decorrere dal tempo t_1 con vita residua pari a $t_n - t_1$ e con prezzo di esercizio $X = S_{t_1}$ ossia lo strike price sarà pari al livello del prezzo che il titolo sottostante assumerà al tempo t_1.

Il valore di una forward start è dato dal valore corrente di un'opzione at-the-money con durata pari a $t_n - t_1$. Infatti, attualizzando all'istante iniziale il possibile valore finale di una forward start si ha che:

$$e^{-r(t_n - t_0)} E[max(S_{t_n} - S_{t_1}, 0)].$$

Analizzando la formula del payoff della forward start si può osservare che il valore finale della citata opzione dipende da:

- il livello del prezzo S_{t_1} assunto dall'asset finanziario sottostante all'istante temporale t_1, che diventa lo strike price della forward start;
- il livello del prezzo S_{t_n} assunto dal titolo sottostante alla scadenza t_n dell'opzione differita.

Quest'ultimo valore tuttavia risulta funzione del prezzo raggiunto dall'asset finanziario sottostante al tempo t_1 dal momento che i due valori sono legati dalla seguente relazione:

$$S_{t_n} = S_{t_1} e^{r(t_n - t_1)}.$$

Poichè il prezzo del titolo sottostante all'istante t_n dipende dal livello del prezzo al tempo t_1, allora il valore di una forward start può essere riscritto come:

$$e^{-r(t_n - t_0)} E(S_{t_n}) E(S_{t_n} | S_{t_1}) [max(S_{t_n} - S_{t_1}, 0)].$$

I termini $E(S_{t_n})$ e $E(S_{t_n}|S_{t_1})$ stanno a significare che il payoff dell'opzione dipende dal valore atteso che il prezzo del titolo sottostante assumerà agli istanti temporali t_1 e t_n, ossia rispettivamente S_{t_1} e S_{t_n}, con quest'ultimo che risulta, come si è in precedenza evidenziato, funzione a sua volta di S_{t_1}.

Se si considera il termine compreso nella parentesi quadra della precedente espressione,si può osservare che esso rappresenta il payoff di una call ordinaria che ha durata pari a $t_n - t_1$, che risulta at the money.
Dunque al tempo t_1 sia il valore del titolo sottostante sia quello dello strike price risulta pari a S_{t_1}; quest'ultimo a sua volta è funzione del prezzo corrente sulla base della seguente relazione:

$$S_{t_1} = S_{t_0} e^{r(t_1 - t_0)}$$

Tenendo presente ciò si ha che:

$$e^{r(t_1 - t_0)} E(S_{t_1}) [c_{BS}(S_{t_1}, S_{t_1}, t_n - t_1)]$$

ossia il valore corrente della forward start può essere rappresentato in forma sintetica come:

$$c_{BS}(S_0, S_0, t_n - t_1)$$

$$(call\ europea\ valutata\ col\ modello\ Black - Scholes).$$

Un'opzione di tipo *tandem* è un insieme di opzioni $forward\ start$ collegate fra loro mediante una struttura particolare. Sia $[0, t_n]$ il periodo temporale di riferimento che supponiamo di dividere in n sottoperiodi di ampiezza

t_n/n. Il possesso di un'opzione *tandem* equivale a n opzioni *call europee* che vengono consegnate in corrispondenza degli istanti temporali $t_0 = 0$, $t_1 = t_n/n$, ... , $t_{n-1} = t_n(n-1)/n$, sono emesse at-the-money e hanno durata t_n/n. L'intera opzione *tandem* è un insieme di n opzioni caratterizzate dal fatto che il prezzo d'esercizio della k-esima opzione è uguale al prezzo del bene sottostante rilevato quando scade l'opzione $k-1$.
Poichè ognuna delle opzioni $forward\ start$ che compongono un'opzione *tandem* vale $c_{BS}(S_{t_0}, S_{t_0}, t_n/n)$, il valore di un'opzione tandem è:

$$C_{tandem} = nc_{BS}(S_0, S_0, t_n/n).$$

Da questa formula seguono numerose proprietà che caratterizzano le opzioni *tandem* ed evidenziano le relazioni fra un'opzione *tandem* e un'opzione ordinaria.

Una prima proprietà afferma che il valore di un'opzione *tandem* è maggiore di quello di un'opzione ordinaria con uguale scadenza, cioè:

$$nc_{BS}(S_0, S_0, t_n/n) \geq c_{BS}(S_0, S_0, t_n).$$

Si riconosce facilmente che i principali motivi che giustificano la proprietà suddetta sono:

1. se l'andamento del prezzo del bene sottostante l'opzione è crescente durante la vita dell'opzione, l'opzione *tandem* consente di beneficiare prima delle differenze positive fra prezzo del bene e prezzo d'esercizio;

2. se l'andamento è prima crescente e poi decrescente, l'opzione *tandem* riesce a sfruttare i periodi favorevoli per l'esercizio;

3. se il prezzo del bene sottostante decresce, anche il prezzo d'esercizio nei singoli periodi decresce e il guadagno che può seguire da una rimonta del prezzo risulta più consistente nel caso dell'opzione *tandem*.

Una limitazione superiore per il valore di un'opzione *tandem* è data da $c_{BS}(S_0, S_0, t_n)$.

Un'altra proprietà riguarda l'incremento di valore di un'opzione *tandem* all'aumentare del numero dei periodi d'esercizio, cioè:

$$nc_{BS}(S_0, S_0, t_n/n) \geq (n-1)c_{BS}(S_0, S_0, t_n/(n-1))$$

Se poi il numero dei periodi d'esercizio tende ad infinito, anche il valore dell'opzione *tandem* tende all'infinito.

Si osservi, infine, che un'opzione *tandem* è più sensibile di un'opzione *call* ordinaria rispetto a variazioni sia nel prezzo del bene sottostante, sia nel tempo alla scadenza, sia nella volatilità.

2.1 Valutazione in forma chiusa

La formula di valutazione per le $forward\ start$ è la seguente:

$$C_{fs} = S_0 e^{-q(t_1-t_0)} \left[e^{-q(t_n-t_1)} N(d_1) - e^{-r(t_n-t_1)} N(d_2) \right]$$

dove:

$$d_1 = \frac{\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (t_n - t_1)}{\sigma\sqrt{t_n - t_1}}$$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t_n - t_1}$
S_0 = prezzo corrente del titolo
r = tasso free risk
q = dividend yield
t_0 = istante iniziale di valutazione
t_1 = data di partenza dell'opzione $forward\ start$
t_n = data di scadenza della $forward\ start$.
La suindicata formula si trova in alcune occasioni espressa in questi termini:

$$C_{fs} = S_0 \left[e^{-q(t_n-t_0)} N(d_1) - e^{-r(t_n-t_1)-q(t_1-t_0)} N(d_2) \right].$$

Per quanto concerne l'opzione *put* $forward\ start$ la formula di valutazione è la seguente:

$$P_{fs} = S_0 e^{-q(t_1-t_0)} \left[e^{-r(t_n-t_1)} N(-d_2) - e^{-q(t_n-t_1)} N(-d_1) \right]$$

La formula di valutazione dell'opzione *tandem* è facilmente deducibile da quella della $forward\ start$.

