Università degli Studi di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

MOTO BROWNIANO
E OPERATORE DI LAPLACE

Tesi di Laurea in
Matematica per le applicazioni economiche e finanziarie

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Marco Di Francesco

Parole chiave: Moto Browniano, Processi di Markov, Operatore di Laplace, Problema di Dirichlet, Teoria del potenziale

I Sessione
Anno Accademico 2001-2002

Indice

INTRODUZIONE **5**

NOTAZIONI **9**

1 ELEMENTI DI CALCOLO DELLA PROBABILITÀ **11**

1.1 Variabili aleatorie 11

1.2 Valore atteso e indipendenza 15

1.3 Attesa condizionata 18

1.4 Processi stocastici e proprietà di Markov 24

2 MOTO BROWNIANO **31**

2.1 Misure di Gauss 31

2.2 Moto Browniano 35

2.3 Proprietà di Markov del moto Browniano 44

2.4 Proprietà di Markov forte 49

3 PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'OPERATORE DI LAPLACE **57**

3.1 Funzioni armoniche 57

3.2 Soluzione generalizzata del problema di Dirichlet 66

3.3 Dato al bordo 73

3.4 Ricorrenza e transitorietà del moto Browniano. Punti irregolari. 81

A RICHIAMI DI TEORIA DELLA MISURA **91**
A.1 Teoremi di Dynkin 91
A.2 Teorema di estensione di Carathéodory 95
A.3 Teorema di Lebesgue-Nikodym-Radon 113

BIBLIOGRAFIA **123**

INDICE ANALITICO **125**

INTRODUZIONE

Il moto Browniano è il modello probabilistico del moto caotico di una particella nello spazio. Il suo nome deriva dal botanico inglese Robert Brown, che, nel 1828, per primo osservò il movimento continuo ed irregolare di pollini in soluzione acquose. Tale movimento fu interpretato come conseguenza degli urti che i pollini ricevevano dalle molecole sottoposte ad agitazione termica. Lo studio del moto Browniano iniziò con Bachelier nel 1900 e Einstein nel 1905. Il primo usò il moto Browniano come modello dei prezzi di alcuni titoli ed obbligazioni quotati in borsa, e studiò vari metodi di copertura da rischi di fluttuazioni. Il secondo diede un contributo fondamentale allo studio del moto Browniano. Nel 1905 Einstein pubblicò un articolo dal titolo "On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular kinetic theory of heat" [4], in cui diede una spiegazione in termini di teoria cinetica dei gas del moto Browniano. Nell'articolo si legge: "*In questo lavoro faremo vedere come, secondo la teoria cinetico-molecolare del calore, particelle in sospensione in una soluzione acquosa compiano, in conseguenza del moto termico delle molecole, movimenti di ampiezza tale che li si può agevolmente osservare al microscopio, purchè, beninteso, la dimensione delle particelle stesse sia accessibile allo strumento. Può darsi che i moti considerati coincidano con il cosiddetto moto molecolare Browniano.*"

Fu Wiener nel 1923 [11] il primo a dare una formulazione matematica rigorosa del moto Browniano, definendolo come una misura sullo spazio delle curve continue. L'anno seguente, Wiener [12] si occupò anche della risolubilità del problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace. Tale problema era stato posto da Gauss nel 1840. Contrariamente a quanto pensava Gauss, il problema di Dirichlet non è sempre risolubile, come mostrarono, con alcuni esempi, Zaremba nel 1909 e Lebesgue nel 1913 (si veda anche l'Esempio 3.14). Tuttavia, nel 1924, Wiener [12] introdusse una nozione di soluzione generalizzata del problema di Dirichlet su un dominio D. Egli provò che tale soluzione esiste sempre e, sotto opportune condizioni sulla regolarità della frontiera di D, risolve il problema in senso classico. Wiener non notò alcuna connessione tra il problema di Dirichlet e il moto Browniano (che pure era stato oggetto dell'articolo [11] dell'anno precedente).

Tale connessione fu per la prima volta messa in luce da Kakutani nel 1944 [5] e poi da Doob nel 1954 [7]. Nell'articolo intitolato "*Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions*", Kakutani indagò le proprietà del moto Browniano in due dimensioni e applicò i risultati ottenuti alla teoria delle funzioni armoniche di due variabili. Nell'articolo si legge: "*Ci si aspetta che, molti dei ben noti risultati nella teoria delle funzioni armoniche o analitiche possano essere interpretate dal punto di vista della teoria delle probabilità*". L'autore rimanda, tuttavia, a lavori successivi lo studio della connessione tra il moto Browniano e il problema di Dirichlet in dimensione maggiore di due. Da allora si è sviluppata un'ampia letteratura sulla teoria del potenziale, realizzata con tecniche probabilistiche. Tra i maggiori lavori spiccano quelli di Hunt, Dynkin, Blumenthal e Itô.

Scopo di questo lavoro è dare una presentazione dei risultati di Wiener con metodi probabilistici. In particolare dimostreremo due criteri di regolarità della frontiera. Il primo è il classico criterio del cono esterno. Mostreremo anche il cosiddetto criterio del "cono piatto". Quest'ultimo afferma che, un punto z del bordo di un dominio D in $\mathbb{R}^N$ è regolare per D se esiste un cono $(N-1)$-dimensionale di vertice z contenuto nel complementare di D.

La tesi è strutturata nel modo seguente. Nel primo capitolo, per completezza di esposizione, presentiamo i primi concetti della teoria della probabilità e introduciamo i processi di Markov. Dimostriamo, e questo sarà il risultato più importante del primo capitolo, il Teorema di Kolmogorov del-

l'attesa condizionata.
Nel secondo capitolo definiamo la misura di Gauss ed enunciamo il noto Teorema di estensione di Kolmogorov, che sarà utilizzato nella costruzione del moto Browniano canonico. Introduciamo lo spazio di Wiener e concludiamo il capitolo, provando alcune proprietà del moto Browniano, in particolare le proprietà di Markov debole e forte.
Nell'ultimo capitolo, studiamo il problema di Dirichlet, con tecniche probabilistiche. Introduciamo la nozione di soluzione generalizzata e proviamo i criteri del cono esterno e del "cono piatto" per la regolarità dei punti al bordo. Prima di fare ciò, richiamiamo alcuni ben noti risultati sulle funzioni armoniche e sulla teoria classica del problema in questione. Nell'ultima sezione, dimostriamo l'equivalenza tra la nozione probabilistica e quella classica di punto regolare. Per fare ciò utilizziamo alcuni ulteriori risultati sulle traiettorie browniane.
Al fine di rendere l'esposizione autosufficiente e nel contempo per alleggerire la lettura, tutti i risultati di teoria della misura utilizzati nei precedenti capitoli, sono stati raccolti nell'appendice.

NOTAZIONI

- $\mathbb{R}^N$ spazio euclideo N-dimensionale;
- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ reali non negativi;
- $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow x_j \in \mathbb{R}$ per ogni $j = 1, \ldots, N$;
- $\|x\| = \big(\sum_{j=1}^{N} x_j^2\big)^{\frac{1}{2}}$ norma euclidea;
- $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j$ prodotto scalare euclideo;
- $m\mathcal{F}$ spazio delle funzioni misurabili (cfr. Def A.23);
- $m\mathcal{F}^+$ spazio delle funzioni misurabili non negative;
- $b\mathcal{F}$ spazio delle funzioni misurabili e limitate;
- $f^+ = \max(0, f)$ parte positiva di f;
- $f^- = \max(0, -f)$ parte negativa di f;
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ σ-algebra generata dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^N$ (borelliani di $\mathbb{R}^N$);
- $A^c = \{x \mid x \notin A\}$ complementare di A;
- $A \setminus B = A \cap B^c$;
- $d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ distanza di x da A, $A \subseteq \mathbb{R}^N$;

- $\partial A = \{x \mid d(x, A) = d(x, A^c) = 0\}$ frontiera di A;
- $\overline{A} = A \cup \partial A$ chiusura di A;
- $int(A) = A \setminus \partial A$ interno di A;
- $A_n \uparrow A$, allora $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq \ldots$ e vale $\cup_{n\geq 1} A_n = A$;
- $A_n \downarrow A$, allora $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots A_n \supseteq \ldots$ e vale $\cap_{n\geq 1} A_n = A$;
- $\limsup A_n$ indichiamo

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} A_n &= \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} A_n \\ &= \{w \mid \forall\, m,\ \exists\, n \geq m \text{ tale che } w \in A_n\} \\ &= \{w \mid w \in A_n \text{ per infiniti } n\};\end{aligned}$$

- $\liminf A_n$ indichiamo

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} A_n &= \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} A_n \\ &= \{w \mid \exists\, m = m(w) \text{ tale che } w \in A_n,\ \forall\, n \geq m\};\end{aligned}$$

- 1_A funzione caratteristica di A, ossia

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A; \end{cases}$$

- $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - x_0\| < r\}$ palla euclidea di centro $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e raggio $r > 0$;
- H_N misura di Hausdorff N-dimensionale.

Capitolo 1

ELEMENTI DI CALCOLO DELLA PROBABILITÀ

In questo capitolo, per completezza di esposizione, richiamiamo alcuni concetti basilari della teoria della probabilità. Dimostriamo il noto Teorema di Kolmogorov dell'attesa condizionata, che sarà il risultato più importante del capitolo. Infine introduciamo i processi stocastici e la proprietà di Markov.

1.1 Variabili aleatorie

Definizione 1.1 (Spazio di probabilità). *Uno spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *si dice spazio di probabilità se* $P(\Omega)$*=1. In tal caso* P *viene chiamata misura di probabilità.*

Le funzioni misurabili definite su uno spazio di probabilità vengono chiamate variabili aleatorie e saranno indicate con X. Si può pensare a una variabile aleatoria come al risultato di un esperimento casuale, e alla probabilità che X prenda valori in un insieme dato $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, come a

$$P(X \in A) = P\{w \mid X(w) \in A\} = P(X^{-1}(A)).$$

Definizione 1.2 (Variabili aleatorie). *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *uno spazio di probabilità. Una funzione* $X \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *si dice variabile aleatoria.*

Definizione 1.3 (Legge di una variabile aleatoria). *Sia X una variabile aleatoria. Si chiama legge di X la seguente misura su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$:*

$$\mu_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to [0,1],$$

definita da

$$\mu_X(H) = P(X \in H), \quad H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Osservazione 1.4. Sia X una variabile aleatoria a valori reali. Sia μ_X la sua legge. La funzione

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

definita da

$$F_X(c) := \mu_X((-\infty, c]) = P(X \leq c) = P(\{w : X(w) \leq c\}), \ c \in \mathbb{R},$$

gode delle seguenti proprietà:

- F_X è crescente;
- F_X è continua a destra, nel senso che

  $$\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a),$$

  per ogni a reale;
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

La funzione F_X viene chiamata funzione di distribuzione di X. La legge μ_X è la misura di Lebesgue-Stieltjes (vedi Appendice) relativa a F_X. Infatti, indichiamo con μ_F la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a F_X. Si ha che, per $a < b$

$$\mu_F(]a,b]) = F_X(b) - F_X(a) = \mu_X((-\infty, b]) - \mu_X((-\infty, a]) = \mu_X((a,b]).$$

Dunque la tesi segue dalla Proposizione A.15, poiché

$$\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$$

è $\cap$-stabile e genera $\mathcal{B}$.

Osservazione 1.5. Sia F una funzione con le proprietà dell'Osservazione 1.4. Allora esiste, ma non è unica, una variabile aleatoria, nello spazio $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ indica la misura di Lebesgue, che ha come funzione di distribuzione proprio F.

Dimostrazione. Basta considerare

$$X^+(w) := \inf\{z \mid F(z) > w\},$$

e

$$X^-(w) := \inf\{z \mid F(z) \geq w\}.$$

Si dimostra che le due variabili aleatorie hanno F come funzione di distribuzione e che sono uguali quasi dappertutto. Dimostriamo che X^- ha proprio F come funzione di distribuzione. Per X^+ la dimostrazione è analoga. Dalla definizione di X^- si ha

$$(w \leq F(c)) \Rightarrow (X^-(w) \leq c).$$

D'altra parte abbiamo che

$$(z > X^-(w)) \Rightarrow (F(z) \geq w),$$

ma dalla continuità a destra di F, $F(X^-(w)) \geq w$, così che

$$(X^-(w) \leq c) \Rightarrow (w \leq F(X^-(x)) \leq F(c)).$$

Allora abbiamo ottenuto che $(w \leq F(c)) \Leftrightarrow (X^-(w) \leq c)$, che implica

$$\mathcal{L}(X^- \leq c) = F(c).$$

Dimostriamo ora che X^- e X^+ sono uguali quasi dappertutto.
Dalla definizione di X^+ si ha che

$$(w < F(c)) \Rightarrow (X^+(w) \leq c),$$

così che $F(c) \leq \mathcal{L}(X^+ \leq c)$. Poiché $X^- \leq X^+$, è chiaro che

$$\{X^- \neq X^+\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{X^- \leq q < X^+\}.$$

Ma per ogni c reale si ha che

$$\mathcal{L}(X^- \leq c < X^+\} = \mathcal{L}(\{X^- \leq c\} \setminus \{X^+ \leq c\}) \leq F(c) - F(c) = 0.$$

Essendo $\mathbb{Q}$ numerabile, si ha la tesi. □

Teorema 1.6. *Sia $X \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, e $f \in m\mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Indichiamo con μ_X la legge di X. Allora*

$$f \circ X \in L^1(\Omega, P) \Leftrightarrow f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mu_X),$$

e in tal caso vale

$$\int_\Omega f(X(w))P(dw) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\mu_X(dy).$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione, utilizziamo una tecnica, chiamata **metodo standard**, utile e molto usata. Questa tecnica si articola in diversi passi di approssimazione: prima si dimostra la validità della tesi per le funzioni caratteristiche, quindi, sfruttando la linearità dell'integrale, per le funzioni semplici. Si considerano poi le funzioni misurabili a valori non negativi: esse sono sempre limite di una successione crescente di funzioni semplici. Avendo dimostrato la validità del teorema per le funzioni semplici, applicando il teorema di Beppo-Levi si ha la tesi anche per le funzioni misurabili a valori non negativi. Infine si utilizza la scomposizione di ogni funzione misurabile in parte positiva e parte negativa. Essendo quest'ultime misurabili e a valori non negativi, si utilizza ancora una volta la linearità dell'integrale per dimostrare la validità del teorema per le funzioni misurabili.
Sia $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Posto $f = 1_H$ si ha che $f(X)$ è misurabile, in quanto composizione di funzioni misurabili, ma anche limitata in quanto 1_H lo è. Allora $f(X) \in L^1(\Omega, P)$, poiché

$$0 \leq \int_\Omega f(X)\mathrm{d}P \leq P(\Omega) = 1.$$

Osserviamo che, essendo μ_X una misura di probabilità ed essendo f misurabile e limitata, si ha che $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mu_X)$. Infatti

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_X \leq \mu(\mathbb{R}^N) = 1.$$

Inoltre vale

$$\int_\Omega 1_H(X(w))P(dw) = P(X \in H) = \mu_X(H) = \int_{\mathbb{R}^N} 1_H(y)\mu_X(dy).$$

In altre parole il teorema vale per le funzioni caratteristiche, e quindi il primo passo è dimostrato. Per linearità dell'integrale vale anche quando f è semplice. Sia, ora, $f \in m\mathcal{B}^+$. Sia (φ_n) una successione crescente di funzioni semplici non negative tali che $\varphi_n \uparrow f$ per $n \to +\infty$. Utilizzando il teorema di Beppo-Levi si ha che

$$\int_\Omega \varphi_n(X)dP \uparrow \int_\Omega f(X)dP,$$

e si ha anche che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n \mathrm{d}\mu_X \uparrow \int_{\mathbb{R}^N} f\mathrm{d}\mu_X.$$

Per l'unicità del limite si ha la tesi per le funzioni misurabili a valori non negativi. Infine, sia f $\in L^1(\mathbb{R}^N, \mu_x)$. Allora $f = f^+ - f^-$ con f^+ e f^- sommabili e a valori positivi. Per quanto dimostrato prima, il teorema vale per f^+ e per f^-. Sfruttando la linearità dell'integrale si ha la tesi. □

1.2 Valore atteso e indipendenza

In questa sezione illustriamo due concetti fondamentali del calcolo delle probabilità. Nel seguito indicheremo con $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità. Cominciamo con la seguente definizione.

Definizione 1.7 (Evento). *Ogni insieme misurabile, cioè ogni elemento di $\mathcal{F}$, si dice evento.*

In altre parole, un evento è un sottoinsieme dei risultati possibili di un esperimento casuale di cui si può calcolare la probabilità. È chiaro che l'unione e l'intersezione di eventi è ancora un evento, ma anche il complementare di un evento è un evento. La probabilità dell'unione di due eventi, è la probabilità che almeno uno dei due si verifichi, mentre la probabilità dell'intersezione è la probabilità che si verifichino entrambi. La probabilità del complementare è la probabilità che l'evento non si verifichi.

Definizione 1.8 (Probabilità condizionata). *Sia $A \in \mathcal{F}$ con $P(A) > 0$. La seguente misura di probabilità, $P(\cdot|A)$, definita da*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad B \in \mathcal{F},$$

si dice probabilità condizionata su A.

In altre parole, la probabilità condizionata è la probabilità che B si verifichi dopo che A si è verificato. Due eventi A e B si dicono indipendenti se la probabilità che B si verifichi non dipende dal verificarsi o meno di A. Diamo ora la definizione rigorosa. Introduciamo la seguente notazione.

Notazione 1.9. *Data $X \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ una variabile aleatoria. Indichiamo con $\sigma(X)$ la $\sigma-$algebra generata da X, precisamente*

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}).$$

Chiaramente $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$ e $\sigma(X)$ è la più piccola $\sigma-$algebra rispetto alla quale X è misurabile.