Capitolo 3

Opzioni Binarie

Il payoff di un'opzione standard è descritto da una funzione continua del prezzo S_t del bene sottostante; tale proprietà caratterizza anche la maggior parte delle opzioni esotiche. Le opzioni *binarie*, invece, presentano un payoff di tipo discontinuo; esse rappresentano la forma più semplice di opzioni esotiche e costituiscono delle vere e proprie scommesse sul fatto che il prezzo del titolo sottostante raggiunga un determinato livello.

La famiglia delle opzioni *binarie* è molto vasta; il caso più semplice e anche più trattato riguarda le opzioni di tipo *cash* (o *all*) *or nothing*, in cui si prevede il pagamento di un importo costante (ad esempio K unità monetarie) qualora il prezzo del bene sottostante alla scadenza superi il prezzo d'esercizio X.

In sintesi, dunque, il payoff di una *cash or nothing call option* e di una *cash or nothing put option* è rispettivamente così definito:

$$\textit{Payoff cash or nothing call} = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \leq X \\ K & \text{se } S_T > X \end{cases}$$

$$\textit{Payoff cash or nothing put} = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \geq X \\ K & \text{se } S_T < X \end{cases}$$

dove:

S_T = prezzo del titolo sottostante a scadenza

X = strike price

K = somma di denaro.

Nel caso di opzione *cash* (o *all*) *or nothing* di tipo americano (con esercizio possibile in ogni $t \in [0, T])$ si parla di opzione $one - touch$. L'opzione $one - touch$ consente di ottenere K unità monetarie non appena il prezzo del bene sottostante ha raggiunto il livello X predefinito. Se il livello X viene raggiunto all'epoca $t^* \in [0, T)$ l'opzione deve essere immediatamente esercitata; infatti, mantenendone il possesso si rinvia un introito futuro che non supererà in ogni caso K unità monetarie.

Una semplice variante delle opzioni *all or nothing* è rappresentata dalle opzioni *asset or nothing*. Per tali opzioni si prevede il pagamento della somma S_T se $S_T > X$; il loro payoff è:

$$\textit{Payoff asset or nothing call} = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \leq X \\ S_T & \text{se } S_T > X \end{cases}$$

$$\textit{Payoff asset or nothing put} = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \geq X \\ S_T & \text{se } S_T < X \end{cases} .$$

Un'altra semplice veriante dà luogo a quelle che in letteratura si chiamano opzioni di tipo *gap* e che prevedono il pagamento della differenza tra S_T e un determinato livello Z (che è differente dallo strike price) nel caso in cui S_T superi X; in questo caso i rispettivi payoff sono:

$$\textit{Payoff gap call} = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \leq X \\ S_T - Z & \text{se } S_T > X \end{cases}$$

$$\textit{Payoff gap put} = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \geq X \\ Z - S_T & \text{se } S_T < X \end{cases} .$$

Si osservi che le opzioni di tipo *gap* evidenziano come in un contratto di opzione il prezzo d'esercizio non solo individua il livello del prezzo del bene sottostante oltre il quale l'esercizio dell'opzione risulta conveniente, ma stabilisce anche l'entità del profitto che si ottiene con l'esercizio. La differenza $Z - X$ rappresenta il salto (*gap*) che può essere una quantità negativa, e in tal caso l'opzione *gap* varrà più di un'opzione standard con analoghe caratteristiche, o positiva e in tal caso il valore dell'opzione *gap* risulterà minore.

Infine, l'ultima tipologia di opzione *binaria* che si vuole elencare è la cosiddetta opzione *paylater*: è un'opzione che permette all'acquirente della stessa di pagare il premio solamente alla data di scadenza e nell'ipotesi che essa risulti in-the-money. Il premio è fissato all'atto della stipula del contratto ma l'eventuale pagamento è differito alla scadenza dell'opzione nell'eventualità che si verifichi la citata condizione. Indicando con K_C e K_P il premio da pagare per una *paylater call option* e per una *paylater put option* i rispettivi payoff sono così definiti:

$$\textit{Payoff paylater call} = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \leq X \\ S_T - X - K_C & \text{se } S_T > X \end{cases}$$

$$\textit{Payoff paylater put} = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \geq X \\ X - S_T - K_P & \text{se } S_T < X \end{cases}$$

dove:
S_T = prezzo a scadenza del titolo
X = strike price.

Come si può osservare, nel caso della call *paylater* si ha una sorta di salto "indietro" del valore del payoff rispetto a una call ordinaria. Tale differenza include il costo supplementare che l'investitore sostiene per l'eventualità che si riserva di non pagare nulla se alla scadenza l'opzione è out-of-the-money. Si ripresenta in sostanza un profilo del payoff simile a quello della *gap option*, in cui si aveva il livello predeterminato del valore dell'asset finanziario sottostante superiore allo strike price: la differenza risiede nel fatto che nel caso della *paylater* il premio è pagato solo a scadenza se l'opzione è in-the-money.

3.1 Valutazione in forma chiusa

Nel caso in cui l'esercizio sia possibile solo alla scadenza (opzione *cash or nothing* di tipo europeo) la formula di valutazione all'epoca t_0 è molto semplice:

$$C_{CON} = e^{-r(T-t_0)} K \cdot N(d_2)$$

dove:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{X}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_0)}{\sigma\sqrt{T - t_0}}$$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t_0}$
S_{t_0} = prezzo corrente del titolo sottostante
X = strike price
K = somma di denaro
r = tasso di interesse free risk
T = data di scadenza dell'opzione
t_0 = data corrente di valutazione
q = dividend yield .

Come si può osservare K è moltiplicato per $N(d_2)$, che esprime la probabilità che l'opzione a scadenza venga esercitata dall'investitore.

Naturalmente nel caso di un'opzione *cash or nothing put* si avrà:

$$P_{CON} = e^{-r(T-t_0)} K \cdot N(-d_2).$$

Il valore di una call *asset or nothing* è dato dalla seguente equazione:

$$C_{AON} = e^{-q(T-t_0)} S_{t_0} \cdot N(d_1).$$

Infatti $N(d_1)$ esprime la probabilità che il prezzo dell'asset sottostante raggiunga a scadenza un determinato valore superiore a X.

Nel caso invece di una *put asset or nothing* si avrà:

$$P_{AON} = e^{-q(T-t_0)} S_{t_0} \cdot N(-d_1).$$

Il valore di un'opzione call *gap* è dato dalla seguente equazione:

$$C_{GAP} = e^{-q(T-t_0)} S_{t_0} \cdot N(d_1) - e^{-r(T-t_0)} Z \cdot N(d_2).$$

In questo caso si può osservare che nella formula si ha da una parte il prezzo S_T moltiplicato per $N(d_1)$, che esprime la probabilità che il prezzo dell'asset sottostante alla data di scadenza raggiunga un valore superiore a X, e dall'altro Z moltiplicato per $N(d_2)$ che esprime la probabilità che l'opzione venga esercitata.

Nel caso invece di una *put gap option* si avrà:

$$P_{GAP} = e^{-r(T-t_0)} Z \cdot N(-d_2) - e^{-q(T-t_0)} S_{t_0} \cdot N(-d_1).$$

Infine, per determinare l'ammontare del premio da pagare nel caso della *paylater call* all'istante di valutazione t_0 si deve risolvere:

$$C_{PAYLATER} = S_{t_0} e^{-q(T-t_0)} N(d_1) - (X + K_C) e^{-r(T-t_0)} N(d_2)$$

Dal momento che questa relazione al tempo di valutazione deve essere pari a zero, ossia in termini formali deve essere che:

$$S_{t_0} e^{-q(T-t_0)} N(d_1) - (X + K_C) e^{-r(T-t_0)} N(d_2) = 0$$

allora si può ricavare il valore del premio K_C della *paylater call* come:

$$K_C = \frac{S_{t_0} e^{-q(T-t_0)} N(d_1) - X e^{-r(T-t_0)} N(d_2)}{e^{-r(T-t_0)} N(d_2)}.$$

Le stesse argomentazioni possono essere utilizzate per determinare il premio K_P di una *put paylater*; per cui si avrà che:

$$S_{t_0}e^{-q(T-t_0)}N(d_1) - (X - K_P)e^{-r(T-t_0)}N(d_2) = 0$$

da cui si ha:

$$K_P = \frac{Xe^{-r(T-t_0)}N(-d_2) - S_{t_0}e^{-q(T-t_0)}N(-d_1)}{e^{-r(T-t_0)}N(-d_2)}.$$

É interessante osservare che una posizione lunga su una *call paylater* può essere replicata attraverso una posizione lunga su una call ordinaria con strike price pari a X e con una posizione corta pari a K_C *cash or nothing call* con strike price pari a X.
In modo del tutto analogo è possibile replicare una *put paylater* attraverso una posizione lunga su una put ordinaria con strike price pari a X e con una posizione corta pari a K_P *cash or nothing put* con strike price pari a X.

Come si può notare si è omessa la specificazione di d_1 e d_2 in ogni calcolo in quanto identiche in tutte le opzioni *binarie*.

Capitolo 4

Opzioni Composte

Le opzioni *composte*, dette anche opzioni su opzioni, sono caratterizzate dal fatto che il bene sottostante è esso stesso un'opzione. Sono infatti strumenti finanziari che danno il diritto di acquistare (se si tratta di opzioni *call*) o vendere (se si tratta di opzioni *put*), ad un prezzo di esercizio fissato, un'opzione che a sua volta può essere di tipo *call* o *put*: si possono così avere *call* su *call*, *call* su *put*, *put* su *call*, *put* su *put*.

Le opzioni *composte* sono state inizialmente analizzate con lo scopo di valutare particolari progetti d'investimento aziendali.

Nel seguito considereremo solo opzioni di tipo europeo. Nei contratti che regolano le opzioni *composte* è necessario fissare due diverse date di scadenza t_1 e t_n; l'epoca t_1 rappresenta la scadenza dell'opzione composta, alla quale quest'ultima può essere esercitata mentre l'epoca t_n rappresenta la scadenza dell'opzione sottostante che verrà emessa se l'opzione *composta* verrà esercitata. Analogamente vengono fissati due prezzi d'esercizio: il prezzo d'esercizio al quale l'opzione sottostante può essere acquistata (se l'opzione *composta* è una *call*) o venduta (se essa è una *put*), indicato rispettivamente con C^* o P^*, e il prezzo d'esercizio X relativo all'opzione sottostante.

Il valore di un'opzione *composta* alla scadenza t_1 può essere espresso in funzione del valore dell'opzione *call europea* sottostante in corrispondenza di tale data ($C_{t_1}(S_{t_1}, X, \tau)$ con $\tau = t_n - t_1$ = durata dell'opzione sottostante) :

$$Payoff\ \ call\ \ su\ \ call = \begin{cases} C_{t_1}(S_{t_1}, X, \tau) - C^* & \text{se } C_{t_1} > C^* \\ 0 & \text{se } C_{t_1} \leq C^* \end{cases} .$$

Infatti l'opzione *call su call* verrà esercitata qualora il prezzo dell'opzione *call* sottostante sia superiore al prezzo d'esercizio C^*. Nell'ipotesi di lognormalità del prezzo dell'attività sottostante, il valore a scadenza C_{t_1} può essere determinato sulla base del modello di Black-Scholes.

Si indichi con S^* il valore di S_{t_1} in corrispondenza del quale si ha coincidenza tra il valore della *call* sottostante in t_1 e il prezzo d'esercizio dell'opzione *composta*, cioè si ponga:

$$C_{t_1}(S_{t_1}, X, \tau) = C^*.$$

Il valore dell'opzione composta all'epoca t_1 si può scrivere in funzione del valore assunto dal bene sottostante all'epoca t_1 :

$$Payoff\ \ call\ \ su\ \ call = \begin{cases} C_{t_1}(S_{t_1}, X, \tau) - C^* & \text{se } S_{t_1} > S^* \\ 0 & \text{se } S_{t_1} \leq S^* \end{cases} .$$

4.1 Valutazione in forma chiusa

Il valore dell'opzione composta si può calcolare attualizzando al tasso privo di rischio il valore atteso dell'opzione alla scadenza t_1 :

$$C_{CC} = e^{-rt_1} E(C_{t_1}(S_{t_1}, X, \tau) - C^* | S_{t_1} > S^*) \cdot Prob(S_{t_1} > S^*).$$

Utilizzando note proprietà delle distribuzioni normali e con qualche calcolo si ottiene:

$$C_{CC} = S_0 N_2(a_1, b_1; \sqrt{t_1/t_n}) - X e^{-rt_n} N_2(a_2, b_2; \sqrt{t_1/t_n}) - C^* e^{-rt_1} N(b_2)$$

dove $N_2(a, b, \rho)$ è la funzione di ripartizione della variabile aleatoria normale bivariata standardizzata con coefficiente di correlazione ρ cioè :

$$N_2(a, b, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{a^2 - 2\rho ab + b^2}{2(1-\rho^2)}} da\ db$$

e

$$a_1 = \frac{log(S_0/X) + (r + \sigma^2/2)t_n}{\sigma\sqrt{t_n}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{t_n}$$

$$b_1 = \frac{log(S_0/S^*) + (r + \sigma^2/2)t_1}{\sigma\sqrt{t_1}}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{t_1}.$$

Come nelle altre opzioni r è il tasso d'interesse privo di rischio e σ la volatilità. In modo analogo si possono ottenere le formule di valutazione per le opzioni *call su put*, *put su call*, *put su put*.