Osservazione 1.10. Osserviamo che

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}).$$

Definizione 1.11 (Indipendenza). *Si dice che:*

- *due eventi A e B sono indipendenti se $P(A \cap B) = P(B)P(A)$;*
- *due $\sigma-$algebre, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ si dicono indipendenti se per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, A e B sono indipendenti;*
- *due variabili aleatorie X e Y si dicono indipendenti se lo sono $\sigma(X)$ e $\sigma(Y)$.*

Osservazione 1.12. Se $A, B \in \mathcal{F}$, con $P(A) > 0$, allora

$$A, B \text{ sono indipendenti } \Leftrightarrow P(B|A) = P(B).$$

Definizione 1.13 (Valore atteso). *Sia $X \in L^1(\Omega, P)$ una variabile aleatoria. Il valor atteso di X è definito da:*

$$E(X) := \int_\Omega X(w)P(\mathrm{d}w).$$

Osservazione 1.14. Per il Teorema 1.6 abbiamo che

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^N} y\mu_X(\mathrm{d}y).$$

Notazione 1.15. *Sia X una variabile aleatoria in $L^1(\Omega, P)$. Sia A un evento. Indichiamo con*

$$E(X; A) := E(X1_A) = \int_A X\mathrm{d}P.$$

Proposizione 1.16. *Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti, $X, Y \in L^1(\Omega, P)$. Allora $XY \in L^1$ e vale*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Dimostrazione. Utilizzando il metodo standard (cfr. dimostrazione del Teorema 1.6) è sufficiente considerare il caso in cui X e Y siano funzioni caratteristiche. Poniamo $X = 1_A$ e $Y = 1_B$, con A e $B \in \mathcal{F}$. Allora

$$E(XY) = \int_\Omega 1_A 1_B \mathrm{d}P = P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

essendo A e B indipendenti. □

Proposizione 1.17. *Siano $X \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$ e $Y \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^{N_2})$ due variabili aleatorie reali indipendenti, $f \in m\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_3})$ e $g \in m\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N_2}, \mathbb{R}^{N_4})$. Allora $f \circ X$ e $g \circ Y$ sono variabili aleatorie indipendenti.*

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dal fatto che, essendo $f, g \in m\mathcal{B}$, si ha

$$\sigma(f \circ X) \subseteq \sigma(X),$$

e analogamente

$$\sigma(g \circ Y) \subseteq \sigma(Y).$$

Essendo per ipotesi, $\sigma(X)$ e $\sigma(Y)$ indipendenti, si ha la tesi. □

Proposizione 1.18. *Siano* $X \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *e* $Y \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^M)$ *due variabili aleatorie. Sia* $X \in m\sigma(Y)$. *Allora esiste* $\varphi \in m\mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ *tale che* $X = \varphi(Y)$.

Dimostrazione. Per il Teorema A.25 è sufficiente considerare il caso $N = 1$. Inoltre, si può supporre $X \in b\sigma(Y)$. In caso contrario, infatti, basta considerare la variabile aleatoria $\arctan(X)$. Utilizziamo il secondo teorema di Dynkin. Poniamo

$$\mathcal{H} = \{Z \in b\sigma(Y) \mid \exists\, \varphi \in b\mathcal{B} \text{ tale che } Z = \varphi(Y)\}.$$

È facile verificare che $\mathcal{H}$ soddisfa le ipotesi del secondo teorema di Dynkin. $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale. Inoltre $\mathcal{H}$ contiene la funzione costante 1, e verifica anche l'ultima proprietà richiesta dal teorema di Dynkin: se (Z_n) è una successione crescente e non negativa di funzioni in $\mathcal{H}$, con limite $Z \in b\mathcal{B}$, allora $Z \in \mathcal{H}$. Infatti poiché $Z_n \in \mathcal{H}$ abbiamo che $Z_n = \varphi_n(Y)$, con $\varphi_n \in m\mathcal{B}$. Posto $\varphi = \sup \varphi_n$, si ha che $\varphi \in m\mathcal{B}$ e inoltre vale

$$Z \uparrow Z_n = \varphi_n(Y) \uparrow \varphi(Y).$$

Per l'unicità del limite si ha che $Z = \varphi(Y)$, e $\varphi \in b\mathcal{B}$. Questo dimostra che $Z \in \mathcal{H}$.
Poiché $\mathcal{H}$ contiene le funzioni caratteristiche di elementi di $\sigma(Y)$, per il teorema di Dynkin si ha

$$\mathcal{H} = b\sigma(Y).$$

Questo conclude la prova. $\square$

1.3 Attesa condizionata

Introduciamo il concetto di attesa condizionata. D'ora in poi sarà utile considerare una $\sigma - algebra$ come un accumulo di informazioni. Intuitivamente, l'attesa condizionata esprime il valore più probabile di una data variabile aleatoria in base alle informazioni possedute.

Formuliamo il seguente fondamentale teorema, provato da **Kolmogorov** nel 1933.

Teorema 1.19 (Attesa condizionata). *Sia $X \in L^1(\Omega, P)$ e sia $\mathcal{G}$ una $\sigma-algebra$ contenuta in $\mathcal{F}$. Allora esiste una variabile aleatoria Y tale che:*

1. *$Y \in m\mathcal{G}$;*
2. *$Y \in L^1(\Omega, P)$;*
3. *per ogni $G \in \mathcal{G}$ si ha*
$$\int_G Y dP = \int_G X dP.$$

Inoltre se Z è una variabile aleatoria con le proprietà 1. 2. 3., allora Z=Y quasi sicuramente, cioè P(Y=Z)=1. Una variabile aleatoria con le proprietà 1. 2. 3. si chiama versione dell'attesa condizionata di X su $\mathcal{G}$ e si indica con $E(X|\mathcal{G})$.

Diamo due dimostrazioni del precedente teorema: la prima è diretta conseguenza del Teorema di Lebesgue-Nikodym-Radon.

Dimostrazione. Per la linearità dell'integrale, è sufficiente considerare il caso $X \geq 0$. Poniamo
$$\nu(G) = \int_G X dP, \quad G \in \mathcal{G}.$$
Verifichiamo che ν è una misura definita su $\mathcal{G}$.
Si ha che $\nu(\emptyset) = 0$. Sia ora $(A_n) \in \mathcal{G}$ una successione in $\mathcal{G}$ di insiemi disgiunti. Abbiamo che
$$\nu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \int_{\bigcup_{n\geq 1} A_n} X dP = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} X(w) dP = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n).$$
Chiaramente ν è P-assolutamente continua.
Allora, per il teorema di Lebesgue-Nikodym-Radon, esiste un'unica funzione Y $\in m\mathcal{G}$, che appartiene a $L^1(\Omega, P)$ tale che
$$\int_G Y dP = \nu(G) = \int_G X dP.$$
per ogni $G \in \mathcal{G}$. $\square$

Forniamo un'altra dimostrazione del teorema, basata sul fatto che, come vedremo, nel caso particolare in cui $X \in L^2(\Omega, P)$, l'attesa condizionata di X su $\mathcal{G}$, $E(X|\mathcal{G})$, coincide con la proiezione di X sullo spazio delle variabili aleatorie $\mathcal{G}$-misurabili e di quadrato sommabile.

Proposizione 1.20. *Sia $X \in L^2(\Omega, P)$, e $\mathcal{G}$ una $\sigma-$ algebra contenuta in $\mathcal{F}$. Consideriamo lo spazio di Hilbert $L^2(\mathcal{F})$ delle funzioni $\mathcal{F}$-misurabili di quadrato sommabile. In questo caso, l'attesa condizionata $E(X|\mathcal{G})$ è la proiezione di X su $L^2(\mathcal{G})$. In termini probabilistici, $E(X|\mathcal{G})$ è la variabile aleatoria che minimizza l'errore quadratico medio $E(|X-Y|^2)$.*

Dimostrazione. Essendo $L^2(\mathcal{G})$ un sottospazio chiuso di $L^2(\mathcal{F})$, per il Teorema della proiezione ortogonale, esiste ed è unica la variabile aleatoria Y in $L^2(\mathcal{G})$ tale che

$$E(|X-Y|^2) = \inf\{E(|X-W|^2) \mid W \in L^2(\mathcal{G})\},$$

e inoltre

$$\langle X-Y, Z\rangle = 0, \tag{1.1}$$

per ogni $Z \in L^2(\mathcal{G})$. Ora, posto $Z = 1_G \in L^2(\mathcal{G})$, per $G \in \mathcal{G}$, da (1.1) si ha che

$$E(Y;G) = E(X;G).$$

Allora Y è una versione dell'attesa condizionata di X su $\mathcal{G}$. □

Questa proposizione dimostra l'esistenza e l'unicità dell'attesa condizionata nel caso in cui $X \in L^2(\mathcal{F})$. Illustriamo ora una proprietà dell'attesa condizionata.

Osservazione 1.21 (Positività). Sia $X \in L^2(\mathcal{F})$, $X \geq 0$ una variabile aleatoria. Allora $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$.

Dimostrazione. Sia Z una versione dell'attesa condizionata di X su $\mathcal{G}$. Supponiamo, per assurdo che che $P(Z<0)>0$. Allora per qualche n, l'insieme $W = \{Z < -n^{-1}\} \in \mathcal{G}$ e ha probabilità positiva. Allora abbiamo che

$$0 \leq E(X;W) = E(Z;W) < -n^{-1}P(W) < 0,$$

e ciò è un assurdo. □

Siamo ora in grado di fornire una dimostrazione alternativa del Teorema 1.19.

Dimostrazione. (del Teorema 1.19). Sia $X \in L^1(\mathcal{F})$. Per la linearità dell'integrale, possiamo supporre $X \geq 0$. Esiste una successione crescente di funzione semplici non negative (X_n) che convergono a X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $X_n \in L^2$, e quindi, per la Proposizione 1.20, esiste Y_n versione dell'attesa condizionata $E(X_n|\mathcal{G})$. Per l'Osservazione 1.21, abbiamo che $Y_n \geq 0$, e (Y_n) è una successione monotona crescente e convergente a

$$Y = \sup Y_n.$$

con $Y \in m\mathcal{G}$. Utilizzando il Teorema di Beppo-Levi e sfruttando l'unicità del limite, abbiamo che

$$E(Y; G) = E(X; G)$$

per ogni $G \in \mathcal{G}$. Dunque Y è una versione dell'attesa condizionata $E(X|\mathcal{G})$. Rimane da dimostrare l'unicità di Y.
Supponiamo per assurdo che Z sia un'altra versione dell'attesa condizionata tale che $P(Y > Z) > 0$. Poiché $(Y > Z) = \bigcup_{n\geq 1}(Y - Z > n^{-1})$, esiste $n \in \mathbb{N}$, tale che $P(Y - Z > n^{-1}) > 0$. Inoltre $(Y - Z > n^{-1}) \in \mathcal{G}$ perché $Y, Z \in \mathcal{G}$. Allora

$$E(Y - Z; Y - Z > n^{-1}) \geq n^{-1} P(Y - Z > n^{-1}) > 0,$$

che è un assurdo, poiché per linearità abbiamo che $E(Y - Z|G) = 0$ per ogni $G \in \mathcal{G}$. □

Osservazione 1.22. Come anticipato all'inzio della sezione, l'attesa condizionata esprime il valore più prevedibile della variabile aleatoria X, con tutte le informazioni che si hanno a conoscenza. E' utile, infatti, pensare alla $\sigma - algebra$ $\mathcal{G}$ come ad un accumulo di informazioni disponibili. I prossimi due esempi ci aiutano a capire meglio questa interpretazione.

Esempio 1.23. Se $X \in m\mathcal{G} \cap L^1$, allora $E(X|\mathcal{G}) = X$. Possiamo dare la seguente interpretazione: se X è misurabile rispetto a $\mathcal{G}$ significa che sappiamo tutto di X, e quindi il valore più prevedibile di X è X stesso.

Esempio 1.24. Se X è indipendente da $\mathcal{G}$, cioè se $\mathcal{G}$ e $\sigma(X)$ sono $\sigma - algebre$ indipendenti, allora per la Proposizione 1.16, si ha $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$. In altri termini, le informazioni contenute in $\mathcal{G}$ non sono utili per determinare il valore più prevedibile della X.

Notazione 1.25. *Siano $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Si pone*

$$P(A|\mathcal{F}) = E(1_A|\mathcal{G}).$$

Analogamente, dati $X \in L^1(\Omega, P)$, $A \in \mathcal{F}$ e Y una variabile aleatoria, si pone

$$E(X|Y) = E(X|\sigma(Y)),$$

e

$$P(A|Y) = E(1_A|\sigma(Y)).$$

Dimostriamo, ora, alcune proprietà dell'attesa condizionata, che saranno molto utili in seguito.

Teorema 1.26 (Proprietà dell'attesa condizionata). *Siano $X, Y \in L^1(\Omega, P)$. Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ σ-algebre contenute in $\mathcal{F}$. Allora:*

1. *(linearità) per ogni a e b costanti reali*

$$E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G});$$

2. *(positività) se $X \geq 0$ allora $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$;*

3. *(monotonia) se $X \leq Y$ allora $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$;*

4. *(convergenza monotona) se (X_n) è una successione crescente di variabili aleatorie non negative e convergenti a X, allora*

$$E(X_n|\mathcal{G}) \uparrow E(X|\mathcal{G});$$

5. *(proprietà della torre) se* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ *allora*

$$E(X|\mathcal{G}) = E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G});$$

6. *se* $Y \in b\mathcal{G}$ *allora* $E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$*;*

7. $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$*.*

Dimostrazione. la (**1**) e la (**7**) sono banali.
La (**2**) l'abbiamo dimostrata nell'Osservazione 1.21.
Dimostriamo ora la (**3**). Per la positività appena dimostrata, abbiamo che, se $X \leq Y$, allora $E(Y - X|\mathcal{G}) \geq 0$. Per linearità abbiamo

$$E(Y - X|\mathcal{G}) = E(Y|\mathcal{G}) - E(X\mathcal{G}),$$

e questo dimostra la monotonia.
Dimostriamo ora la (**4**). Per la (2) abbiamo che $(E(X_n|\mathcal{G}))$ è una successione crescente di variabili aleatorie non negative. Sia $Y = \sup E(X_n|\mathcal{G})$. Certamente Y è misurabile rispetto a $\mathcal{G}$ e inoltre, utilizzando Beppo-Levi, si ha che per ogni $G \in \mathcal{G}$

$$\int_G XdP \ \uparrow \ \int_G X_n dP = \int_G E(X_n|\mathcal{G})dP \ \uparrow \ \int_G YdP$$

dove i limiti sono da intendersi per $n \to +\infty$. Per l'unicità del limite si ha $Y = E(X|\mathcal{G})$.
Proviamo ora la (**5**).
La prima uguaglianza è banale in quanto $E(X|\mathcal{G}) \in m\mathcal{H}$. Inoltre essendo $E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) \in m\mathcal{G}$ e si ha che

$$\int_G E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G})dP = \int_G E(X|\mathcal{H})dP = \int_G XdP = \int_G E(X|\mathcal{G})dP,$$

per ogni $G \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Dunque

$$E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}).$$

Per dimostrare la (**6**) si procede con il metodo standard. Possiamo assume $X \geq 0$. Se $Y = 1_G$ con $G \in \mathcal{G}$, allora si ha $YE(X|\mathcal{G}) \in m\mathcal{G}$ e

$$\int_H YE(X|\mathcal{G})dP = \int_{H\cap G} E(X|\mathcal{G})dP = \int_{H\cap G} XdP = \int_H XYdP.$$

Essendo ciò valido per ogni $G \in \mathcal{G}$, si ha che

$$YE(X|\mathcal{G}) = E(XY|\mathcal{G}).$$

Avendo dimostrato la proprietà per le funzioni caratteristiche, si procede con il metodo standard per dimostrarne la validità per ogni Y limitata e misurabile rispetto a $\mathcal{G}$, utilizzando la proprietà di convergenza monotona precedentemente dimostrata.

□

1.4 Processi stocastici e proprietà di Markov

Introduciamo ora la nozione di processo stocastico. È un modello matematico di un fenomeno aleatorio che si evolve nel tempo. Nel seguito, indicheremo con $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di probabilità.

Definizione 1.27 (Processo stocastico). *Una famiglia $(X_t)_{t\in[0,+\infty[}$ di variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}^N$ si dice processo stocastico.*

Definizione 1.28 (Filtrazione). *Una famiglia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ crescente di $\sigma-$algebre contenute in $\mathcal{F}$ si chiama filtrazione associata a $\mathcal{F}$. Un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$, si dice adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se $X_t \in m\mathcal{F}_t$ per ogni $t \geq 0$.*

Esempio 1.29. Sia (X_t) un processo stocastico. Poniamo

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s \mid 0 \leq s \leq t) := \sigma(\{X_s^{-1}(H) \mid H \in \mathcal{B} \text{ e } s \in [0,t]\});$$

$$\mathcal{F}_t^1 = \sigma(X_s \mid s \geq t) := \sigma(\{X_s^{-1}(H) \mid H \in \mathcal{B} \text{ e } s \in [t,+\infty[\}).$$

Si ha che $\mathcal{F}_t^0$ è la più piccola filtrazione rispetto alla quale (X_t) è adattato e viene anche chiamata filtrazione naturale associata a (X_t).

Interpretando una $\sigma - algebra$ come un accumulo di informazioni, $\mathcal{F}_t^0$, rappresenta le informazioni possedute fino al tempo t, spesso chiamate “passato”, mentre $\mathcal{F}_t^1$ rappresenta il “futuro”.

Osservazione 1.30. Sia $(\mathcal{F}_t)$ una filtrazione, allora $m\mathcal{F}_s \subseteq m\mathcal{F}_t$ per $s \leq t$.

Formuliamo ora la proprietà di Markov.

Definizione 1.31 (Proprietà di Markov). *Sia (X_t) un processo stocastico adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)$. Si dice che (X_t) soddisfa la proprietà di Markov se*

$$E(f(X_{t+h})|\mathcal{F}_t) = E(f(X_{t+h})|X_t),\ \forall f \in b\mathcal{B} \text{ e } t, h \geq 0. \tag{1.2}$$

Il prossimo teorema fornisce alcune versioni equivalenti della proprietà di Markov. In altri termini, un processo stocastico verifica la proprietà di Markov se verifica una delle seguenti condizioni.

Teorema 1.32. *Sia (X_t) un processo stocastico adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)$. La proprietà di Markov è equivalente ad ognuna delle seguenti:*

1. $P(A|\mathcal{F}_t^1) = P(A|X_t)$ *per ogni* $A \in \mathcal{F}_t$ *e* $t \geq 0$;
2. $P(A \cap B|X_t) = P(A|X_t)P(B|X_t)$ *per ogni* $A \in \mathcal{F}_t$ *e* $B \in \mathcal{F}_t^1$ *e* $t \geq 0$;
3. $P(B|\mathcal{F}_t) = P(B|X_t)$ *per ogni* $B \in \mathcal{F}_t^1$ *e* $t \geq 0$;
4. $E(Y|\mathcal{F}_t) = E(Y|X_t)$ *per ogni* $Y \in b\mathcal{F}_t^1$;
5. $E(f(X_{t+h})|\mathcal{F}_t) = E(f(X_{t+h})|X_t)$ *per ogni* $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^N)$ *e* $t, h \geq 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'equivalenza tra la (2) e la (3). Tra la (1) e la (3) si fa allo stesso modo.
Dimostiamo che (3) $\Rightarrow$ (2). Utilizzando le proprietà dell'attesa condizionata, si ha che

$$P(A \cap B|X_t) = E(1_A 1_B|X_t) = E(E(1_A 1_B|\mathcal{F}_t)|X_t),$$

poiché $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$. Ora poiché $1_A \in m\mathcal{F}_t$ si ha

$$E(E(1_A 1_B|\mathcal{F}_t)|X_t) = E(1_A E(1_B|\mathcal{F}_t)|X_t).$$

Ma per ipotesi

$$E(1_B|\mathcal{F}_t) = E(1_B|X_t),$$

e allora

$$E(1_A E(1_B|\mathcal{F}_t)|X_t) = E(1_A E(1_B|X_t)|X_t).$$

Sfruttando ancora il fatto che $E(1_B|X_t) \in m\mathcal{F}_t$ si ha che

$$E(1_A E(1_B|X_t)|X_t) = E(1_A|X_t)E(1_B|X_t) = P(A|X_t)P(B|X_t).$$

Dimostriamo ora che (2) $\Rightarrow$ (3). Essendo $P(B|X_t) \in m\mathcal{F}_t$, basta provare che, per ogni $A \in \mathcal{F}$, si ha

$$E(1_A P(B|X_t)) = P(A \cap B).$$

Utilizzando le proprietà dell'attesa condizionata si ha che

$$E(1_A P(B|X_t)) = E(E(1_A P(B|X_t)|X_t)) = E(P(B|X_t)P(A|X_t)),$$

poiché $P(B|X_t) \in m\mathcal{F}_t$. Utilizzando ora l'ipotesi si ha che

$$E(P(B|X_t)P(A|X_t)) = E(P(A \cap B|X_t)) = P(A \cap B).$$

Abbiamo così dimostrato che le prime tre sono equivalenti tra loro.
L'equivalenza tra la (3) e la (4) si prova con il metodo standard.
Dimostriamo ora l'equivalenza tra la (1.2) e la (5).
Chiaramente la (1.2) $\Rightarrow$ (5), poiché se $f \in \mathcal{C}_0$ allora $f(X_t) \in b\mathcal{B}$.
Proviamo ora che (5) $\Rightarrow$ (1.2).
Basta provare il tutto nel caso $N = 1$. Utilizziamo il secondo teorema di Dynkin. Poniamo

$$\mathcal{H} = \{f \in b\mathcal{B} \mid E(f(X_s|\mathcal{F}_t)) = E(f(X_s|X_t)) \text{ per } 0 \leq t \leq s\}.$$

Per le proprietà dell'attesa condizionata, $\mathcal{H}$ verifica le ipotesi del secondo teorema di Dynkin. Indichiamo con $\mathcal{E}$ la topologia euclidea. Essa è $\cap$-stabile e $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$. Rimane da provare che $1_H \in \mathcal{H}$ per ogni H $\in \mathcal{E}$.

Sia H$\in$ $\mathcal{E}$. Allora esiste (f_n), successione crescente di funzioni in C_0, con $f_n \geq 0$, convergenti alla funzione caratteristica di H. Infatti, basta considerare la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{d(x, \partial H)}{\frac{1}{n} + d(x, \partial H)} & \text{se } x \in H, \\ \\ 0 & \text{se } x \notin H. \end{cases}$$

dove $d(x, \partial H)$ indica la funzione distanza di x al bordo di H, ovvero la funzione

$$x \mapsto \inf\{d(x, y),\, y \in \partial H\}.$$

Poiché per le f_n vale il teorema per ipotesi, utilizziamo la proprietà di convergenza monotona dell'attesa condizionata. Si ha che

$$E(f_n(X_{t+h}|\mathcal{F}_t)) = E(f_n(X_{t+h}|X_t))$$

ma il primo membro converge a $E(1_H|\mathcal{F}_t)$, mentre il secondo membro converge a $E(1_H|X_t)$. Per l'unicità del limite si ha che $1_H \in \mathcal{E}$. Dunque $\mathcal{H} = b\mathcal{B}$. Dimostriamo ora l'equivalenza tra la (4) e la proprietà di Markov espressa dalla (1.2).

Prima di dimostrare questa equivalenza è necessario dimostrare due lemmi di carattere generale che ci serviranno anche in seguito.

Lemma 1.33. *Per ogni* $t \geq 0$

$$\Sigma_t^1 = \{\bigcap_{j=1}^{n}(X_{s_j} \in H_j) \mid t \leq s_1 < ... < s_n, H_j \in \mathcal{B}\},$$

è un semianello che genera $\mathcal{F}_t^1$*. Analogamente*

$$\Sigma_t = \{\bigcap_{j=1}^{n}(X_{s_j} \in H_j) \mid 0 \leq s_1 < ... < s_n \leq t, H_j \in \mathcal{B}\},$$

è un semianello che genera $\mathcal{F}_t^0$*.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima parte, la seconda si fa in modo analogo. Per semplicità useremo le seguenti notazioni:

$$\tau = (s_1, s_2, ..., s_n),\ t \leq s_1 < \ldots < s_n,$$

$$H = H_1 \times H_2 \times ... \times H_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{Nn}).$$

Allora abbiamo

$$\bigcap_{j=1}^{n} (X_{s_j} \in H_j) = (X_\tau \in H).$$

Notiamo che dati A e B $\in \Sigma_t^1$, esistono τ, H', H'' tali che

$$A = \{X_\tau \in H'\}, \ B = \{X_\tau \in H''\}.$$

Con questa osservazione, è semplice verificare che Σ_t^1 è un semianello e che $\sigma(\Sigma_t^1) = \mathcal{F}_t^1$. □

Lemma 1.34. *Supponiamo che valga la proprietà di Markov espressa dalla (1.2). Allora si ha:*

$$E(\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{s_j})|\mathcal{F}_t) = E(\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{s_j})|X_t)$$

per ogni $f_j \in b\mathcal{B}$, *per* $j = 1, \ldots, n$, *e* $t \leq s_1 < ... < s_n$.

Dimostrazione. Per induzione su n. Per $n = 1$ otteniamo la (1.2). Supposta vera per n, proviamola la validità della formula per $n + 1$. Siccome $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$, per $t \leq s$, abbiamo che

$$E(\prod_{j=1}^{n+1} f_j(X_{s_j})|\mathcal{F}_t) = E(E(\prod_{j=1}^{n+1} f_j(X_{s_j})|\mathcal{F}_{s_n})|\mathcal{F}_t).$$

Sfruttando il fatto che $\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{s_j}) \in m\mathcal{F}_{s_n}$, si ha che

$$E(E(\prod_{j=1}^{n+1} f_y(X_{s_j})|\mathcal{F}_{s_n})|\mathcal{F}_t) = E(\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{s_j})E(f_{n+1}(X_{s_{n+1}})|\mathcal{F}_{s_n})|\mathcal{F}_t).$$

Ora, per ipotesi, si ha che

$$E(f_{n+1}(X_{s_{n+1}})|\mathcal{F}_{s_n}) = E(f_{n+1}(X_{s_{n+1}})|X_{s_n}) \in b\sigma(X_{s_n}),$$

allora per il Proposizione 1.18 esiste $g \in b\mathcal{B}$ tale che

$$E(f_{n+1}(X_{s_{n+1}})|X_{s_n}) = g(X_{s_n}).$$

Quindi, posto $\widetilde{f_n} = gf_n$ applichiamo l'ipotesi induttiva e otteniamo

$$E(\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{s_j})E(f_{n+1}(X_{s_{n+1}})|\mathcal{F}_{s_n})|\mathcal{F}_t) =$$

$$= E(\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{s_j})g(X_{s_n})|\mathcal{F}_t)$$

$$= E(\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{s_j})g(X_{s_n})|X_t)$$

$$= E(\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{s_j})E(f_{n+1}(X_{s_{n+1}})|\mathcal{F}_{s_n})|X_t),$$

da cui la tesi. □

Siamo ora in grado di terminare la dimostrazione del Teorema 1.32.

Ricordiamo che dobbiamo provare l'equivalenza tra la (4) e la proprietà di Markov espressa dalla (1.2).
Proviamo prima che (1.2) $\Rightarrow$ (4).
Utilizziamo ancora una volta il secondo teorema di Dynkin e i due precedenti lemmi. Poniamo

$$\mathcal{H} = \{Y \in b\mathcal{F}_t^1 \mid E(Y|\mathcal{F}_t) = E(Y|X_t)\}.$$

Ancora una volta,$\mathcal{H}$ verifica le ipotesi del secondo teorema di Dynkin, per le proprietà dell'attesa condizionata. Verifichiamo che

$$1_A \in \mathcal{H}$$

per ogni A$\in \Sigma_t^1$. Essendo, per il Lemma 1.33, Σ_t^1 stabile rispetto all'intersezione e $\sigma(\Sigma_t^1) = \mathcal{F}_t^1$, ne verrà $\mathcal{H} = b\mathcal{F}_t^1$. Ora, sia A$\in \sum_t^1$, allora A è del tipo

$$A = \bigcap_{j=1}^{n}(X_{s_j} \in H_j).$$

Dunque la funzione caratteristica su A si scriverà:

$$1_A = \prod_{j=1}^{n} 1_{H_j}(X_{s_j}).$$

Utilizzando il Lemma 1.34, si ha che $1_A \in \mathcal{H}$.

Chiaramente (4) $\Rightarrow$ (1.2).

Questo conclude la prova del Teorema 1.32 $\square$

Capitolo 2

MOTO BROWNIANO

In questo capitolo definiamo le misure di Gauss e enunciamo, senza dimostrarlo, il Teorema di estensione di Kolmogorov. Introduciamo, il moto Browniano e proviamo alcune sue proprietà fondamentali, tra cui le proprietà di Markov debole e forte.

2.1 Misure di Gauss

Indichiamo con Γ la soluzione fondamentale dell'operatore del calore $\frac{1}{2}\triangle - \partial_t$ in $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^N$ con polo nell'origine:

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(- \frac{\|x\|^2}{2t} \right) \text{ per } x \in \mathbb{R}^N, t > 0. \tag{2.1}$$

Ricordiamo alcune semplici proprietà di Γ.

Proposizione 2.1. *Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $t, s > 0$ si ha:*

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t,y)\mathrm{d}y = 1;$

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} y\Gamma(t,x-y)\mathrm{d}y = x;$

(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \|y\|^2\Gamma(t,y)\mathrm{d}y = Nt;$

(4) (*proprietà di duplicazione*) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t,x-y)\Gamma(s,y)\mathrm{d}y = \Gamma(t+s,x).$

Dimostrazione. Dimostriamo la (1): (facendo il cambiamento di variabile $z = \frac{y}{\sqrt{2t}}$),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t,y)\,dy &= \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \exp(-\|z\|^2)\,dz \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-s^2)\,ds\right)^N = 1.\end{aligned}$$

Dimostriamo la (2).
Osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} y\Gamma(t,x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} x\Gamma(t,x-y)\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^N} (y-x)\Gamma(t,x-y)\mathrm{d}y$$

ma il secondo integrale è nullo, essendo l'integrando il prodotto di una funzione pari con una dispari. Dunque per la (1) si ha la tesi.
Dimostriamo la (3).
Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|y\|^2\Gamma(t,y-x)dy = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} z_j^2\Gamma(t,z)dz.$$

Ragionando su ogni termine della sommatoria, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} z_j^2\Gamma(t,z)dz = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} z_j^2\exp\Big(\frac{-z_j^2}{2t}\Big)dz_j \prod_{i\neq j}\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(\frac{-z_i^2}{2t}\Big)dz_i.$$

Abbiamo che

$$\prod_{i\neq j} \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \exp(\frac{-z_i^2}{2t}) dz_i = 1,$$

mentre, facendo il cambiamento di variabile $\rho = \dfrac{z_j}{(2t)^{\frac{1}{2}}}$, si ha che

$$\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} z_j^2 \exp(\frac{-z_j^2}{2t}) dz_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2t \int_{\mathbb{R}} \rho^2 \exp(-\rho^2) d\rho = t.$$

Per dimostrare l'ultima uguaglianza si deve integrare per parti.
Dimostriamo la (4).
Fissato $s > 0$, consideriamo le funzioni

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x-y)\Gamma(s,y)\mathrm{d}y,$$

e

$$(t,x) \to \Gamma(t+s, x).$$

Esse sono soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\triangle u - \partial_t u & = 0 \qquad \text{in }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N \\ u(0,x) & = \Gamma(s,x) \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

La tesi segue da un noto teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'operatore del calore. $\square$

Definizione 2.2 (Misura di Gauss). *Siano $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \geq 0$. La misura di Gauss $p\,(t,x,\cdot)$ è definita su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ da*

$$p\,(t,x,H) = \begin{cases} \displaystyle\int_H \Gamma(t, x-y)\mathrm{d}y & \textit{se } t > 0, \\ \\ \delta_x(H) & \textit{se } t = 0, \end{cases}$$

per ogni $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Notazione 2.3. *Indichiamo con δ_x la delta di Dirac centrata in x, cioè la misura definita sui borelliani di $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ da:*

$$\delta_x(H) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \in H, \\ 0 & \textit{se } x \notin H. \end{cases}$$

Osservazione 2.4. In base alla (1) della Proprosizione 2.1, $p\,(t, x, \cdot)$ è una misura di probabilità su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Osservazione 2.5. Osserviamo anche che, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$ e per ogni $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, vale

$$p\,(t, x, H) = (\Gamma(t, \cdot) * 1_H)(x)$$

dove $*$ indica il prodotto convoluzione.

Introduciamo, ora, la nozione di misura di Gauss generalizzata che interverrà nella definizione e costruzione del moto Browniano.

Definizione 2.6 (Misura di Gauss generalizzata). *Per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_n$, *poniamo*

$$p\,(t_1, \dots, t_n, x, H_1, \dots, H_n) = \int_{H_1} \dots \int_{H_n} p\,(t_1, x, \mathrm{d}y_1) p\,(t_2 - t_1, y_1, \mathrm{d}y_2) \dots \\ p\,(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, \mathrm{d}y_n), \tag{2.2}$$

per ogni $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

La famiglia di misure

$$\{p\,(t_1, \dots, t_n, x, \cdot) \mid x \in \mathbb{R}^N, \, 0 < t_1 < \dots < t_n, \, n \in \mathbb{N}\},$$

costituisce **una famiglia consistente di distribuzioni finito-dimensionale**, nel senso che gode della seguente proprietà: se

$$\{t_1, \dots, t_n\} = \{s_1, \dots, s_{n-1}, t_j\}$$

per un certo j, $1 \le j \le n$, allora

$$p\,(s_1, \dots, s_{n-1}, x, H_1, \dots, H_{n-1}) = p\,(t_1, \dots, t_n, x, H_1 \times \dots \times H_{j-1} \times \mathbb{R}^N \times \\ \times \dots \times H_{n-1}),$$

per ogni $H_1, \dots, H_{n-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Ciò è conseguenza immediata della proprietà di duplicazione di Γ (cfr. (4) della Proposizione 2.1).

Teorema 2.7 (di estensione di Kolmogorov). *Sia*

$$\{\mu_{t_1,\dots,t_n} \mid 0 \le t_1 < \ldots < t_n,\, n \in \mathbb{N}\},$$

una famiglia consistente di distribuzioni finito-dimensionale. Allora esiste uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e un processo stocastico* (X_t) *su* Ω*, tale che*

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(H_1 \times \ldots \times H_n) = P(X_{t_1} \in H_1, \ldots, X_{t_n} \in H_n),$$

per ogni $0 \le t_1 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{B}$.