Capitolo 5

Altre Opzioni Esotiche

5.1 Opzioni Chooser

La chooser option è un'opzione che permette all'acquirente di scegliere se a una certa data t_1 l'opzione in suo possesso sia una *call* o una *put*. In altri termini il compratore di una chooser option versa inizialmente un premio per decidere a un istante successivo t_1 se assumere una posizione rialzista (acquisto call) o ribassista (acquisto put) sul titolo sottostante.
In quell'istante temporale il payoff di una chooser option può essere espresso in termini sintetici come:

$$Payoff\ chooser\ option = max(call, put).$$

Oppure, se si esplicita il valore delle opzioni da scegliere (*call* o *put*) in funzione del valore del titolo sottostante S_{t_1}, della vita residua ($t_{n_1} - t_1$ e $t_{n_2} - t_1$), e dello strike price X_1 e X_2, si ha che:

$$Payoff\ chooser\ option = max[call(S_{t_1}, t_{n_1} - t_1, X_1); put(S_{t_1}, t_{n_2} - t_1, X_2)].$$

Il possessore di una chooser option entra dunque in possesso di un'opzione che scade al tempo t_1 e che gli permette di scegliere tra un'opzione *call* con strike price pari a X_1 e scadenza t_{n_1} oppure un'opzione *put* con strike price pari a X_2 e scadenza t_{n_2}.

Il caso più semplice di chooser option è quello in cui per entrambe le opzioni *call* e *put* si ha l'uguaglianza sia dello strike price che della scadenza, ossia in termini formali $X_1 = X_2$ e $t_{n_1} = t_{n_2}$.

Nel caso in esame per ricavare la formula di valutazione di una chooser option si può ricorrere alla cosiddetta *put-call parity*. In particolar modo ricorrendo a tale relazione si ha che il valore di un opzione *put*, che ha inizio al tempo t_1 e scadenza al tempo t_{n_2}, è pari al valore di un'opzione *call*, con le stesse caratteristiche, a cui deve essere sommata la differenza tra il valore dello strike price, attualizzato al tempo t_1, e il prezzo del titolo sottostante l'opzione sempre al tempo t_1. Dal momento che si sta lavorando sotto l'ipotesi di uguaglianza sia degli strike price che della vita residua per la *call* e per la *put*, allora per comodità espositiva si pone X_1 e X_2 uguale a X, t_{n_1} e t_{n_2} uguale a t_n. Sulla base di quest'ultima annotazione la *put-call parity* può essere scritta in termini formali come segue:

$$P(S_{t_1}, t_n, X) = C(S_{t_1}, t_n, X) + Xe^{-r(t_n - t_1)} - S_{t_1}e^{-q(t_n - t_1)}$$

La suindicata relazione finanziaria consente di riscrivere il payoff di una chooser option in questo modo:

$$Payoff\ chooser\ option =$$

$$max\big[C(S_{t_1}, t_n, X), C(S_{t_1}, t_n, X) + Xe^{-r(t_n - t_1)} - S_{t_1}e^{-q(t_n - t_1)}\big]$$

che può essere espresso anche come:

$$Payoff\ chooser\ option = C(S_{t_1}, t_n, X) +$$

$$+ e^{-q(t_n - t_1)} max\left(0, X\frac{e^{-r(t_n - t_1)}}{e^{-q(t_n - t_1)}} - S_{t_1}\right)$$

Definito dunque il payoff di una chooser option, l'attualizzazione dello stesso all'istante di valutazione (che formalmente viene ``espresso" attraverso l'indicazione del prezzo corrente S_0 del titolo sottostante, nelle rappresentazioni sintetiche del valore della *call* e della *put*) fornisce il valore corrente della stessa:

$$Prezzo\ corrente\ chooser\ option = C(S_0, t_n, X) +$$
$$+ e^{-q(t_n-t_1)} P\left(S_0, t_1, X\frac{e^{-r(t_n-t_1)}}{e^{-q(t_n-t_1)}}\right)$$

Si può dunque osservare che una chooser option è equivalente a:

- una *call europea plain vanilla* con durata pari a $t_n - t_0$ e prezzo di esercizio pari a X;
- $e^{-q(t_n-t_1)}$ opzioni *put* con durata $t_1 - t_0$ e con prezzo di esercizio pari a $X\frac{e^{-r(t_n-t_1)}}{e^{-q(t_n-t_1)}}$.

Nel caso invece in cui sia la data di scadenza sia lo strike price delle due opzioni siano diversi, ossia $t_{n_1} \neq tn_2$ e $X_1 \neq X_2$, non è possibile applicare la cosiddetta "*put-call parity*" per valutare la chooser option, che nel caso specifico viene chiamata *complex chooser*. Per la valutazione di queste ultime esiste una formula di valutazione elaborata da Rubistein.

5.2 Opzioni Quanto

Le *quanto option* sono opzioni in cui il premio è espresso in una valuta diversa rispetto a quella dell'attività sottostante e dello strike price. Dunque una *quanto option* permette a un operatore finanziario di investire per esempio su un determinato mercato azionario, diverso da quello della divisa preferita. Il termine "Quanto" è un'abbreviazione dell'espressione *quantità-adjusted*, che indica che la copertura del rischio di cambio garantita dall'investimento nell'operazione è aggiustata in funzione del payoff denominato in valuta estera.

Il payoff di una *quanto option call* e *put* si configura rispettivamente nel seguente modo:

$$Call\ quanto\ option = C_{t_n} \cdot max(S^*_{t_n} - X^*; 0)$$

$$Put\ quanto\ option = C_{t_n} \cdot max(X^* - S^*_{t_n}; 0)$$

dove:

$S^*_{t_n}$= il prezzo del titolo a scadenza, denominato in valuta estera

X^*= lo strike price denominato in valuta estera

C_{t_n}= tasso di cambio predeterminato.