2.2 Moto Browniano

Un moto Browniano è un modello probabilistico del moto caotico di una particella nello spazio. In generale, possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 2.8 (Moto Browniano). *Un processo stocastico a valori in* $\mathbb{R}^N$, $(X_t)_{t\in[0,+\infty[}$, *si dice un moto Browniano se:*

1. *se* $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ *allora* $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sono variabili aleatorie indipendenti;*

2. *se* $s, t \ge 0$*, allora*

$$P((X_{t+s} - X_t) \in H) = p\,(s, 0, H)$$

per ogni $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*;*

3. *con probabilità 1, la traiettoria* $t \mapsto X_t$ *è continua.*

La prima condizione esprime il fatto che il moto ha gli incrementi indipendenti. La seconda che gli incrementi $X_{t+s} - X_t$ hanno una distribuzione N-dimensionale normale, con media zero e varianza sI. L'ultima condizione si spiega da sola.
La questione dell'esistenza di un moto Browniano è stata indagata e risolta in modi essenzialmente differenti da molti autori. Esistono dunque diverse

realizzazioni del moto Browniano, ossia diversi spazi di probabilità su cui è possibile definire un processo stocastico con le proprietà $(1), (2), (3)$ della Definizione 2.8.

In questo paragrafo, forniamo la cosiddetta realizzazione canonica del moto Browniano: costruiamo quindi esplicitamente un particolare spazio di probabilità con un moto Browniano a cui sempre ci riferiremo nel seguito.

Precisamente consideriamo

$$\Omega = C([0, +\infty[; \mathbb{R}^N),$$

la famiglia delle curve continue in $\mathbb{R}^N$.

Definiamo

$$X_t : \Omega \to \mathbb{R}^N, \ X_t(w) = w(t), \ \ t \geq 0,$$

e

$$\mathcal{F} = \sigma(X_t, t \geq 0).$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 2.9. *Per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$*, esiste un'unica misura di probabilità* P^x *su* $(\Omega, \mathcal{F})$*, tale che, per ogni* $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ *e* $H_1, ..., H_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, vale*

$$P^x(X_1 \in H_1, \ldots, X_n \in H_n) = p\,(t_1, \ldots, t_n, x, H_1, \ldots, H_n). \tag{2.3}$$

(cfr. vedi (2.2)). Inoltre, il processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano su* $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$*. Lo spazio* $(\Omega, \mathcal{F}, P^x, (X_t))$ *è comunemente detto* **realizzazione canonica del moto Browniano N-dimensionale di punto iniziale x o anche spazio di Wiener**.

Osservazione 2.10. Dalla (2.3) è immediato ricavare che

$$P^x(X_0 = x) = 1.$$

Dimostrazione. Sia

$$Q_2 = \{m2^{-n} : \ m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Il Teorema 2.7 di estensione di Kolmogorov garantisce che possiamo definire su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ una famiglia di variabili aleatorie $(X_t)_{t \in Q_2}$ tale che vale la (2.3). Per estendere (X_t) a un processo definito su $[0, +\infty[$, mostreremo che con probabilità 1, la funzione $t \mapsto X_t$ è localmente uniformemente continua su $Q_2 \cap [0, T]$, per ogni $T < +\infty$. Per provare questo risultato, è sufficiente mostrare che ogni componente di (X_t) è uniformemente continua su $Q_2 \cap [0, T]$, così possiamo supporre, senza perdita di generalità, $N = 1$ e $T = 1$. La chiave per provare ciò è conseguenza del fatto che:

$$E(|X_t|^4) = t^2 E(|X_1|^4). \tag{2.4}$$

Questo risultato fu provato da Kolmogorov. Siano $\gamma < \frac{1}{4}$, e $\delta > 0$. Indichiamo con

$$C = E(|X_t|^4) < +\infty.$$

Osservando che, per la disuguaglianza di Chebyshev,

$$a^4 P(|X| > a) \leq E(|X|^4),$$

si ha che

$$\begin{aligned} &P[|X(j2^{-n}) - X(i2^{-n})| > ((j-i)2^{-n})^{\gamma} \text{ per } 0 \leq i \leq j \leq 2^n,\ j - i \leq 2^{n\delta}] \\ &\leq \sum ((j-i)2^{-n})^{-4\gamma} E(|X(j2^{-n}) - X(i2^{-n})|^4) \end{aligned}$$

dove la somma è estesa alle coppie (i, j) tali che

$$0 \leq i < j \leq 2^n, \ \ j - i \leq 2^{n\delta}.$$

Per la (2.4), otteniamo

$$\leq C \sum ((j-i)2^{-n})^{-4\gamma+2},$$

$$\leq C 2^n 2^{n\delta} (2^{n\delta} 2^{-n})^{-4\gamma+2},$$

poiché ci sono 2^n scelte per i, $(0 \leq i < 2^n)$, $0 < j - i \leq 2^{n\delta}$. Il lato destro della disuguaglianza è $C2^{-n\varepsilon}$, dove $\varepsilon = (1-\delta)(2-4\gamma) - (1+\delta)$. Poiché $\gamma < \frac{1}{4}$, $(2 - 4\gamma) > 1$, prendendo δ abbastanza piccolo, si ha $\varepsilon > 0$ e

$\sum 2^{-n\varepsilon} < \infty$. Così il lemma di Borel-Cantelli implica che per quasi tutti gli w esiste N, dipendente solo da w, tale che, per ogni $n \geq N$ si ha:

$$|X(j2^{-n}) - X(i2^{-n})| \leq ((y-i)2^{-n})^{\gamma} \tag{2.5}$$

per ogni $0 \leq i < j \leq 2^n$ tale che $j - i \leq 2^{n\delta}$.
Dimostriamo ora che la (2.5) implica che $X_t(w)$ è uniformemente continua su $Q_2 \cap [0,1]$. Siano $q, r \in Q_2 \cap [0,1]$ con $0 < r - q < 2^{-K(1-\delta)}$, prendendo $m \geq K$ si ha

$$2^{-(m+1)(1-\delta)} \leq r - q < 2^{-m(1-\delta)},$$

considerando

$$q = i2^{-m} - 2^{-q_1} - \ldots - 2^{-q_k}$$

e

$$r = j2^{-m} + 2^{-r_1} + \ldots + 2^{-r_l},$$

dove $m < q_1 < \ldots < q_k$ e $m < r_1 < \ldots < r_l$. Ora, $r - q < 2^{-m(1-\delta)}$, così $(i - j) < 2^{m\delta}$, segue, dalla scelta di m, che

$$|X(i2^{-m}) - X(j2^{-m})| \leq ((2^{m\delta})2^{-m})^{\gamma}.$$

Per stimare $|X(q) - X(i2^{-m})|$ usiamo la disuguaglianza triangolare e la (2.5). Si ha

$$|X(q) - X(i2^{-m})| \leq \sum_{i=1}^{k} (2^{-q_i})^{\gamma} \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} (2^{-\gamma})^j = C2^{-m\gamma}$$

e

$$|X(q) - X(j2^{-m})| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} (2^{-\gamma})^j = C2^{-m\gamma}.$$

Combinando le ultime tre disuguaglianze, otteniamo che

$$|X(q) - X(r)| \leq C2^{m\gamma(1-\delta)} \leq C^1 |r - q|^{\gamma},$$

poiché $2^{-m(1-\delta)} \leq 2^{1-\delta}|r - q|$. Allora le traiettorie browniane sono Holderiane di esponente γ.

Infine, con probabilità 1, il processo X_t inizialmente definito per $t \in Q_2$ ha un'unica estensione continua su $[0, +\infty[$, cioè la funzione

$$t \mapsto X_t(w)$$

è continua su $[0, +\infty[$.
Questo è il nostro moto browniano.
Proviamo, ora, che (X_t) è effettivamente un moto Browniano, cioè che sono soddisfatte le tre proprietà della Definizione 2.8. Iniziamo provando che (X_t) ha gli incrementi stazionari, ossia che $\forall\, t, r \geq 0$ si ha che $X_{t+r} - X_t$ e $X_r - X_0$ hanno la stessa P^x-distribuzione. Per $t = 0$ e $r = 0$ è ovvio. Siano allora $t, r > 0$. Per ogni $H \in \mathcal{B}$, si ha:

$$P^x((X_{t+r} - X_t) \in H) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} 1_H(x_2 - x_1)\Gamma(t, x_1 - x)$$

$$\Gamma(r, x_2 - x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 =$$

(facendo il cambiamento di variabili $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1$)

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \int_H \Gamma(t, y_1 - x)\Gamma(r, y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

$$= \int_H \Gamma(r, y_2)\mathrm{d}y_2.$$

D'altra parte osserviamo che

$$P^x((X_r - X_0) \in H) = P^x(X_r \in (H + x))$$

$$= \int_{H+x} \Gamma(r, x_1 - x)\mathrm{d}x_1$$

(facendo il cambiamento di variabile $y = x_1 - x$)

$$= \int_H \Gamma(r, y)\mathrm{d}y = P^0(X_r \in H),$$

da cui la tesi.
Proviamo ora che (X_t) ha gli incrementi indipendenti, ossia che per ogni

$0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, si ha che $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sono variabili aleatorie indipendenti. Dobbiamo provare che per ogni $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{B}$ vale

$$P^x(\bigcap_{j=1}^{n}((X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) \in H_j)) = \prod_{j=1}^{n} P^x((X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) \in H_j).$$

Osserviamo anzitutto che, poiché gli incrementi sono stazionari, abbiamo

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n} P^x((X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) \in H_j) &= \prod_{j=1}^{n} P^x(X_{t_j - t_{j-1}} \in (H_j + x)) \\ &= \prod_{j=1}^{n} P^0(X_{t_j - t_{j-1}} \in H_j).\end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned}&P^x(\bigcap_{j=1}^{n}((X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) \in H_j)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \ldots \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^{n} 1_{H_j}(x_j - x_{j-1}) p\,(t_0, x, dx_1) \Gamma(t_1 - t_0, x_2 - x_1) \ldots \\ &\qquad \Gamma(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{H_1} \ldots \int_{H_n} p\,(t_0, x, dy_0) \Gamma(t_1 - t_0, y_1) \ldots \Gamma(t_n - t_{n-1}, y_n) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \int_{H_j} p\,(t_j - t_{j-1}, 0, dy_j).\end{aligned}$$

da cui si ha la tesi.
La terza condizione, ossia che la traiettoria browniana $t \mapsto w(t)$ con probabilità 1 è continua, è soddisfatta per costruzione. $\square$

Osservazione 2.11. Siano $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ e sia $f \in b\mathcal{B}(\mathbb{R}^{nN})$. Allora, per il Teorema 1.6 si ha

$$E^x(f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})) = \int_{\mathbb{R}^N} \ldots \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, \ldots, x_n) p\,(t_1, x, \mathrm{d}x_1) \ldots p\,(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, \mathrm{d}x_n). \tag{2.6}$$

Dalle proprietà della funzione Γ ricaviamo alcune semplici proprietà del moto Browniano.

Proposizione 2.12. *Per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $0 \leq s \leq t$ *vale:*

$$\begin{aligned} &(1) \quad E^x(X_t) = x; \\ &(2) \quad E^x(|X_t - x|^2) = Nt; \\ &(3) \quad E^x(|X_t - X_s|^2) = N(t-s). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Osserviamo che la (1) segue immediatamente dalla (2) della Proposizione 2.1. Stesso discorso per la (3), che segue immediatamente della (4) della Proposizione 2.1. La (3) segue dalla proprietà di duplicazione. □

Osservazione 2.13. La proprietà (1), esprime il fatto che la posizione più probabile in cui si trova la particella al tempo t è proprio il punto di partenza. La (2) ci dice che il quadrato della distanza dal punto in cui si trova la particella e la sua posizione più probabile varia linearmente con t.

Osservazione 2.14. Sia $f \in b\mathcal{B}$. Allora

$$u(x,t) = E^x(f(X_t)) \tag{2.7}$$

è soluzione classica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}\Delta - \partial_t)u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[, \\ \\ u(x,0) = f(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Dimostrazione. È chiaro che $f(X_t) \in b\mathcal{F} \subseteq L^1(\Omega, P^x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Inoltre vale, per $t > 0$,

$$\begin{aligned} u(x,t) = E^x(f(X_t)) &= \int_\Omega f(X_t) dP^x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) p\,(t, x, dy) \\ &= (\Gamma(t, \cdot) * f)(x). \end{aligned}$$

Per il dato al bordo, si ha

$$u(x,0) = E^x(f(X_0)) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\delta_x(dy) = f(x).$$

□

Proposizione 2.15. *Sia* $Y \in \bigcap_{x\in\mathbb{R}^N} L^1(\Omega, P^x)$. *Allora vale*

$$x \mapsto E^x(Y) = \int_\Omega Y P^x \in m\mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che il semianello

$$\Sigma = \{\bigcap_{j=1}^{n}(X_{t_j} \in H_j) \mid H_j \in \mathcal{B}, 0 \leq t_1 < ... < t_n,\, n \in \mathbb{N}\}$$

genera $\mathcal{F}$. Dimostriamo, per prima cosa, che il teorema vale per $A = X_t^{-1}(H)$, $H \in \mathcal{B}$. Abbiamo che

$$x \mapsto P^x(A) = \int_{\mathbb{R}^N} 1_H(y)p\,(t,x,dy) \in b\mathcal{B}.$$

Ora, se $A = (X_{t_1} \in H_1) \cap (X_{t_2} \in H_2)$, con $t_1 < t_2$, abbiamo che

$$P^x(A) = \int_{H_1}\int_{H_2} p\,(t_2 - t_1, x_1, dx_2)p\,(t_1, x, dx_1).$$

Ma per quanto dimostrato sopra abbiamo che

$$\int_{H_2} p\,(t_2 - t_1, x_1, dx_2) = f(x_1) \in b\mathcal{B},$$

e applicando il teorema di Tonelli abbiamo

$$P^x(A) = \int_{H_1} f(x_1)p\,(t_1, x, dx_1).$$

Allora abbiamo ottenuto che $P^x(A) \in b\mathcal{B}$. Continuando in questa maniera, si dimostra che $P^x(A) \in b\mathcal{B}$ per un generico elemento $A \in \Sigma$. A questo punto applicando il secondo teorema di Dynkin, si ha la tesi per ogni $Y \in b\mathcal{F}$. Si prosegue con il metodo standard per dimostrare la validità del teorema per $Y \in L^1$. □

Osservazione 2.16. In particolare evidenziamo il fatto che, per ogni $t > 0$, si ha che

$$f \in b\mathcal{B} \Rightarrow x \to E^x(f(X_t)) \in b\mathcal{B},$$

ma essendo anche la soluzione del problema di Cauchy, si ha che

$$x \to E^x(f(X_t)) \in C^\infty.$$

Dimostriamo ora che le componenti di un moto Browniano sono variabili aleatorie indipendenti. Facciamo sola la dimostrazione nel caso $N = 2$ per comodità.

Proposizione 2.17. *Sia $(X_t) = (X_t^1, X_t^2)$ un moto Browniano in $\mathbb{R}^2$. Per ogni $t \geq 0$, le variabili aleatorie X_t^1, X_t^2 sono indipendenti.*

Dimostrazione. Siano H, $K \in \mathcal{B}$. Per dimostrare che X_t^1, X_t^2 sono indipendenti, basta mostrare che

$$P((X_t^1, X_t^2) \in H \times K) = P(X_t^1 \in H)P(X_t^2 \in K).$$

Osserviamo che il primo membro dell'uguaglianza sopra è

$$\begin{aligned}
\int_{H\times K} \Gamma(z,t)\mathrm{d}z &= \int_H \int_K \frac{1}{2\pi t} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2t})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_H \int_K \frac{1}{2\pi t} \exp(-\frac{x^2}{2t}) \exp(-\frac{y^2}{2t})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_H \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})\mathrm{d}x \int_K \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Questo conclude la prova. □

Concludiamo questa sezione dimostrando che la proiezione di un moto Browniano è un moto Browniano.

Teorema 2.18. *Sia $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^N)$ un moto Browniano in $\mathbb{R}^N$. Per ogni $k = 1, \ldots, N$, sia X_t^k la proiezione sull'asse k-esimo. Allora X_t^k è ancora un moto Browniano in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Basta provare che X_t^1 ha distribuzione normale, cioè, per ogni borelliano H si ha che

$$P^x(X_t^1 \in H) = \int_H (2\pi t)^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{-\|x-y\|^2}{2t})\mathrm{d}y.$$

Ma ciò è conseguenza immediata del fatto che

$$\begin{aligned} P^x(X_t^1 \in H) &= P^x(X_t^1 \in H, X_{t_2} \in \mathbb{R}, \dots, X_{t_N} \in \mathbb{R}) \\ &= \int_H \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

□

Più in generale, ma la dimostrazione è analoga alla precedente, si può dare il seguente teorema.

Teorema 2.19. *Sia $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$ un moto Browniano in $\mathbb{R}^N$ e*

$$\{k_1, \dots, k_r\} \subseteq \{t_1, \dots, tn\}.$$

Allora

$$\widetilde{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^{k_r})$$

è un moto Browniano in $\mathbb{R}^r$.

2.3 Proprietà di Markov del moto Browniano

In questo paragrafo dimostriamo che il moto Browniano gode della proprietà di Markov relativamente alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ definita nel modo seguente. Siano anzitutto

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{X_s \mid 0 \leq s \leq t\}),$$

e

$$\mathcal{F}_t^1 = \sigma(\{X_s \mid s \geq t\}),$$

le filtrazioni naturali associate a (X_t). Per motivi che risulteranno evidenti nel prossimo paragrafo, è conveniente "completare" la filtrazione $(\mathcal{F}_t^0)$ in

modo che verifichi le cosiddette "ipotesi usuali".
Più precisamente consideriamo la famiglia degli eventi trascurabili

$$\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{F} \mid P^x(E) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^N\},$$

e poniamo, per $t \geq 0$,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^+ \cup \mathcal{N}),$$

dove

$$\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^0.$$

La filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ ha le seguenti proprietà:

1. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è continua a destra, nel senso che

$$\begin{aligned}
\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s &= \bigcap_{s>t} \sigma(\mathcal{F}_s^+ \cup \mathcal{N}) \\
&= \bigcap_{s>t} \bigcap_{r>s} \sigma(\mathcal{F}_r^0 \cup \mathcal{N}) \\
&= \bigcap_{s>t} \sigma(\mathcal{F}_s^0 \cup \mathcal{N}) \\
&= \sigma(\mathcal{F}_t^+ \cup \mathcal{N}) = \mathcal{F}_t
\end{aligned}$$

2. $\mathcal{F}_t$ contiene gli eventi trascurabili, per ogni $t \geq 0$.