Si trova che il valore di una quanto option in valuta domestica è dato da:

$$Call\ quanto = C_{t_n}\left(S^*_0 e^{(r_f - r - q - \rho\sigma_{S^*}\cdot\sigma_C)\cdot(t_n - t_0)} N(d_1) - X^* e^{-r(t_n - t_0)} N(d_2)\right)$$

dove:

$$d_1 = \frac{ln\left(\dfrac{S^*_0}{X^*}\right) + \left(r_f - q - \rho\sigma_{S^*}\cdot\sigma_C + \sigma^2_{S^*}\right)\cdot(t_n - t_0)}{\sigma_{S^*}\cdot\sqrt{(t_n - t_0)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{S^*}\cdot\sqrt{(t_n - t_0)}$$

con:

S^*_0 = prezzo corrente dell'asset finanziario sottostante in valuta estera

X^* = strike price in valuta estera

r = tasso d'interesse in valuta domestica

r_f = tasso d'interesse in valuta estera

q = dividend yield

σ_{S^*} = volatilità dell'asset finanziario sottostante

σ_C = volatilità del tasso di cambio

ρ = correlazione tra l'asset finanziario e il tasso di cambio

C_{t_n} = tasso di cambio a termine predeterminato.

5.3 Opzioni Cliquet

Le Cliquet option (o Ratchet Option) sono opzioni negoziate soprattutto in Francia e si riferiscono all'indice azionario francese $CAC40$. Queste opzioni all'inizio della loro vita hanno un regolamento del tutto normale con un prezzo d'esercizio fissato, ma in corrispondenza di certe date il prezzo d'esercizio viene cambiato e diviene del tutto uguale al prezzo del bene sottostante osservate in corrispondenza di tali epoche temporali predeterminate. Inoltre quando il prezzo d'esercizio viene ristabilito il valore intrinseco viene calcolato e capitalizzato fino alla scadenza dell'opzione. Se le epoche in cui il prezzo d'esercizio viene aggiornato sono $t_1, t_2, .., t_n$ e la scadenza è prevista in t_n il payoff dell'opzione si può scrivere nel modo seguente:

$$\mathit{Payoff\ Cliquet\ option} = max\big(0, S(t_1) - X\big)e^{r(t_n - t_1)} +$$

$$+ max\big(0, S(t_2) - S(t_1)\big)e^{r(t_n - t_2)} + ... + max\big(0, S(t_n) - S(t_{n-1})\big).$$

Ma una cliquet option può anche essere vista come somma di un opzione europea di durata pari al primo periodo di valutazione, e di $n-1$ opzioni forward start, pari al numero dei restanti sottoperiodi previsti nel contratto di opzione.

Per calcolare il valore di una opzione cliquet utilizziamo quest'ultima suddivisione e in termini formali troviamo:

$$\mathit{Call\ Cliquet} = \big[S_0 e^{-q(t_1 - t_0)} N(d_1) - X e^{-r(t_1 - t_0)} N(d_2)\big] +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} S_0 [e^{-q(t_i - t_0)} N(d_1^*) - e^{-r(t_i - t_{i-1}) - q(t_{i-1} - t_0)} N(d_2^*)]$$

dove:

$$d_1 = \frac{ln\left(\dfrac{S_0}{X}\right) + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{(t_1 - t_0)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(t_1 - t_0)}$$

$$d_1^* = \frac{\left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (t_i - t_{i-1})}{\sigma\sqrt{(t_i - t_{i-1})}}$$

$d_2^* = d_1^* - \sigma\sqrt{(t_i - t_{i-1})}$

Nella prassi operativa è frequente il ricorso al calcolo dell'apprezzamento percentuale del prezzo del sottostante rispetto al valore dello stesso rilevato alla precedente data di reset dello strike price. Ciò impone di dividere il valore delle singole opzioni per lo strike price.

Capitolo 6

Il Metodo MonteCarlo

Un modo alternativo per valutare le opzioni è quello di ricorrere al metodo MonteCarlo. Con tale tecnica, si simulano un numero elevato di possibili percorsi che il titolo sottostante può seguire dalla data di valutazione t_0 fino alla data di scadenza t_n. Successivamente, in corrispondenza di ciascuno di essi, si determinerà il valore dell'opzione, e la media attualizzata di tutti i risultati ottenuti costituirà il prezzo corrente del derivato in oggetto.
Di seguito si proverà a utilizzare questo metodo su alcune opzioni esotiche.

6.1 Il metodo MonteCarlo nelle opzioni Asiatiche

Nel caso di un'opzione asiatica tale procedimento di calcolo deve tener conto della necessità di rilevare il prezzo dell'asset finanziario sottostante negli istanti temporali previsti per la rilevazione del prezzo, e successivamente calcolare la media dei prezzi osservati. Gli step di lavoro sono questi:

1. si definisce in primo luogo un vettore contenente le diverse date di rilevazione dei prezzi;

2. si determina la differenza temporale in anni tra le diverse date di rilevazione dei prezzi; se si ipotizza di trovarsi esattamente all'istante iniziale di valutazione la differenza temporale tra le diverse date di ril-

evazione sarà sempre la stessa, mentre se ci si trova all'interno di uno dei periodi di rilevazione dei prezzi, la differenza temporale che separa la data di valutazione dalla prima data di rilevazione che si incontra sarà naturalmente minore rispetto a quelle successive.

3. si determina la media dei prezzi eventualmente già rilevati, qualora la data di valutazione sia successiva alla data di inizio e sulla base di questi si calcola una media aritmetica parziale, e si pesa quest'ultima in funzione del numero di rilevazioni effettuate sul totale delle rilevazioni previste:

$$media\ ponderata\ prezzi\ già\ rilevati =$$

$$= media\ prezzi\ rilevati \cdot \frac{numero\ di\ rilevazioni\ effettuate}{numero\ rilevazioni\ totali}$$

A questo punto, dopo aver caricato le date di rilevazione dei prezzi, i valori già rilevati e calcolato la media già nota, si passa all'impostazione dei cicli che permettono di effettuare la simulazione relativa al cammino del prezzo dell'asset finanziario sottostante e del calcolo del relativo payoff;

4. si definiscono tre cicli di simulazione, uno all'interno dell'altro, ognuno dei quali consente di tener conto di tre aspetti fondamentali della simulazione:

   - il ciclo più interno tiene conto del numero di giorni intercorrenti tra la data di valutazione e la prima data di rilevazione del prezzo;
   - il secondo ciclo di simulazioni tiene conto del numero di giorni che mancano alla fine della vita dell'opzione e delle date di rilevazione dei prezzi in corrispondenza delle quali occorre "estrarre" i diversi prezzi dell'asset finanziario sottostante, che andranno a formare

la media futura. In altri termini, è necessario calcolare i prezzi in ogni giorno dei diversi sottoperiodi, successivi al primo, in cui è suddivisa la vita dell'opzione, e procedere alla rilevazione del prezzo a ogni data stabilita;

- il terzo ciclo tiene conto del numero di simulazioni "prova" da effettuare (generalmente 10.000), in corrispondenza delle quali occorre determinare il possibile payoff delle average option;