Proviamo che (X_t) gode della proprietà di Markov relativamente a $(\mathcal{F}_t)$, o in altri termini che $X_{t+s} - X_t$, per $s \geq 0$, è indipendente da ciò che è accaduto fino al tempo t. Questa è la più chiara espressione della proprietà di Markov per il moto Browniano. È possibile esprimere la proprietà di Markov in termini notevolmente più conveniente per le applicazioni, facendo uso della nozione di operatore di traslazione: per ogni $t \geq 0$, definiamo la trasformazione

$$\theta_t : \Omega \to \Omega,$$

definita da

$$(\theta_t(w))(s) = w(t+s), \ s \geq 0.$$

Osservazione 2.20. Sia $Y \in m\mathcal{F}$. Allora $Y \circ \theta_t \in m\mathcal{F}_t^1$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. In particolare

$$A \in m\mathcal{F} \Rightarrow \theta_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}_t^1.$$

Dimostrazione. Utilizziamo il primo teorema di Dynkin. Poniamo

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{F} \mid \theta_t^{-1}(A) \in m\mathcal{F}_t^1\}.$$

Si dimostra che $\mathcal{M}$ è una famiglia monotona e contiene Σ. Allora $\mathcal{M} = \mathcal{F}$, e ciò dimostra la tesi. $\square$

Teorema 2.21 (Proprietà di Markov per il moto Browniano). *Per ogni $Y \in b\mathcal{F}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^N$, vale*

$$E^x(Y \circ \theta_t | \mathcal{F}_t) \overset{(1)}{=} E^x(Y \circ \theta_t | X_t) \overset{(2)}{=} E^{X_t}(Y).$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima la (2).
Dobbiamo provare che E^{X_t} è una versione dell'attesa condizionata di $Y \circ \theta_t$ su X_t, $E^x(Y \circ \theta_t | X_t)$. Anzitutto si ha che $E^{X_t} \in m\sigma(X_t)$ poiché $E^{X_t} = \phi(X_t)$, con $\phi(x) = E^x(Y) \in m\mathcal{B}$, in base alla Proposizione 2.15. Resta da provare che, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$e per ogni $G \in \sigma(X_t)$, vale

$$\int_G Y \circ \theta_t dP^x = \int_G E^{X_t}(Y) dP^x.$$

Utilizziamo ancora una volta il secondo teorema di Dynkin. E' sufficiente considerare il caso $Y = 1_A$ dove

$$A \in \Sigma = \{\bigcap_{j=1}^{n} (X_{t_j} \in H_j) \mid H_j \in \mathcal{B}, 0 \leq t_1 < ... < t_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Osserviamo che $G \in \sigma(X_t)$, allora, in base all'Osservazione 1.10, G è del tipo $G = (X_t \in H)$, dove $H \in \mathcal{B}$. Consideriamo il caso più generale in cui

$$Y = f(X_{t_1}, ..., X_{t_N}),$$

con $0 \leq t_1 < ... < t_N$ e $f \in b\mathcal{B}$. Si ha allora

$$\int_G E^{X_t}(f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_N})) dP^x =$$

(per l'Osservazione 2.11)

$$= \int_{X_t \in H} \int_{\mathbb{R}^N} \dots \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, \dots x_N) p\,(t_1, X_t, dx_1) \dots \\ \dots p\,(t_N - t_{N-1}, x_{N-1}, dx_N) dP^x$$

$$= \int_H \int_{\mathbb{R}^N} \dots \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, \dots, x_N) p\,(t_1, X_t, dx_1) \dots \\ p\,(t_N - t_{N-1}, x_{N-1}, dx_N)\, p\,(t, x, dy)$$

(per l'Osservazione 2.11)

$$= \int_{X_t \in H} f(X_{t+t_1}, \dots, X_{t+t_N}) dP^x = \int_G Y \circ \theta_t dP^x.$$

Dimostriamo ora la (1). In base al Teorema 1.32, è sufficiente provare la (1) nel caso $Y = f(X_s)$, $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $s \geq 0$. Proviamo prima la (1) con $\mathcal{F}_s^0$ al posto di $\mathcal{F}_t$:

$$E^x(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t^0) = E^x(f(X_{t+s})|X_t). \tag{2.8}$$

Per linearità dell'integrale possiamo considerare il caso $f \geq 0$. Inoltre il caso $s = 0$ è ovvio. Sia allora $s > 0$ e $A \in \mathcal{F}_t^0$. Dobbiamo verificare che

$$\int_A E^x(f(X_{t+s})|X_t) dP^x = \int_A f(X_{t+s}) dP^x.$$

Utilizzando il primo teorema di Dynkin, è sufficiente considerare

$$A \in \Sigma_t = \{\bigcap_{j=1}^{n} (X_{t_j} \in H_j) \mid H_j \in \mathcal{B},\, 0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq t,\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Ne verrà che

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{F}_t \mid \text{ vale } \int_A E^x(f(X_{t+s})|X_t) dP^x = \int_A f(X_{t+s}) dP^x\}$$

è una famiglia monotona che contiene Σ_t. Allora per Dynkin avremo che $\mathcal{M} = \sigma(\Sigma_t) = \mathcal{F}_t^0$. D'altra parte si ha:

$$\int_A f(X_{t+s}) dP^x = \int_{H_1} \dots \int_{H_N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x_{N+1}) p\,(t_1, x, dx_1) \dots \\ \dots p\,(t + s - t_N, x_N, dx_{N+1}).$$

Utilizzando la (2) precedentemente dimostrata si ha

$$\int_A E^x(f(X_{t+s})|X_t)dP^x =$$

$$= \int_{\bigcap(X_{t_j \in H_j})} E^{X_t}(f(X_s))dP^x$$

$$= \int_{H_1} ... \int_{H_N} \int_{\mathbb{R}^N} p\,(t_1, x, dx_1)...p\,(t - t_N, x_N, dx_{N+1}) E^{X_{N+1}}(f(X_s))dP^x$$

$$= \int_{H_1} ... \int_{H_N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} p(t_1, x, dx_1)...p(t - t_N, x_N, dx_{N+1})p(s, x_{N+1}, dy)f(y).$$

Da cui la tesi essendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} p\,(t - t_N, x_N, dx_{N+1})p\,(s, x_{N+1}, dy) = p\,(t - t_N + s, x_N, dy)$$

per la proprietà di duplicazione.
Dimostriamo ora che la (2.8) implica

$$E^x(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t^+) = E^x(f(X_{t+s})|X_t). \tag{2.9}$$

Il caso $s = 0$ è banale, dunque supponiamo $s > 0$. Sia $r \in]t, t + s[$. Da (2.8) e (2) si ha che

$$E^x(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_r^0) = E^{X_r}(f(X_{t+s-r})). \tag{2.10}$$

Per prima cosa osserviamo che per l'Osservazione 2.16, la funzione

$$(\xi, \tau) \mapsto E^\xi(f(X_\tau)) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[),$$

di conseguenza, per la continuità delle traiettorie del moto Browniano , si ha che la funzione

$$r \to E^{X_r}(f(X_{t+s-r})) = \phi(X_r, t + s - r) \in C(]t, t + s[).$$

Proviamo dunque la (2.9): sia $A \in \mathcal{F}_t^+$. Poiché $A \in \mathcal{F}_r^0$, per ogni $r \in]t, t + s[$, in base alla (2.10) si ha, integrando su A,

$$E^x(f(X_{t+s}); A) = E^x(E^{X_r}(f(X_{t+s-r})); A),$$

e passando al limite per $r \to t^+$, si ottiene la (2.9). Infine è chiaro che la (2.9) implica la (1), poiché l'attesa condizionata è invariante per eventi trascurabili. □

Una conseguenza notevole della proprietà di Markov è il seguente teorema.

Teorema 2.22 (Legge 0-1 di Blumenthal). *Sia $A \in \mathcal{F}_0$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, si ha*

$$P^x(A) \in \{0, 1\}.$$

Dimostrazione. Poiché $A \in \mathcal{F}_0$, per provare l'affermazione usiamo la proprietà di Markov nel caso $t = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} P^x(A) &= E^x(1_A \circ \theta_t; A) \\ &= E^x(E^{X_t}(1_A); A) \\ &= E^x(P^x(A); A) \\ &= (P^x(A))^2, \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

2.4 Proprietà di Markov forte

Consideriamo lo spazio di Wiener canonico.

Definizione 2.23 (Stopping time). *Si chiama stopping time una qualsiasi funzione*

$$\tau : \Omega \to [0, +\infty],$$

tale che

$$(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t, \ \forall\, t > 0.$$

Osservazione 2.24. Osserviamo che ogni stopping time è in particolare una variabile aleatoria.
L'esempio più semplice di stopping time è la funzione $\tau = t_0$ costante.

Un esempio significativo di stopping time è il seguente.

Proposizione 2.25 (Exit time). *Sia D un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^N$. Allora*

$$\tau_D = \inf\{t > 0 \mid w(t) \notin D\},$$

è uno stopping time, detto tempo di uscita da D.

Dimostrazione. Sia $t > 0$. Per semplificare la notazioni poniamo $\tau_D = \tau$. Sia (K_n) una successione crescente di chiusi che invadono D, cioè

$$K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq D \ \text{ e } \ \bigcup_{n\geq 1} K_n = D.$$

Proviamo che

$$(\tau \leq t) = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{0<s<t} (X_s \notin K_n).$$

Osserviamo anzitutto che, per continuità, si ha

$$(\tau \leq t) = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{0<s<t} (X_s \notin K_n) = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{0<s<t, s\in\mathbb{Q}} (X_s \notin K_n).$$

Inoltre si ha che

$$w \in \bigcap_{n\leq 1} \bigcup_{0<s<t} (X_s \notin K_n) \Leftrightarrow \exists (s_n) \text{ successione crescente tale che}$$

$$0 < s_n < t,\, w(s_n) \notin K_n.$$

Posto, allora, $t_0 = \sup s_n$, si ha che

$$0 < t_0 \leq t \ \text{ e } \ w(t_0) \notin D.$$

Tutto ciò implica che $\tau(w) \leq t$.
Proviamo il viceversa. Sia $\tau(w) \leq t$. Se $\tau(w) < t$ è ovvio. Sia allora $\tau(w) = t > 0$. Abbiamo che $w(t) \in \partial D$ e $w(s) \in int(D)$ per $s < \tau_D$. Infatti, essendo D un aperto, se $w(\tau_D)$ fosse interno a D, essendo $\tau_D > 0$, per continuità, esisterebbe un ε positivo tale che

$$w(t) \in D \text{ per } t \in]\tau_D - \varepsilon, \tau_D + \varepsilon[.$$

Lo stesso discorso vale per $w(t) \in int(D^c)$. Ciò contraddice la definizione di τ_D. Abbiamo dunque provato che, se D un aperto non vuoto e τ_D è positivo, allora $w(\tau_D) \in \partial D$ e $w(s) \in D$ per $s < \tau_D$. Allora, per continuità, esiste una successione crescente (s_n), convergente a t, tale che $w(s_n) \in (K_n)^c$, per ogni n. $\square$

Estendiamo i concetti della sezione precedente agli stopping time.

Definizione 2.26. *Poniamo*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t, \ \forall\, t > 0\}.$$

Osservazione 2.27. $\mathcal{F}_\tau$ sopradefinita è una $\sigma - algebra$.

Dimostrazione. Dalla definizione di τ, si ha che

$$\Omega \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t, \ \ \forall\, t > 0,$$

e dunque $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$. Sia $A \in \mathcal{F}_\tau$. Allora, per ogni t positivo,

$$A^c \cap (\tau \leq t) = (\Omega \cap (\tau \leq t)) \setminus (A \cap (\tau \leq t)).$$

Ma $\Omega \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$ e anche $A \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$ per ipotesi. Essendo $\mathcal{F}_t$ una $\sigma - algebra$, si ha che $A^c \in \mathcal{F}_\tau$.
La terza condizione della definizione di $\sigma - algebra$ è banalmente verificata.

$\square$

Osservazione 2.28. Sia $\tau = t_0$ costante. Allora

$$\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{t_0}.$$

Dimostrazione. Siano t, t_0 strettamente positivi. Allora

$$A \cap (\tau \leq t) = \begin{cases} A & \text{se } t_0 \leq t, \\ \\ \emptyset & \text{se } t_0 > t. \end{cases}$$

Allora possiamo dire che

$$A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}_t, \forall\ t \geq t_0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}_{t_0}.$$

Abbiamo dimostrato l'osservazione nel caso $t_0 \neq 0$.
Prendiamo ora in considerazione il caso $t_0 = 0$. Si ha che

$$A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow A = A \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t, \forall\, t > 0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}_t, \forall\, t > 0.$$

Questo conclude la prova. □

Definizione 2.29 (Shift). *Dato uno stopping time τ, definiamo lo shift*

$$\theta_\tau : (\tau < +\infty) \to \Omega,$$

tale che

$$(\theta_\tau w)(t) = w(\tau(w) + t).$$

Definizione 2.30. *Dato τ, stopping time, poniamo X_τ la funzione*

$$X_\tau : \Omega \to \mathbb{R}^N,$$

definita da:

$$X_\tau(w) = \begin{cases} 0 & se\ \tau(w) = +\infty, \\ \\ w(\tau(w)) & se\ \tau(w) < +\infty. \end{cases}$$

Osservazione 2.31. Osserviamo che, in generale

$$X_t \circ \theta_\tau = X_{t+\tau}(w) \neq X_\tau \circ \theta_t.$$

Teorema 2.32. *$X_\tau \in m\mathcal{F}_\tau$, in particolare X_τ è una variabile aleatoria.*

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema procediamo per passi.
1 PASSO. Sia $\mathcal{G}_n$ una successione decrescente di $\sigma - algebre$, e sia $\mathcal{G} = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{G}_n$. Sia $Y_n \in m\mathcal{G}_n$, una successione convergente puntualmente a Y. Allora $Y \in m\mathcal{G}$. Infatti, abbiamo che

$$Y_k \in m\mathcal{G}_n, \forall\, k \geq n, \forall\, n \Rightarrow Y \in m\mathcal{G}_n, \forall\, n \Rightarrow Y \in m\mathcal{G}.$$

2 PASSO. Fissato n naturale, poniamo

$$\tau_n(w) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \leq \tau(w) < \frac{k}{2^n}, \\ \\ +\infty & \text{se } \tau(w) = +\infty. \end{cases}$$

Si ha che (τ_n) è una successione decrescente di stopping time, convergente a τ. Infatti, fissato n, sia $t \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}[$. Allora

$$(\tau_n \leq t) = \left(\tau < \frac{k-1}{2^n}\right) \in \mathcal{F}_{\frac{k-1}{2^n}} \subseteq \mathcal{F}_t.$$

dunque τ_n è uno stopping time. E' facile vedere che è decrescente. Infine, abbiamo che per ogni $w \in \Omega$, si ha

$$|\tau_n(w) - \tau(w)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

3 PASSO. Consideriamo τ, σ due stopping time. Se $\tau \leq \sigma$, allora $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$. Infatti, sia $A \in \mathcal{F}_\tau$. Allora, per ogni $t > 0$ si ha

$$A \cap (\sigma \leq t) = (A \cap (\tau \leq t)) \cap (\sigma \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

essendo $(\sigma \leq t) \subseteq (\tau \leq t)$.
4 PASSO. Sia (τ_n) una successione decrescente di stopping time convergenti a τ. Allora $(\mathcal{F}_{\tau_n})$ è una successione decrescente di $\sigma - algebre$ convergenti a $\mathcal{F}_\tau$. Infatti, dal Passo 3, abbiamo che

$$\mathcal{F}_\tau \subseteq \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{\tau_n}.$$

Sia $A \in \bigcap \mathcal{F}_{\tau_n}$. Allora si ha che

$$A \cap (\tau \leq t) = \bigcup_{n \geq 1} A \cap (\tau_n \leq t) \in \mathcal{F}_t.$$

5 PASSO. Siamo ora in grado di dimostrare il teorema. Poniamo

$$X_{\tau_n}(w) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau_n(w) = \tau(w) = +\infty, \\ \\ w(\tau_n(w)) & \text{se } \tau_n(w) < +\infty. \end{cases}$$

Proviamo che $X_{\tau_n}(w)$ è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_{\tau_n}$. Infatti, per ogni $H \in \mathcal{B}$, fissato n naturale, si ha che

$$(X_{\tau_n} \in H) \cap (\tau_n \leq t) = \bigcup_{k, \frac{k}{2^n} \leq t} (X_{\frac{k}{2^n}} \in H) \in \mathcal{F}_t,\ t > 0.$$

Ora, (X_{τ_n}) è una successione che converge puntualmente a X_τ. Dal Passo 1 e dal Passo 4 si ha che

$$\mathcal{F}_{\tau_n} \downarrow \mathcal{F}_\tau$$

e

$$X_\tau \in m\mathcal{F}_\tau.$$

$\square$

Siamo ora in grado di dimostrare che il moto Browniano gode della proprietà di Markov forte.

Teorema 2.33 (Proprietà di Markov forte). *Sia τ uno stopping time. Per ogni $Y \in b\mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{F}_\tau$ si ha*

$$E^x(Y \circ \theta_\tau; A \cap (\tau < \infty)) = E(E^{X_\tau}(Y); A \cap (\tau < \infty)).$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione utilizziamo la proprietà di Markov e il teorema della convergenza dominata. È sufficiente dimostrare il caso in cui

$$Y = f(X_t) \text{ con } t \geq 0,\ f \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

Consideriamo la successione di stopping time (τ_n) definita nel teorema precedente. Osserviamo che la funzione

$$x \mapsto E^x(Y) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, p\,(t, x, \mathrm{d}y) \ \in\ C \cap L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Applicando il teorema della convergenza dominata si ha che

$$\begin{aligned}
&E^x(E^{X_\tau}(Y); A \cap (\tau < \infty)) \\
&= \lim_{n\to+\infty} E^x(E^{X_{\tau_n}}(Y); A \cap (\tau < \infty)) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E^x(E^{X_{\tau_n}}(Y); A \cap (\frac{k-1}{2^n} \leq \tau < \frac{k}{2^n}))
\end{aligned}$$

(applicando la proprietà di Markov)

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E^x(Y \circ \theta_{\tau_n}; A \cap (\frac{k-1}{2^n} \leq \tau < \frac{k}{2^n}))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} E^x(Y \circ \theta_{\tau_n}; A \cap (\tau < \infty))$$

(applicando il teorema della convergenza dominata,
essendo $y \circ \theta_{\tau_n} = f(X_{t+\tau_n}) \to f(X_{t+\tau})$, per $n \to +\infty$)

$$= E^x(Y \circ \theta_\tau; A \cap (\tau < \infty)).$$

Questo conclude la prova. □

Osservazione 2.34. Nel caso in cui $P^x(\tau < +\infty) = 1$, la proprietà di Markov forte diventa

$$E^x(Y \circ \theta_\tau; A) = E^x(E^{X_\tau}(Y); A), \;\; A \in \mathcal{F}_\tau.$$

Inoltre, per il Teorema 2.15 e poiché $X_\tau \in m\mathcal{F}_\tau$ si ha che $E^{X_\tau}(Y) \in m\mathcal{F}_\tau$. Dunque, $E^{X_\tau}(Y)$ è una versione dell'attesa condizionata di $Y \circ \theta_\tau$ relativa a $\mathcal{F}_\tau$, ossia

$$E^x(Y \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau) = E^{X_\tau}(Y). \tag{2.11}$$

Capitolo 3

PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'OPERATORE DI LAPLACE

In questo capitolo studiamo il problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^N$. Nella prima sezione proviamo alcune ben note proprietà della funzioni armoniche, e illustriamo la studio classico del problema in questione. Successivamente affrontiamo il problema di Dirichlet da un punto di vista probabilistico, separando lo studio del problema interno, cioè quello di trovare un'espressione per le funzioni armoniche su un aperto, da quello dell'assunzione del dato al bordo. Introduciamo la nozione di regolarità per un punto del bordo, dimostrando due criteri di regolarità: quello del cono esterno e quello del "cono piatto". Infine, proviamo che la regolarità in senso classico e quella in senso probabilistico coincidono. Per fare ciò abbiamo bisogno di dimostrare alcune proprietà delle traiettorie Browniane.

3.1 Funzioni armoniche

D'ora in poi indicheremo sempre con D un aperto di $\mathbb{R}^N$ non vuoto. Indicheremo la misura di Hausdorff con la lettera H con al piede la dimensione.

Definizione 3.1 (Funzione armonica). *Sia $u \in C^2(D)$. Si chiama operatore di Laplace il seguente operatore alle derivate parziali*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i} \tag{3.1}$$

Nel caso in cui vale

$$\Delta u = 0$$

allora u si dice armonica.

Definizione 3.2 (Media di superficie). *Sia $u \in m\mathcal{B}(D, \mathbb{R})$. Si dice che u verifica la proprietà di media di superficie (MS) se:*

$$\forall\, x \in D, \forall\, 0 < r < d(x, \partial D)$$

vale

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(r)} \int_{\partial B(x,r)} u(y) H_{N-1}(dy),$$

dove $\sigma(r) = H_{N-1}(\partial B(x,r))$.

Vale il seguente fondamentale teorema.

Teorema 3.3. *Sia $u \in L^1_{loc}(D)$. Allora u verifica (MS) se e solo se è armonica. Inoltre, in tal caso, $u \in C^\infty(D)$.*

Dimostrazione. Innanzitutto proviamo che, se $u \in L^1_{loc}(D)$ tale che verifica (MS), allora $u \in C^\infty$.
Sia $\phi(x) = \phi(\|x\|)$ un modificatore radialmente simmetrico, cioè una funzione C_0^∞, il cui supporto è contenuto nella sfera unitaria e il cui integrale su tutto $\mathbb{R}^N$ è pari a 1. Un esempio di tale funzione è:

$$\phi(\|x\|) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{\|x\|^2-1}) & \text{se } 0 \le |x| < 1; \\ \\ 0 & \text{se } |x| \ge 1. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x)dx = \int_0^1 \int_{\partial B(0,\rho)} \phi(\|y\|)H_{N-1}(dy)d\rho$$

$$= \int_0^1 \phi(\rho)\sigma(\rho)d\rho.$$

Dunque, se $\overline{B(x,1)} \subseteq D$, altrimenti basta considerare ϕ_ε con $\varepsilon < d(x, \partial D)$, si ha

$$u(x) = \int_0^1 u(x)\phi(\rho)\sigma(\rho)d\rho = \int_0^1 \frac{1}{\sigma(\rho)} \int_{\partial B(x,\rho)} u(y)H_{N-1}(dy)\sigma(\rho)\phi(\rho)d\rho$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\phi(x-y)dy.$$

Osserviamo che, per la regolarità del prodotto convoluzione, si ha che $u \in C^\infty$.

Sia $u \in C^2(D)$ e $x \in D$. Poniamo

$$I(r) = \tfrac{1}{\sigma(r)} \int_{\partial B(x,r)} u(y)H_{N-1}(dy)$$

$$= \tfrac{1}{\sigma(1)} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)H_{N-1}(dz).$$

Derivando rispetto a r si ottiene

$$I'(r) = \tfrac{1}{\sigma(1)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{d}{dr} u(x+rz)H_{N-1}(dz)$$

$$= \tfrac{1}{\sigma(1)} \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla u(x+rt), z\rangle H_{N-1}(dz)$$

$$= \tfrac{1}{\sigma(r)} \int_{\partial B(x,r)} \langle \nabla u(y), \eta(y)\rangle H_{N-1}(dy)$$

$$= \tfrac{1}{\sigma(r)} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)dy.$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo usato il teorema della divergenza e indicato con η la normale esterna.
Sia ora $u \in L^1_{loc}(D)$ tale che verifica (MS). Allora, per quanto dimostrato sopra $u \in C^\infty(D)$. Inoltre, poichè u soddisfa (MS), si ha che $I'(r) = 0$. Allora, per quello scritto sopra, si ha

$$\frac{1}{\sigma(r)} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = 0.$$

Facendo il limite per $r \to 0^+$, per la continuità di Δu, si ha che

$$\Delta u(x) = 0.$$

Dimostriamo ora l'implicazione inversa.
Sia u armonica. Allora abbiamo che

$$I'(r) = 0.$$

Inoltre, per la continuità di u,

$$I(r) \to u(x),$$

per $r \to 0^+$. Allora u verifica (MS).
Questo conclude la prova □

Definizione 3.4 (Media di volume). *Sia $u \in m\mathcal{B}(D, \mathbb{R})$. Si dice che u verifica la media di volume (MV) se:*

$$\forall\, x \in D, \forall\, 0 < r < d(x, \partial D)$$

vale

$$u(x) = \frac{1}{H_N(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y) H_N(dy).$$

Teorema 3.5. *Sia $u \in L^1_{loc}(D)$. Allora u verifica (MV) se e solo u verifica (MS).*

Dimostrazione. Sia $x \in D$ e sia $r > 0$ tale che $\overline{B(x,r)} \subset D$. Dimostriamo prima che se u verifica (MS), allora verifica (MV). Per ipotesi abbiamo che

$$u(x)\, N\, \omega_N\, r^{N-1} = \int_{\partial B(x,r)} u\, dH_{N-1},$$

dove

$$\omega_N = H_N(B(x,r)).$$

Integrando rispetto a r entrambi i membri otteniamo

$$u(x)\, \omega_N\, r^N = \int_0^r \int_{\partial B(x,r)} u\, dH_{N-1}\, dr = \int_{B(x,r)} u\, dH_N,$$

da cui la tesi.
Proviamo ora l'implicazione inversa. Osserviamo che, se u soddisfa (MV), allora è continua. Infatti, si ha che

$$u(x) - u(x_0) = \frac{1}{\omega_N r^N}\left(\int_{B(x,r)} u\, dH_N - \int_{B(x_0,r)} u\, dH_N\right).$$

Passando ai moduli, si ottiene

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \frac{1}{\omega_N r^N} \int_M |u|\, dH_N,$$

dove M indica la differenza tra i due dischi. Ma poichè

$$H_N(M) \to 0, \;\; \text{per } x \to x_0,$$

si ha la continuità di u. Possiamo scrivere

$$u(x)\, \omega_N\, r^N = \int_0^r \int_{\partial B(x,\rho)} u(y)\, H_{N-1}(dy) d\rho.$$

Derivando entrambi i membri rispetto a r, sfruttando la continuità della funzione

$$\rho \mapsto \int_{\partial B(x,\rho)} u\, dH_{N-1},$$

otteniamo

$$N\, \omega_N\, r^{N-1}\, u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u\, dH_{N-1},$$

da cui la tesi.
Questo conclude la prova □

Definiamo ora una classe molto importante di funzioni armoniche, che riveste un ruolo fondamentale nella teoria del potenziale.

Definizione 3.6 (Funzione armonica-radiale). *Sia u una funzione definita su $\mathbb{R}^N - \{0\}$. u si dice armonica-radiale se:*

1. $\exists\, \varphi \in C^2(\mathbb{R} - \{0\})$ *tale che*

$$u(x) = \varphi(\|x\|), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N - \{0\}.$$

2. $\Delta u(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N - \{0\}.$

Osservazione 3.7. Osserviamo che per la (1), u è di classe C^2 e quindi $\Delta u(x)$ ha senso.

Proposizione 3.8. *Le funzioni armoniche-radiali sono tutte e sole del tipo:*

$$\begin{aligned} u(x) = &\quad A \log(\|x\|) + B \qquad && \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u(x) = &\quad \frac{A}{\|x\|^{N-2}} + B && \text{in } \mathbb{R}^N,\ N \geq 3. \end{aligned}$$

con A e B costanti reali.

Dimostrazione. Sia $x \neq 0$. Abbiamo che

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \varphi'(\|x\|)\frac{x_j}{\|x\|},$$

essendo $\frac{\partial \|x\|}{\partial x_j} = \frac{x_j}{\|x\|}$ per ogni $j = 1, \ldots, N$. Derivando di nuovo, abbiamo che, per ogni $j = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} &= \varphi''(\|x\|)\frac{x_j^2}{\|x\|^2} + \varphi'(\|x\|)\frac{\|x\| - x_j \frac{x_j}{\|x\|}}{\|x\|^2} \\ &= \varphi''(\|x\|)\frac{x_j^2}{\|x\|^2} + \varphi'(\|x\|)\frac{\|x\|^2 - x_j^2}{\|x\|^3}. \end{aligned}$$

Allora, abbiamo ottenuto

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \varphi''(\|x\|) + \varphi'(\|x\|)\frac{(N-1)\|x\|^2}{\|x\|^3}.$$

Per comodità, indichiamo con $r = \|x\|$. Con questa notazione abbiamo

$$\Delta u(x) = \varphi^{''}(r) + \varphi^{'}(r)\frac{N-1}{r} = 0.$$

Si tratta, dunque, di risolvere un'equazione differenziale a coefficienti non costanti. Moltiplichiamo entrambi i membri per r^{N-1}. Otteniamo

$$r^{N-1}\varphi^{''}(r) + (N-1)r^{N-2}\varphi^{'}(r) = 0,$$

cioè

$$\frac{d}{dr}(r^{N-1}\varphi^{'}(r)) = 0.$$

L'equazione sopra ci dice che la funzione $r^{N-1}\varphi^{'}(r)$ è costante. Indicando con C tale costante, si ha

$$r^{N-1}\varphi'(r) = C$$

o equivalentemente

$$\varphi^{'}(r) = \frac{C}{r^{N-1}}.$$

A questo punto, si devono distinguere i casi $N = 2$ e $N \geq 3$. Per $N = 2$ abbiamo

$$\varphi^{'}(r) = \frac{C}{R}$$

cioè

$$\varphi(r) = C \log r + B$$

Andando a sostituire nell'espressione di u trovo

$$u(x) = u(\|x\|) = C \log \|x\| + B.$$

Per $N \geq 3$ abbiamo

$$\varphi^{'}(r) = \frac{A}{r^{N-1}},$$

cioè

$$\varphi(r) = \frac{C}{2-N}R^{2-N} + B.$$

Andando a sostituire nell'espressione di u, indicando con $A = \frac{C}{2-N}$, troviamo

$$u(x) = u(\|x\|) = \frac{A}{\|x\|^{N-2}} + B.$$

$\square$

Osservazione 3.9. Nel caso banale $N = 1$, armonica significa lineare. Allora, nel caso di funzioni di una sola variabile reale, le funzioni armoniche-radiali sono tutte e sole del tipo:

$$u(x) = u(\|x\|) = A\|x\| + B,$$

con A e B costanti reali.

Un'altra importante proprietà delle funzioni armoniche è il cosiddetto principio del massimo. Ricordiamo che per dominio intendiamo un aperto connesso non vuoto di $\mathbb{R}^N$.

Proposizione 3.10 (Principio del massimo). *Sia D un dominio limitato e sia u una funzione armonica su D. Se u assume massimo o minimo in D, allora u è costante.*

Dimostrazione. Sfruttiamo la connessione di D. Supponiamo che u assuma massimo. La dimostrazione nel caso in cui u assuma minimo è analoga, oppure basta considerare $-u$. Sia $x_0 \in D$ tale che

$$u(x_0) = \sup_{x \in D} u(x).$$

Poniamo

$$D_1 = \{y \in D \mid u(y) = u(x_0)\}.$$

Osserviamo subito che D_1 è non vuoto in quanto $x_0 \in D_1$. Poichè u è armonica per ipotesi, u verifica la media di superficie (MS), e allora anche quella di volume (MV). Quindi, per ogni $y \in D_1$ esiste una sfera di centro y e raggio un opportuno r che sia tutta contenuta in D_1. Allora D_1 è un aperto. Ma D_1 è anche chiuso, in quanto il complementare

$$D \setminus D_1 = \{x \in D \mid u(x) < u(x_0)\},$$

è un aperto, grazie alla continuità di u. Allora, poichè D è connesso, si ha che

$$D = D_1.$$

Questo conclude la prova. □

Notazione 3.11. *Indicheremo con* $\mathcal{B}(\partial D)$ *la* $\sigma-$*algebra generata dalla topologia indotta su* ∂D.

Prendiamo ora in considerazione il seguente problema.

Definizione 3.12 (Problema di Dirichlet). *Sia* $f \in b\mathcal{B}(\partial D)$. *Consideriamo il problema di trovare una funzione* $u \in C^2(D)$ *tale che*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & in\ D \\ \lim_{x\to z} u(x) = f(z), & z \in \partial D \end{cases} \tag{3.2}$$

Un'importante applicazione del principio del massimo è la seguente.

Teorema 3.13 (Unicità della soluzione). *Sia* D *un dominio limitato. Allora, la soluzione del problema di Dirichlet se esiste è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che u_1 e u_2 siano due diverse soluzioni dello stesso problema di Dirichlet. Allora, poichè sia u_1 che u_2 sono armoniche, anche

$$u = u_1 - u_2$$

è armonica. Inoltre si ha che $\lim_{x\to z} u(x) = 0$, per ogni $z \in \partial D$, quindi u si estende con continuità su $\overline{D}$. Allora, per il principio del massimo, abbiamo immediatamente che u è identicamente nulla su tutto D. Questo conclude la prova. □

Facciamo osservare che non sempre esiste una soluzione del problema su domini limitati. L'esempio più semplice di non risolubilità di (3.2) è il seguente.

Esempio 3.14. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ il disco D di centro origine e raggio r, privato dell'origine. Consideriamo il problema (3.2) con

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \partial B(0,r) \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Osserviamo subito che se u è soluzione, allora u è armonica-radiale. Infatti, se ρ è una rotazione, allora anche $u \circ \rho = u_1$ è ancora soluzione. Si verifica facilmente che u_1 è armonica e soddisfa al bordo le stesse condizioni di u. Per il principio del massimo, abbiamo che $u = u_1$, cioè u è invariante per rotazioni. Poichè siamo in $\mathbb{R}^2$, necessariamente u deve essere del tipo

$$a \log \|x\| + b.$$

La condizione al bordo, implica che

$$a = 0 = b,$$

cioè u è identicamente nulla. Ciò è un assurdo.

3.2 Soluzione generalizzata del problema di Dirichlet

In questa sezione introduciamo la nozione di soluzione generalizzata del problema (3.2) su D, aperto di $\mathbb{R}^N$.

Definizione 3.15 (Misura armonica). *Sia τ_D l'exit time relativo a D, (cfr. Def. 2.25), ovvero*

$$\tau_D = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin D\}.$$

Per ogni $x \in D$, definiamo la seguente misura su $\mathcal{B}(\partial D)$:

$$\mu_D^x(F) = P^x((X_{\tau_D} \in F) \cap (\tau_D < \infty)),\ F \in \mathcal{B}(\partial D) \tag{3.3}$$

Definizione 3.16 (Soluzione generalizzata). *Per ogni $f \in b\mathcal{B}(\partial D)$, poniamo*

$$u(x) = E^x(f(X_{\tau_D}); \tau_D < \infty) = \int_{\partial D} f(y) \mu_D^x(dy) \tag{3.4}$$

e chiamiamo u soluzione generalizzata del problema di Dirichlet (3.2).