5. a questo punto si procede all'estrazione di una serie di numeri casuali;

6. si trasforma la serie di n numeri casuali in una sequenza di valori ϵ distribuiti normalmente;

7. si inseriscono progressivamente i numeri casuali estratti ϵ nell'equazione che descrive l'evoluzione del prezzo, ottenendo in questo modo una serie di livelli di prezzo per ogni giorno di vita dell'opzione:

$$S_{t+dt} = S_t e^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma\sqrt{dt}\cdot y}$$

dove:
S_0 = prezzo corrente titolo sottostante
S_t = prezzo al tempo t simulato con il metodo MonteCarlo
σ = volatilità
dt = distanza espressa in anni tra due simulazioni del prezzo successive
ϵ = numero casuale distribuito secondo una normale standardizzata
r = tasso d'interesse
q = dividend yield
Il livello del prezzo del titolo sottostante all'opzione, calcolato per ogni giorno di vita della stessa, assume dunque come base di partenza il valore del prezzo dell'asset finanziario determinato il giorno precedente;

8. al termine di ogni simulazione prova si determinerà il possibile payoff dell'opzione; se si ipotizza che un certo numero di rilevazioni dei

prezzi sia già stato effettuato, si ha una misura della media aritmetica parziale. Tale valore deve naturalmente essere considerato nel payoff dell'opzione asiatica che alla fine di ogni simulazione prova si configurerà nel seguente modo:

$$payoff = max(media\ prezzi\ rilevati \cdot \frac{numero\ di\ rilevazioni\ effettuate}{numero\ rilevazioni\ totali} +$$

$$+media\ futura \cdot \frac{num.ril.future}{num.ril.totali} - X, 0)$$

poi si ripetono le simulazioni circa il possibile valore finale del prezzo per 10.000 volte, ottenendo altrettanti valori di payoff:

$$\sum_{i=1}^{10.000} payoff = \sum_{i=1}^{10.000} max(media\ prezzi\ rilevati \cdot$$

$$\cdot \frac{numero\ di\ rilevazioni\ effettuate}{numero\ rilevazioni\ totali} +$$

$$+media\ futura \cdot \frac{num.ril.future}{num.ril.totali} - X, 0)$$

si calcola la media dei 10.000 payoff, si sconta tale valore alla data di valutazione e si trova:

$$C_{AS} = e^{-r(t_n - t_0)} \sum_{i=1}^{10.000} \cdot \frac{payoff}{10.000}.$$

6.1.1 Esempi

Si consideri un'opzione Asiatica call, di tipo *average price* sul titolo Fastweb, le cui caratteristiche sono riassunte nella tabella seguente:

Prezzo del sottostante	42
Strike price	45
Data di inizio	01/01/05
Data di scadenza	01/07/05
Tasso free risk	0,03
Dividend yield	0
Volatilità del sottostante	0,38
Numero di rilevazioni totali	180

dove si è cercato di prendere dei dati più verosimili possibile, tra cui la volatilità implicita annuale del titolo del 38%. Si è considerato anche che la data di valutazione sia uguale a quella iniziale.
Per la determinazione del valore dell'opzione si è utilizzato, come già detto nell'introduzione, Matlab con il seguente listato:

```
function AsianCall = AC( sigma, S0, X, r, T, q, n)
 S0=42;
 X=45;
 r=0.03;
 T=0.5;
 sigma=0.38;
 q = 0;
 n = 180;
 dt = (T/n);
 s = 0;
for i=1:n
 s = s + i ;
end
 M = log(S0) + 1/n*(r - q -(sigma*sigma)/2)*s*dt;
 sum=0;
for i=1:n
for j=1:n
 sum=sum+min(i*dt,j*dt);
end
end
 V = (sigma*sigma)/(n*n)*sum;
 somma = 0;
for i=1:n
 somma = somma+exp((r - q)*(i*dt));
end
 Ea = S0*(somma)/(n);
 Eg = exp(M + V/2);
 Y = X - (Ea - Eg);
 d = (M - log(Y) + V)/sqrt(V);
AC = exp(-r*T)*(exp(M + V/2)*phi(d)-Y*phi(d- sqrt(V)))
function pi = phi(x)
 pi = 0.5*erfc(-x/sqrt(2));
```

ottenendo che l'opzione vale $1,5395$ euro calcolata con la valutazione in forma chiusa proposta dal modello di Vorst descritto nel paragrafo sulle opzioni asiatiche.
Poi si è trovato il valore della stessa call asiatica col metodo MonteCarlo:

```
function MCAsianCall = MCAC( S0,X, T, r, sigma, M, q)
 S0=42;
 X=45;
 r=0.03;
 T=0.5;
 sigma=0.38;
 M=10000;
 q=0;
 n = 180;
 dt = T/n;
 S(1)=S0;
for j=1:M
for i=1:n
 Y = randn(1,1);
 S(i+1) = S(i)*exp((r-sigma*sigma*0.5-q)*dt+sqrt(dt)*sigma*Y);
end
 m(j)=exp(1/(n+1)*sum(log(S)));
 R(j) = exp(-r*T)*mean( max(S-X,0))
end
MCAsianCall = mean(R)
```

con M che rappresenta il numero di simulazioni, trovando $1,44$ euro .

6.2 Il metodo MonteCarlo nelle opzioni Barriera

L'applicazione della tecnica MonteCarlo alle opzioni barriera caratterizzate dal monitoraggio continuo della barriera pone difficoltà non marginali. Infatti, la tecnica in esame analizza il processo evolutivo del prezzo, non garantendo che nel continuo la barriera possa essere o meno toccata. Al riguardo si consideri un'opzione up-and-out: come è noto, se tocca la barriera superiore si estingue; ora se nella simulazione, in due passi successivi che indichiamo con t e $t+dt$, si hanno prezzi poco sotto la barriera, cosa garantisce che la vera traiettoria nel continuo, di cui la simulazione MonteCarlo è solo un'approssimazione, non sia finita oltre la barriera? Alla luce di tale affermazione dunque si è portati a ritenere che le opzioni barriera con clausula "out" varranno di più con la simulazione MonteCarlo rispetto a quelle valutate con la formula chiusa, mentre quelle con clausula "in" varranno di meno. Le differenze non sono affatto trascurabili, specie se il processo parte in prossimità della barriera. La possibilità di ottenere buoni risultati è tuttavia tanto maggiore quanto più la simulazione riesce a riprodurre la continuità del monitoraggio, ma questo ovviamente limita la bontà delle prestazioni in termini di tempo necessario a valutare l'opzione. A differenza del caso relativo alle opzioni asiatiche, per le opzioni barriera non risulta necessario avviare una fase di caricamento preliminare di un vettore delle date di rilevazione dei prezzi e dei valori eventualmente rilevati, ma quello che interessa è impostare solamente i cicli per simulare la possibile traiettoria del prezzo durante la vita dell'opzione.