In questa sezione mostriamo che la funzione u in (3.4) è armonica in D. (crf. Corollario 3.25). Cominciamo studiando alcune proprietà della misura armonica.

Osservazione 3.17. Sostanzialmente μ_D^x è la legge di X_{τ_D} rispetto alla misura

$$\widetilde{P}^x(A) = P^x(A \cap (\tau_D < \infty)),\ A \in \mathcal{F}.$$

In particolare per il Teorema 1.6, si ha che, per ogni $f \in m\mathcal{B}(\partial D)$,

$$f \in L^1(\partial D, \mu_D^x) \Leftrightarrow f(X_{\tau_D}) \in L^1(\Omega, \widetilde{P}^x)$$

e in tal caso vale

$$\int_{\partial D} f(y)\mu_D^x(\mathrm{d}y) = E^x(f(X_{\tau_D}); \tau_D < \infty).$$

Proposizione 3.18. *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto con $H_N(D) < \infty$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, si ha $P^x(\tau_D < \infty) = 1$.*

Dimostrazione. Abbiamo, per ogni $t > 0$,

$$P^x(\tau_D = \infty) \leq P^x(\tau_D > t) \leq P^x(X_t \in D) =$$

$$= \int_D p\,(t, x, \mathrm{d}y) \leq \frac{H_N(D)}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} \to 0,$$

dove il limite sopra è da intendersi per $t \to +\infty$. $\square$

Il prossimo passo sarà quello di dimostrare che la misura armonica di una palla euclidea B è la misura di Hausdorff $(N-1)$-dimensionale normalizzata. Indicheremo con $B = B(x_0, r)$, con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.
Osserviamo che, per la proposizione precedente, si ha

$$P^x(\tau_B < +\infty) = 1,\ \forall x \in B.$$

Teorema 3.19. *Sia $B(x_0, r)$ la palla euclidea di centro $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e raggio $r > 0$. Si ha*

$$\mu_B^{x_0}(F) = \frac{H_{N-1}(F)}{H_{N-1}(B(x_0, r))} \tag{3.5}$$

per ogni $F \in \mathcal{B}(\partial B(x_0, r))$. In particolare, per ogni $f \in b\mathcal{B}(\partial B(x_0, r))$, vale

$$E^{x_0}(f(X_{\tau_B})) = \frac{1}{N\, w_N\, r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0, r)} f dH_{N-1}. \tag{3.6}$$

La dimostrazione è immediata conseguenza dei tre Lemmi 3.20, 3.22, 3.23, seguenti.

D'ora in poi, indicheremo con ρ una rotazione dello spazio euclideo, ossia una trasformazione lineare e ortogonale di $\mathbb{R}^N$ la cui matrice associata ha determinante 1.

Lemma 3.20. *Definiamo la trasformazione*

$$R : \Omega \to \Omega,$$

definita da

$$R(w)(t) = \rho(w(t)),\ w \in \Omega,\ t \geq 0.$$

Indichiamo con P_R^x la legge di R, definita da

$$P_R^x(A) = P^x(R^{-1}(A)),\ A \in \mathcal{F}.$$

Si ha che

$$P_R^x = P^{\rho(x)}.$$

Dimostrazione. Essendo P^x e P_R^x misure di probabilità su $\mathcal{F}$, per il Teorema di unicità delle misure finite A.15, basta verificare che

$$P^{\rho(x)}(A) = P_R^x(A) \tag{3.7}$$

per ogni $A = (X_\tau \in H)\ \in\ \Sigma$. Ricordiamo che

$$\Sigma = \{\bigcap_{j=1}^{n}(X_{t_j} \in H_j) \mid 0 \leq t_1 < \ldots < t_n,\ H_j \in \mathcal{B}\}.$$

Per semplicità useremo le seguenti notazioni:

$$\tau = (t_1, t_2, ..., t_n),$$

$$H = H_1 \times H_2 \times ... \times H_n\ \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Essendo Σ un semianello che genera $\mathcal{F}$, ne verrà la tesi. La (3.7) è conseguenza del fatto che Γ, soluzione fondamentale dell'operatore del calore, è invariante per rotazioni in $\mathbb{R}^N$. Quindi

$$\begin{aligned} P^{\rho(x)}(X_\tau \in H) &= p(\tau, \rho(x), H) = p(\tau, x, \rho^{-1}(H)) \\ &= P^x(X_\tau \in \rho^{-1}(H)) \\ &= P^x(R^{-1}(X_\tau \in H)) = P^x_R(X_\tau \in H). \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. □

Osservazione 3.21. Come conseguenza dell'osservazione precedente abbiamo che se X_t è un moto Browniano che parte da x e ρ è una rotazione, allora $\rho(X_t)$ è un moto Browniano che parte da $\rho(x)$. Con argomentazioni simili, si dimostra che il moto Browniano è invariante anche per traslazioni, nel senso che, se l è una traslazione di $\mathbb{R}^N$, allora $l(X_t)$ è un moto Browniano che parte da $l(x)$.

Siamo ora in grado di dimostrare che la misura armonica sulla palla euclidea è invariante per rotazione.

Lemma 3.22. *Vale*

$$\mu_B^{x_0}(F) = \mu_B^{x_0}(\rho(F)),\ F \in \mathcal{B}(\partial B) \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $x_0 = 0$. Indichiamo, per semplicità di notazione, $\tau = \tau_B$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \mu_B^0(F) &= P^0(X_\tau \in F) \\ &= P^0_R(X_\tau \in F) \\ &= P^0(R^{-1}(X_\tau \in F)) \\ &= P^0(X_\tau \in \rho^{-1}(F)) = \mu(\rho^{-1}(F)) \end{aligned}.$$

Giustifichiamo i passaggi delle precedenti uguaglianze. La prima è per definizione mentre la seconda si ottiene del lemma precedente. La terza è per definizione. Per verificare la quarta, dobbiamo dimostrare che

$$w \in R^{-1}(X_\tau \in F) \Leftrightarrow w \in (X_\tau \in \rho^{-1}(F)).$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} w \in R^{-1}(X_\tau \in F) &\Leftrightarrow R(w) \in (X_\tau \in F) \\ &\Leftrightarrow X_\tau(R(w)) \in F \\ &\Leftrightarrow R(w)(\tau(R(w))) = R(w)(\tau(w)) \in F \\ &\Leftrightarrow w(\tau(w)) \in \rho^{-1}(F) \\ &\Leftrightarrow w \in (X_\tau \in \rho^{-1}(F)). \end{aligned}$$

Rimane solo da provare che

$$\tau(w) = \tau(R(w)).$$

Ora,

$$\tau(w) = \inf\{t > 0 \mid w(t) \in \partial B\}$$

e

$$\tau(R(w)) = \inf\{t > 0 \mid \rho(w(t)) \in \partial B\},$$

ma osserviamo che $w(t) \in \partial B$ equivale a dire che $|w(t)| = r$. Poichè ρ conserva le norme, abbiamo che

$$\begin{aligned} \tau(w) &= \inf\{t > 0 \mid w(t) \in \partial B\} \\ &= \inf\{t > 0 \mid |w(t)| = r\} \\ &= \inf\{t > 0 \mid |\rho(w(t))| = r\} \\ &= \inf\{t > 0 \mid \rho(w(t)) \in \partial B\}, \end{aligned}$$

cioè

$$\tau(w) = \tau(R(w)).$$

Questo conclude la prova. □

Ora proviamo un risultato di unicità di misure di probabilità, definite sui borelliani del bordo di $B = B(x_0, r)$, invarianti per rotazione.

Lemma 3.23. *Sia μ una misura di probabilità su $\mathcal{B}(\partial B)$ dove $B = B(x_0, r)$, invariante per rotazioni. Allora*

$$\mu = \sigma_r,$$

dove σ_r *è la misura di Haussdorf* $N-1$*-dimensionale normalizzata, cioè,*

$$\sigma_r(F) = \frac{H_{N-1}(F)}{H_{N-1}(B)},\ F \in \mathcal{B}(\partial B) \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione caratteristica di μ

$$\varphi(x) = \int_{\partial B} \exp(i\langle x, y\rangle)\mu(\mathrm{d}y), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Poichè μ è invariante per rotazioni, abbiamo che φ dipende solo dal modulo di x. Infatti, sia ρ una rotazione, si ha

$$\varphi(\rho(x)) = \int_{\partial B} \exp(i\langle \rho(x), y\rangle)\mu(\mathrm{d}y) = \int_{\partial B} \exp(i\langle x, \rho^{-1}y\rangle)\mu(\mathrm{d}y) = \varphi(x).$$

Allora esiste una funzione ψ definita su $\mathbb{R}$, tale che

$$\varphi(x) = \psi(\|x\|).$$

Analogamente, posto

$$\varphi_1(x) = \int_{\partial B(0,1)} \exp(i\langle x, y\rangle)\sigma_1(\mathrm{d}y)$$

esiste una funzione ψ_1 definita su $\mathbb{R}$ tale che

$$\varphi_1(x) = \psi_1(\|x\|).$$

Osserviamo che

$$\varphi_s(x) = \int_{\partial B(0,s)} \exp(i\langle x, y\rangle)\sigma_s(\mathrm{d}y) = \int_{\partial B(0,1)} \exp(i\langle sx, y\rangle)\sigma_1(\mathrm{d}y) = \psi_1(s\|x\|),$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Allora, per ogni $s > 0$, si ha

$$\begin{aligned}\psi(s) = \int_{\partial B(0,s)} \varphi(x)\sigma_s(\mathrm{d}x) &= \int_{\partial B(0,s)} \sigma_s(\mathrm{d}x) \int_{\partial B} \exp(i\langle x, y\rangle)\mu(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{\partial B} \mu(\mathrm{d}y)\psi_1(s\|y\|) = \psi_1(rs).\end{aligned}$$

Conseguentemente abbiamo che

$$\varphi(x) = \psi(\|x\|) = \psi_1(r\|x\|) = \varphi_r(x),$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Per il Teorema di unicità delle funzioni caratteristiche, si ha

$$\mu = \sigma_r.$$

□

Teorema 3.24 (Formula di media generalizzata). *Sia $f \in b\mathcal{B}(\partial D)$. La funzione u, definita in (3.4), verifica la seguente formula di media generalizzata: per ogni aperto C, tale che $\overline{C} \subset D$ e $H_N(C) < \infty$, e per ogni $x \in C$, si ha che*

$$u(x) = \int_{\partial C} u \, d\mu_C^x$$

Dimostrazione. Procediamo per passi, facendo dapprima alcune osservazioni utili.
i) $P^x(\tau_C < \tau_D) = 1$ per ogni $x \in C$.
Infatti, $P^x(\tau_C = \infty) = 0$ perché C ha misura di Lebesgue finita. D'altra parte, $\tau_C(w) < \infty \Rightarrow \tau_C(w) < \tau_D(w)$ poichè è chiaro che $\tau_C(w) \leq \tau_D(w)$ e se fosse $\tau_C(w) = \tau_D(w)$ si avrebbe che $w(\tau_C(w)) \in \partial C \cap \partial D$ che è un assurdo, perché $\partial C \cap \partial D = \emptyset$.
ii) $\tau_D = \tau_D \circ \theta_{\tau_C} + \tau_C$ su $(\tau_C < \tau_D)$.
Infatti

$$(\tau_D \circ \theta_{\tau_C})(w) = \inf\{t > 0, w(t + \tau_C(w)) \notin D\} = (\tau_D - \tau_C)(w).$$

iii) $X_{\tau_D} = X_{\tau_D} \circ \theta_{\tau_C}$ su $(\tau_C < \tau_D)$.
Infatti $X_{\tau_D}(\theta_{\tau_C}(w)) = w(\tau_C(w) + \tau_D(\theta_{\tau_C}(w))$, ma per quanto dimostrato in ii) abbiamo che $w(\tau_C(w) + \tau_D(\theta_{\tau_C}(w)) = w(\tau_D(w)) = X_{\tau_D}(w)$.
iv) $w \in (\tau_C < \tau_D) \Rightarrow (\tau_D(w) < \infty \Leftrightarrow \tau_D(\theta_{\tau_C}) < \infty)$.
Ovvio per ii).
Siamo ora in grado di dimostrare la formula di media generalizzata, utilizzando le osservazioni sopra e la proprietà di Markov forte. Grazie alla i) possiamo scrivere

$$u(x) = E^x(f(X_{\tau_D}) \circ 1_{(\tau_D<\infty)}; \tau_C < \tau_D) =$$

(per la iii) e la iv) abbiamo che)

$$= E^x(f(X_{\tau_D} \circ \theta_{\tau_C}) \circ (1_{(\tau_D<+\infty)} \circ \theta_{\tau_C}); \tau_C < \tau_D) =$$

(utilizzando ora la proprietà di Markov forte, cfr. vedi 2.11con $Y = f(X_\tau) \circ 1_{(\tau_D<+\infty)}$ e $A = (\tau_C < \tau_D)$)

$$= E^x(E^{X_{\tau_C}}(f(X_{\tau_D}) \circ 1_{\tau_D<\infty})) = E^x(u(X_{\tau_C})) = \int_{\partial C} u(y)\mu_C^x(\mathrm{d}y).$$

dove nell'ultima uguaglianza si è utilizzato il fatto che $u \in b\mathcal{B}$. □

Corollario 3.25. *La funzione u, definita in (3.4), è armonica su D. Inoltre vale*

$$\sup_D |u| \le \sup_{\partial D} |f|. \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Come immediata conseguenza della definizione di u, si ha che $u \in b\mathcal{B}$ e vale (3.10). Inoltre, per il Teorema precedente, per ogni x_0, r tali che $\overline{B(x_0, r)} \subseteq D$, posto $B = B(x_0, r)$, vale

$$u(x_0) = \int_{\partial B} u d\mu_B^{x_0} =$$

(per la (3.5) del Teorema 3.19)

$$= \frac{1}{N\, w_N\, r^{N-1}} \int_{\partial B} u\, dH_{N-1}.$$

Allora, per il Teorema 3.3, u è armonica su D. □

3.3 Dato al bordo

Ricordiamo che, essendo $(\tau_D = 0) \in \mathcal{F}_0$, per la legge di Blumenthal si ha che

$$P^x(\tau_D = 0) \in \{0, 1\},$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Definizione 3.26 (Punto regolare). *Un punto $z \in \partial D$ si dice punto regolare per D se $P^z(\tau_D = 0) = 1$.*

Naturalmente se $z \in \partial D$ e $P^z(\tau_D = 0) = 0$, allora z si dice irregolare. Indichiamo con $\partial_r D$ l'insieme dei punti regolari per D.

Osservazione 3.27. Siano D_1, D_2 aperti di $\mathbb{R}^N$ tali che $D_1 \subseteq D_2$. Allora chiaramente $\partial D_1 \bigcap \partial_r D_2 \subseteq \partial_r D_1$.

Teorema 3.28. *Sia $f \in b\mathcal{B}(\partial D)$. Sia u la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet definita da (3.4). Se $z \in \partial_r D$ e f è continua in z, allora*

$$\lim_{x \in D, x \to z} u(x) = f(z).$$

Prima di dimostrare il teorema sopra, proviamo i seguenti due lemmi.

Lemma 3.29. *Per ogni $t > 0$, la funzione*

$$x \mapsto P^x(\tau_D > t)$$

è superiormente semicontinua in $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. Si ha , per $t > 0$,

$$\begin{aligned}
(\tau_D > t) &= \{w \mid w(]0, t]) \subseteq D\} \\
&= \bigcap_{n \geq 1} \{w \mid w(]\frac{t}{n}, t]) \subseteq D\} \\
&= \bigcap_{n \geq 1} \theta_{\frac{t}{n}}^{-1} \{w \mid w(]0, t - \frac{t}{n}]) \subseteq D\}.
\end{aligned}$$

Essendo l'intersezione decrescente, posto

$$f_n(x) = P^x(\theta_{\frac{t}{n}}^{-1} \{w \mid w(]0, t - \frac{t}{n}]) \subseteq D\}),$$

si ha che

$$f_n(x) \to P^x(\tau_D > t),$$

in maniera decrescente per $n \to +\infty$. Osserviamo che

$$f_n(x) = E^x(1_{\{w \mid w(]0, t - \frac{t}{n}] \subseteq D\}} \circ \theta_{\frac{t}{n}}),$$

da cui, per l'Osservazione 2.16, abbiamo che

$$f_n \in C \cap L^\infty,$$

da cui si ha la tesi. $\square$

Lemma 3.30. *Sia* $z \in \partial_r D$. *Allora* $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, \varrho > 0, \exists\, r > 0$ *tale che* $\forall\, x \in D \cap B(z,r)$ *si ha*

$$P^x(\tau_D \geq \tau_{B(z,\varrho)}) < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Osserviamo subito che $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$ si ha $P^x(\tau_{B(x,\frac{\varrho}{2})} > 0) = 1$. Allora si ha che $\exists\, s > 0$ tale che

$$P^x(\tau_{B(x,\frac{\varrho}{2})} \leq s) < \varepsilon.$$

Per il lemma 3.29 abbiamo che

$$\limsup_{n \to +\infty} P^x(\tau_D > s) \leq P^z(\tau_D > s) = 0,$$

essendo z regolare. Dunque, $\exists\, r > 0$ tale che $\forall\, x \in D \cap B(z,r)$ si ha

$$i) P^x(\tau_D > s) < \varepsilon,$$

$$ii) B(x, \frac{\varrho}{2}) \subseteq B(z, \varrho).$$

Quindi, per $x \in D \cap B(z,r)$, si ha, per la ii)

$$P^x(\tau_D \geq \tau_{B(z,\varrho)}) \leq P^x(\tau_D \geq \tau_{B(x,\frac{\varrho}{2})}).$$

Scelto $s > 0$ come sopra si ha

$$P^x(\tau_D \geq \tau_{B(x,\frac{\varrho}{2})}) \leq P^x(\tau_D > s) + P^x(\tau_{B(x,\frac{\varrho}{2})} \leq s) \leq 2\varepsilon.$$

Nella prima disuguaglianza si usa il risultato generale che, per ogni $s > 0$ e X e Y variabili aleatorie,

$$(X \leq Y) \subseteq (X \leq s) \cup (Y > s).$$

$\square$

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema precedente.