In particolar modo la realizzazione del modello MonteCarlo comporta l'osservanza dei seguenti step di calcolo:

1. si impostano tre cicli di simulazione:

    - il primo ciclo si riferisce alle ore della giornata durante le quali potrebbe essere attraversata la barriera. Nell'ambito di questo ciclo di simulazione occorre impostare le condizioni che riguardano l'eventuale attivazione o estensione della barriera a seconda che si tratti di un'opzione barriera knock-in o knock-out; la logica è la seguente:

        - se per le knock-in durante il periodo di vita dell'opzione il prezzo tocca al ribasso (down-in) o al rialzo (up-in) la barriera, allora l'opzione si attiva, altrimenti paga il rebate;
        - se per le knock-out durante il periodo di vita dell'opzione il prezzo tocca al ribasso (down-out) o al rialzo (up-out) la barriera, allora l'opzione si estingue, e paga il rebate;

    - il secondo ciclo tiene conto del numero di giorni che mancano alla fine della vita dell'opzione. In altri termini, se ipotizziamo di simulare nel corso di ciascun giorno di vita dell'opzione i prezzi del titolo sottostante per 24 volte, un'opzione barriera con vita residua pari a 90 giorni comporterà la simulazione di 2160 prezzi (24 prezzi per 90 giorni di rilevazione).

- il terzo ciclo tiene conto del numero di simulazione prova da effettuare (consigliate 10.000) e in corrispondenza delle quali occorre determinare i possibili payoff dell'opzione barriera;

La determinazione dei prezzi alle varie date di rilevazione richiede i seguenti step di calcolo (i passi che seguono fino al calcolo della media dei 10.000 payoff ottenuti dalla sua attuazione, non sono successivi ai cicli ma all'interno di essi):

2. procedere all'estrazione di una serie di numeri casuali;

3. trasformare la serie di n numeri casuali in una sequenza di valori ϵ distribuiti normalmente;

4. inserire progressivamente i numeri casuali estratti ϵ di cui al punto precedente nell'equazione che descrive l'evoluzione del prezzo, ottenendo in questo modo una serie di livelli di prezzo per ogni giorno di vita dell'opzione:

$$S_{t+dt} = S_t e^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma\sqrt{dt}\cdot\epsilon}$$

dove:
S_0 = prezzo corrente titolo sottostante
S_t = prezzo al tempo t simulato con MonteCarlo
σ = volatilità
dt = distanza espressa in anni tra due rilevazioni successive
ϵ = numero casuale distribuito secondo una normale standardizzata
r = tasso d'interesse
q = dividend yield

Il livello di prezzo del titolo sottostante all'opzione calcolato per ogni giorno di vita della stessa assume dunque come base di partenza il valore del prezzo dell'asset finanziario determinato il giorno precedente;

5. al termine di ogni simulazione prova si determina il possibile payoff dell'opzione barriera, che alla fine di ogni simulazione prova si configurerà come noto per la call e la put nel seguente modo:

$$\textit{payoff opzione barriera call} = max(S_T - K, 0)$$

$$\textit{payoff opzione barriera put} = max(K - S_T, 0)$$

dove:
S_T = prezzo alla scadenza dell'opzione
K = strike price

6. si ripetono le simulazioni prova per 10.000 volte, ottenendo altrettanti valori di payoff per la call:

$$\sum_{i=1}^{10.000} \textit{payoff opzione} = \sum_{i=1}^{10.000} max(S_T - K, 0)$$

o per la put:

$$\sum_{i=1}^{10.000} \textit{payoff opzione} = \sum_{i=1}^{10.000} max(K - S_T, 0)$$

7. si calcola la media dei payoff e si sconta tale valore alla data di valutazione:

$$Prezzo = e^{-r(t_n - t_0)} \left[\frac{\sum_{i=1}^{10.000} max(S_T - K, 0)}{10.000} \right]$$

dove $e^{-r(t_n - t_0)}$ è naturalmente il fattore di sconto.

6.2.1 Esempi

Per quanto riguarda una *down and out* call, con le stesse caratteristiche di quella dell'esempio precedente e considerando la barriera fissata a 20 euro e il rebate uguale a 10 euro, con l'aiuto di Matlab si riesce a trovare una valutazione in forma chiusa e una valutazione col metodo MonteCarlo, con questi listati:

```
function DownAndOutC. = DAOC( sigma, S0, X, r, T, q, n, H, R)
 S0=42;
 X=45;
 H=20;
 R=10;
 r=0.03;
 T=0.5;
 sigma=0.38;
 q = 0;
 n = 180;
 dt = (T/n);
 eta = r/(sigma*sigma)- 1/2;
 gamma = sqrt(eta*eta+2*r/(sigma*sigma));
 a1= (log(S0/X)/sigma*sqrt(T))+ (1+eta)*sigma*sqrt(T);
 a2= a1-sigma*sqrt(T);
 b1= (log(H*H/(S0*X)))/sigma*sqrt(T)+(1+eta)*sigma*sqrt(T);
 b2= b1-sigma*sqrt(T);
 c1= (log(H/S0)/sigma*sqrt(T))+gamma*sigma*sqrt(T);
 c2= c1 - 2*gamma*sigma*sqrt(T);
DAOC = (S0*phi(a1)-X*exp(-r*T)*phi(a2))-..
   (S0*(H/S0)^(2*(eta+1))*phi(b1)-..
   X*exp(-r*T)*(H/S0)^(2*eta)*phi(b2))+..
   (R*(H/S0)^(eta+gamma)*phi(c1)+..
   R*(H/S0)^(eta-gamma)*phi(c2))
function pi = phi(x)
 pi = 0.5*erfc(-x/sqrt(2));
```

```
function MCDownAndOutC. = MCDAOC( S0,X,T,r,sigma,M,q,H,R)
 S0=42;
 X=45;
 H=20;
 R=10;
 r=0.03;
 T=0.5;
 sigma=0.38;
 M=10000;
 q=0;
 dt= T/n;
 S(1) = S0;
for j=1:M
for i=1:n
 Y = randn(1,1);
 S(i+1) = S(i) * exp((r- sigma*sigma - q)*T + sqrt(T)*sigma*Y);
end
 if max(S(i))<H
P(j)= (max(S(n)-X,0)) ;
else
 P(j) = R;
end
end
MCDAOC = exp(-r*T)*mean(P)
```

Con la valutazione in forma chiusa troviamo che, con queste ipotesi, una call *down and out* vale 5.6340 euro mentre col metodo MonteCarlo, sempre considerando 10.000 simulazioni, vale 9.8511 euro e quindi, come già preannunciato, il secondo è maggiore del primo.

6.3 Il metodo MonteCarlo nelle opzioni Lookback

Anche in questo tipo di opzione si può applicare la "tecnica" MonteCarlo, e omettendo d'ora in poi la parte degli step di calcolo dedicata al sottostante in quanto similare, ci resta da vedere come calcolare il payoff per poi fare la media delle simulazioni. Come già detto nel paragrafo dedicato alla valutazione in forma chiusa, il payoff di una lookback option è:

$$payoff\ standard\ lookback\ call\ option = max\left(0, S_{t_n} - \min_{0 \le i \le n} S_{t_i}\right)$$

Quindi non si riesce ad avere una valutazione in forma chiusa in quanto in $t = 0$ non si ha il valore minimo del sottostante, cosa che invece si può fare col metodo MonteCarlo che simula la traiettoria di esso.

6.3.1 Esempi

Prendiamo come esempio una standard lookback call sempre sul titolo Fastweb e calcoliamone il valore col metodo MonteCarlo:

```
function MonteCarloSLC = MCSLC(sigma,S0,r,T,q,n,M)
 S0=42;
 r=0.03;
 T=0.5;
 sigma=0.38;
 q = 0;
 M = 10000;
 n = 180;
 dt =T/n;
 S(1) = S0;
for i=1:M
for i=1:n
 Y = randn(1,1);
S(i+1)=S(i)*exp((r-sigma^2*0.5-q)*dt+sqrt(dt)*sigma*Y);
end
end
MCDSLC = exp(-r*T)*mean(max(S - min(S(i)),0))
```

Il risultato che si ottiene ogni volta è notevolmente diverso da quello precedentemente ottenuto in quanto il valore minimo del sottostante varia da simulazione a simulazione.

6.4 Il metodo MonteCarlo nelle opzioni Forward Start

Come è stato accennato nel capitolo inerente questo tipo di opzioni, esse sono assimilabili a opzioni europee con strike uguale al valore corrente del sottostante e vita residua pari a $t_n - t_1$ con t_1 epoca in cui inizia a decorrere l'opzione.
Quindi si può facilmente arrivare all'algoritmo per valutarle sia col metodo MonteCarlo sia in forma chiusa.

6.4.1 Esempi

Considerando sempre lo stesso sottostante e considerando $t_1 = 60$ giorni si trova che un'opzione *forward start call* valutata in forma chiusa è uguale a 3,8437 euro. Il metodo MonteCarlo in questo caso è instabile in quanto S_{t_1} assume valori molto diversi in ogni simulazione.
Ecco i listati usati per fare questi calcoli:

```
function ForwardStartCall = FSC(sigma,S0,X,r,T,q,n,t1)
 S0=42;
 X=45;
 r=0.03;
 T=0.5;
 t1=60;
 sigma=0.38;
 q = 0;
 n = 180;
 dt = (T/n);
 d1 =((r-q+sigma^2/2)*(n-t1)*dt)/sigma*sqrt((n-t1)*dt);
 d2 = d1 - sigma*sqrt((n - t1)*dt);
FSC = S0*exp(-q*t1*dt)*(exp(-q*(n - t1)*dt)*phi(d1)-..
   exp(-r*(n - t1)*dt)*phi(d2))
function pi = phi(x)
 pi = 0.5*erfc(-x/sqrt(2));
```

```
function MonteCarloFSC = MCFSC(sigma,S0,r,T,q,M,t1,n)
 S0=42;
 r=0.03;
 T=0.5;
 t1=60;
 sigma=0.38;
 q = 0;
 M = 10000;
 n = 180;
 dt = (T - t1)/n;
 S(1) = S0;
for i=1:M
for j=1:n
 Y = randn(1,1);
 S(i+1) = S(i)*exp((r-sigma^2*0.5-q)*dt+..
   sqrt(dt)*sigma*Y);
end
end
MCFSC = exp(-r*(T- t1/360))*mean(max(S - S(t1),0))
```

6.5 Il metodo MonteCarlo nelle opzioni Binarie

Le opzioni *binarie* sono tra le più semplici tra le opzioni esotiche e di conseguenza si può trovare facilmente un modo per calcolarne il valore sia tramite MonteCarlo che con la forma chiusa. Infatti, per esempio nelle *cash or nothing call* basta impostare un controllo `if` che, dopo che sono state simulate le possibili traiettorie, assegna il valore K se S_T è maggiore del prezzo di esercizio e assegna 0 viceversa.

6.5.1 Esempi

Anche in quest'ultimo caso utilizziamo lo stesso sottostante e $K = 20$, per cui si trova che una *cash or nothing call* vale 7.2643 euro calcolandola con la forma chiusa e vale 7.2189 calcolandola con MonteCarlo.
Qui di seguito i listati:

```
function CashOrNothingCall = CONC(sigma,S0,X,r,T,q,n,K)
 S0=42;
 X=45;
 K=20;
 r=0.03;
 T=0.5;
 sigma=0.38;
 q = 0;
 n = 180;
 dt = (T/n);
 d1 = (log(S0/X)+(r-q+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
CONC = exp(-r*T)*K*phi(d1 - sigma*sqrt(T))
function pi = phi(x)
 pi = 0.5*erfc(-x/sqrt(2));
```

```
function MCCashOrNothingC = MCCONC(sigma,S0,X,r,T,q,n,K)
 S0=42;
 X=45;
 K=20;
 r=0.03;
 T=0.5;
 sigma=0.38;
 q = 0;
 M = 10000;
 S = zeros(M,1);
for i=1:M
 Y = randn(1,1);
 S(i)=S0*exp((r-sigma^2*0.5-q)*T+sqrt(T)*sigma*Y);
if S(i)>X
 S(i)=K;
else
 S(i)=0;
end
end
MCCONC = exp(-r*T)*mean(S)
```

Bibliografia

[1] Di Franco M., Polimeni F., Proietti M., *Opzioni e titoli strutturati*, Il Sole 24 ORE, 2002

[2] Epps T.W., *Exotic Option*, World Scientific, 1997

[3] Foschi P., *Appunti di metodi numerici in finanza*, http://www3.csr.unibo.it/∼foschip/ScuolaAF/options.html

[4] Hull J.C., *Fondamenti dei mercati di futures e opzioni*, Il Sole 24 ORE, 2002

[5] Hull J.C., *Opzioni, futures e altri derivati*, Il Sole 24 ORE, 2003

[6] Pascucci A., *File Matlab con simulazione MonteCarlo*, http://www.dm.unibo.it/∼pascucci/web/Didattica/EconMat/montecarlo.zip

[7] Pianca P., *Opzioni esotiche*, dispensa di Matematica Finanziaria, http://caronte.dma.unive.it/∼pianca/

[8] Zhang P., *Exotic Option*, World Scientific, 1997