Dimostrazione. (del Teorema 3.28) Per la prova del teorema, dobbiamo stimare

$$|E^x(f(X_{\tau_D}); \tau_D < +\infty) - f(z)|$$

$$\leq E^x(|f(X_{\tau_D}) - f(z)|; \tau_D < +\infty) + |f(z)(1 - P^x(\tau_D < +\infty))|$$

$$= I_1 + I_2.$$

Dimostriamo che sia I_1 che I_2 tendono a zero per $x \to z$ con $x \in D$. Consideriamo prima I_2. Per il Lemma 3.29, si ha che

$$\lim_{x \in D, x \to z} P^x(\tau_D > t) \to 0, \, \forall \, t > 0,$$

essendo z regolare per ipotesi. Allora

$$P^x(\tau_D < +\infty) \to 1, \text{ per } x \to z,$$

da cui si ha che

$$I_2 \to 0, \text{ per } x \to z.$$

Consideriamo adesso I_1. Dalla continuità di f, abbiamo che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\varrho > 0$ tale che $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$, per ogni $w \in \partial D \cap B(z, \varrho)$. Per il Lemma 3.30, abbiamo che esiste $r > 0$ tale che

$$P^x(\tau_D \geq \tau_{B(z,\varrho)}) < \varepsilon, \text{ per } \forall \, x \in B(z, r) \cap D. \tag{3.11}$$

Dunque, per ogni $x \in D \cap B(z, r)$, si ha che

$$I_1 \leq E^x(|f(X_{\tau_D}) - f(z)|, \tau_D < \tau_{B(z,\varrho)}) + E^x(|f(X_{\tau_D}) - f(z)|, \tau_{B(z,\varrho)} \leq \tau_D < \infty)$$

per la (3.11)

$$\leq \varepsilon P^x(\tau_D < \tau_{B(z,\varrho)}) + 2\|f\|_\infty P^x(\tau_D \geq \tau_{B(z,\varrho)}) \leq \varepsilon \, (1 + 2\|f\|_\infty).$$

Questo conclude la prova. $\square$

Diamo ora qualche esempio di insieme con bordo regolare e proviamo due criteri per la regolarità.

Esempio 3.31. Siano

$$G_1 = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_1 > 0\},\ G_2 = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_1 < 0\},$$

e

$$F = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_1 = 0\}.$$

Proviamo che $F = \partial_r G_1 \bigcap \partial_r G_2$.
Sia $x \in F$ e $t > 0$. Per la simmetria della distribuzione di X_t, abbiamo

$$P^x(X_t \in G_1) = P^x(X_t \in G_2) = \frac{1}{2}.$$

Allora, per ogni $u > 0$ si ha

$$P^x(\{X_t \in G_1,\ \forall\, t \in [0, u]\}) \leq \frac{1}{2},$$

che implica, indicando con $\tau_{G_1} = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin G_1\}$,

$$P^x(\{\tau_{G_1} \leq u\}) \geq \frac{1}{2}.$$

Da cui segue che

$$P^x(\{\tau_{G_1} = 0\}) \geq \frac{1}{2}.$$

Dalla legge $0 - 1$ di Blumenthal, segue che x è regolare per G_1.
Per l'Osservazione 3.27, segue che x è regolare per $\{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

Illustriamo ora alcune condizioni che garantiscono la regolarità o meno di un punto. La prima tra queste è quella del cono esterno.

Definizione 3.32 (Cono N-dimensionale). *Dati $z \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ e $F \in \mathcal{B}(\partial B(z, r))$ con $H_{N-1}(F) > 0$, chiamiamo cono di vertice z e raggio r ogni insieme della forma*

$$V(z, r) = \{(1 - t)z + tw \mid t \in [0, 1],\ w \in F\}. \tag{3.12}$$

Definizione 3.33 (Proprietà del cono esterno). *Si dice che $z \in \partial D$ ha la proprietà del cono esterno a D se esiste un cono N-dimensionale di vertice z e raggio $r > 0$ contenuto nel complementare di D: in altri termini, se $\exists\, r > 0$, $\exists\, F \in \mathcal{B}(\partial B(z,r))$ con $H_{n-1}(F) > 0$, tale che vale*

$$V(z,r) \subseteq D^c.$$

Prima di dimostrare che la condizione del cono esterno è sufficiente per la regolarità, dobbiamo provare i seguenti lemmi.

Lemma 3.34 (Sup. semicontinuità delle misure finite). *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura con misura finita. Sia (A_n) una successione in $\mathcal{F}$. Poniamo*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

Allora vale

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

Dimostrazione. Osserviamo che $(\cup_{k\geq n} A_k)$ è una successione decrescente di insiemi di misura finita. Applicando le proprietà della misura si ha

$$\mu(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(\bigcup_{k\geq n} A_k) \geq \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

□

Lemma 3.35. *Sia $N \geq 2$, $B = B(0,r)$ e $T_{B_r} = \inf\{t > 0 \mid w(t) \notin B\}$. Allora*

$$P^0(\lim_{r\to 0^+} T_{B_r} = 0) = 1.$$

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che esista w tale che $T_{B_r}(w) \geq \delta > 0$ per ogni $r > 0$. Si ha che

$$w(t) \in \bigcap_{r>0} B(z,r), \quad \forall\, t < \delta,$$

che implicherebbe

$$w(t) = z, \quad \forall\, t < \delta,$$

che è assurdo poiché z è regolare per $\{z\}$ (cfr. Esempio 3.31). □

Teorema 3.36 (del cono esterno). *Se $z \in \partial D$ ha la proprietà del cono esterno a D, allora z è regolare.*

Dimostrazione. Sia $V = V(z, r)$ il cono esterno a D in z, della forma (3.12). Poniamo

$$B_n = B(z, \frac{r}{n}),\ F_n = V \cap \partial B_n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$c = \frac{H_{N-1}(F_n)}{H_{N-1}(\partial B_n)} > 0.$$

Abbiamo

$$(\tau_D = 0) = \{w \mid \exists\, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ decrescente a zero tale che } w(t_n) \notin D\}.$$

Sia ora $w \in \limsup(X_{\tau_B} \in F)$. Posto $t_n = \tau_{B_n}(w)$, si ha che (t_n) è una successione decrescente e, per il Lemma 3.35, $t_n \to 0$, per $n \to +\infty$. Questo implica che $w \in (\tau_D = 0)$. Allora si ha che

$$P^z(\tau_D = 0) \geq P^z(\limsup_{n\to+\infty} (X_{\tau_{B_n}} \in F_n)) \geq \limsup_{n\to+\infty} P^z(X_{\tau_{B_n}} \in F_n) = c > 0.$$

dove nella seconda maggiorazione si è applicato il lemma precedente. Allora per la legge di Blumenthal si ha che

$$P^z(\tau_D = 0) = 1.$$

□

Dimostriamo, ora, un altro criterio di regolarità, valido per $N \geq 2$, chiamato del "cono piatto". Chiamiamo "cono piatto' di vertice z e raggio r, ogni cono $(N-1)$-dimensionale di vertice z e raggio r contenuto in un iperpiano passante per z. Per esempio per $N = 2$, un "cono piatto" è un segmento limitato.

Teorema 3.37. *Se $z \in \partial D$ ed esiste un "cono piatto" di vertice z e raggio r contenuto in D^c, allora $z \in \partial_r D$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre, senza perdita di generalità, $z = 0$ e il "cono piatto" giacente interamente nell'iperpiano $\{x_N = 0\}$. Sia

$$T_n = \inf\{t > \frac{1}{n}, X_N(t) = 0\}.$$

Per l'Esempio 3.31, abbiamo che

$$P^0(\lim_{n\to+\infty} T_n = 0) = 1.$$

Essendo $X_N(t)$ indipendente da

$$Y(\cdot) = \{X_1(\cdot), \dots, X_{N-1}(\cdot)\},$$

si ha che T_n è indipendente da $Y(\cdot)$, e, di conseguenza, si verifica che $Y(T_n)$ ha una distribuzione $(N-1)$-dimensionale invariante per rotazioni. Sia C un cono $(N-1)$-dimensionale con vertice in 0 giacente interamente in D^c. Possiamo supporre

$$C = \{(1-t)z + tw \mid t \in [0,1], w \in F\},$$

con $F \in \mathcal{B}(\partial B(z,r))$, con $H_{N-2}(F) = \theta > 0$, dove

$$B(z,r) = \{x = (x_1, \dots, x_{N-1}, 0) \mid \|x - z\| = r\}.$$

Per continuità abbiamo che $P^0(\lim_{n\to+\infty} Y(T_n) = 0) = 1$. Utilizzando l'invarianza per rotazione di $Y(T_n)$, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} P^0(Y(T_n) \in C) = \theta.$$

Ma poiché $C \in D^c$, abbiamo che

$$P^0(\tau_D = 0) = \lim_{n\to+\infty} P^0(\tau_D \leq T_n) \geq \theta > 0.$$

Applicando la legge di Blumenthal, si ha la tesi. $\square$

Esempio 3.38. Sia S una sfera in $\mathbb{R}^2$ privata di un raggio. Allora tutti i punti di ∂S sono regolari per S.

3.4 Ricorrenza e transitorietà del moto Browniano. Punti irregolari.

Utilizzando i risultati delle sezioni precedenti, possiamo stabilire alcune ulteriori proprietà delle traiettorie browniane. In particolare dimostriamo che il moto Browniano in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^2$ è ricorrente, nel senso che dato un aperto non vuoto, il moto Browniano passa infinite volte attraverso questo aperto con probabilità uno. Inoltre dimostriamo che moto Browniano in $\mathbb{R}^N$, per $N \geq 3$, è transitorio, nel senso che $|X_t| \to +\infty$ per t tendente a $+\infty$ quasi sicuramente. Dimostriamo infine che ogni singoletto $\{x\}$ è polare per il moto Browniano in $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$, nel senso che è nulla la probabilità che il moto passi da x per t positivo. Come conseguenza, proviamo che la nozione di punto regolare introdotta nella Definizione 3.26 coincide con la nozione classica dell'analisi armonica. In particolare, dimostriamo che dato un punto $z_0 \notin \partial_r D$, esiste $f \in C(\partial D)$ tale che, se u è soluzione generalizzata del problema di Dirichlet relativo ad f, si ha $\liminf\limits_{z \to z_0} u(z) < f(z_0)$.
Ricordiamo che le funzioni armoniche-radiali in $\mathbb{R}^N$ sono tutte del tipo:

$$f(x) = \varphi(\|x\|)$$

dove

$$\varphi(R) = \begin{cases} A \ln(R) + B & \text{se N=2,} \\ \\ \dfrac{A}{R^{N-2}} + B & \text{se } N > 2, \end{cases}$$

dove A e B sono costanti arbitrarie.
Incominciamo definendo rigorosamente i concetti di ricorrenza e transitorietà.

Definizione 3.39 (Ricorrenza e transitorietà). *Sia (X_t) un processo stocastico in $\mathbb{R}^N$. Esso si dice:*

- *RICORRENTE se per ogni aperto non vuoto G allora*

$$P^x(\{w \mid \exists\, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}, t_n \uparrow +\infty \ \textit{tale che}\ w(t_n) \in G\}) = 1$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

- *TRANSITORIO se*

$$P^x(\lim_{t\to+\infty}|X_t| = +\infty) = 1$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Definizione 3.40 (Insieme polare). *Sia* (X_t) *un processo stocastico in* $\mathbb{R}^N$. *Un insieme* A *si dice polare per* (X_t) *se per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$ *vale*

$$P^x(\{w \mid \exists\, t > 0 : w(t) \in A\}) = 0.$$

Notazione 3.41. *Utilizzeremo la seguente notazione:*

$$P^x(X_t \in G \ i.o.) = P^x(\{w \mid \exists\,(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}, t_n \uparrow +\infty \ t.c. \ w(t_n) \in G\}).$$

Consideriamo adesso un moto Browniano in $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$.
Fissati a, b reali positivi, consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^N \mid a < \|x\| < b\}.$$

Consideriamo adesso il seguente problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ \\ u = f & \text{su } \partial Q \end{cases}$$

dove $f(x) = \varphi(\|x\|)$ è una funzione armonica-radiale.
Chiaramente il problema ammette una sola soluzione che è

$$u(x) = f(x).$$

D'altra parte anche la funzione

$$x \mapsto E^x(f(X_{\tau_Q}))$$

è soluzione classica dello stesso problema, essendo ∂D regolare per i criteri della sezione precedente e $f \in C(\overline{D})$. Per l'unicità della soluzione abbiamo

$$u(x) = f(x) = E^x(f(X_{\tau_Q})), \quad x \in \overline{Q}.$$

Osserviamo che

$$\partial Q = \partial D(0,a) \cup \partial D(0,b).$$

Dunque abbiamo che:

$$\begin{aligned} f(x) &= E^x(f(X_{\tau_Q})) = \int_{\partial Q} f(y)\mu_Q^x(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{\partial D(0,a)} f(y)\mu_Q^x(\mathrm{d}y) + \int_{\partial D(0,b)} f(y)\mu_Q^x(\mathrm{d}y) \\ &= \varphi(a)P^x(X_{\tau_Q} \in \partial D(0,a)) + \varphi(b)(1 - P^x(X_{\tau_Q} \in \partial D(0,a))). \end{aligned} \tag{3.13}$$

In conclusione abbiamo ottenuto che

$$P^x(X_{\tau_Q} \in \partial D(0,a)) = \frac{\varphi(b) - \varphi(x)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \tag{3.14}$$

Indichiamo ora con

$$T_a = \inf\{t > 0 \mid X_t \in \partial D(0,a)\},$$

cioè T_a è il primo istante in cui il moto si trova a una distanza a dall'origine e analogamente

$$T_b = \inf\{t > 0 \mid X_t \in \partial D(0,b)\}.$$

Osserviamo che Q ha misura di Lebesgue finita, e allora, per ogni x che appartiene a Q,

$$P^x(\tau_Q < +\infty) = 1,$$

in altre parole, con probabilità 1, ogni moto Browniano che parte all'interno di Q esce sicuramente da quest'ultimo in tempo finito. Osserviamo che per uscire da Q abbiamo due possibilità: uscire dal bordo di $D(0,a)$ oppure uscire dal bordo di $D(0,b)$. Nel primo caso abbiamo $T_a < T_b$, mentre nel secondo $T_a > T_b$. Naturalmente una e una sola di queste situazioni si può verificare. Allora, con queste notazioni la (3.14) diventa:

$$P^x(T_a < T_b) = \frac{\varphi(b) - \varphi(x)}{\varphi(b) - \varphi(a)}, \quad a < \|x\| < b \tag{3.15}$$

Prima di dimostrare il teorema di ricorrenza e transitorietà del moto Browniano, dimostriamo la seguente proposizione.

Proposizione 3.42. *Sia $B = B(0, r)$ la sfera di centro origine e raggio r in $\mathbb{R}^N$. Allora*

$$P^0(\lim_{r \to +\infty} T_r = +\infty) = 1.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\exists\, M > 0$ tale che

$$P(E) > 0,$$

dove $E = \{w \mid T_r(w) < M, \forall r > 0\}$. Sia $w \in E$. Abbiamo che funzione $r \mapsto (T_r(w))$, essendo crescente e superiormente limitata, ha limite che chiameremo $T(w)$. Naturalmente $T(w) \leq M$. Questo implica che

$$\lim_{r \to +\infty} |w(T_r(w))| = |w(T(w))| \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte si ha che

$$|w(T_r(w))| = r \to +\infty,$$

per $r \to +\infty$. Ciò è un assurdo. □

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema.

Teorema 3.43 (Ricorrenza e transitorietà). *Il moto Browniano è ricorrente in $\mathbb{R}^2$, transitorio in $\mathbb{R}^N$ per $N \geq 3$. Ogni singoletto $\{x\}$ è polare in $\mathbb{R}^N$ per $N \geq 2$.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $N = 2$.
Da (3.15) abbiamo

$$P^x(T_a < T_b) = \frac{\log(b) - \log(x)}{\log(b) - \log(a)}. \tag{3.16}$$

Fissiamo a e facciamo tendere $b \to +\infty$. Il lato destro dell'uguaglianza (3.16) tende a 1. Così abbiamo

$$P^x(T_a < +\infty) = 1$$

per ogni x, per ogni a positivo. Fissiamo ora $s > 0$ e proviamo che

$$P^x(|X_t| = a,\, t \geq s) = 1.$$

La tesi segue dalla proprietà di Markov: infatti abbiamo

$$P^x(|X_t| = a \text{ per } t \geq s) = E^x(P^{X_s}(T_a < +\infty)) = 1,$$

poiché $(T_a < +\infty) = (|X_t| = a,\, t \geq 0)$ e

$$\theta_s(|X_t| = a,\, t \geq 0) = (|X_t| = a,\, t \geq s).$$

Questo implica che il moto Browniano in $\mathbb{R}^2$ è ricorrente.
Proviamo ora che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\{x_0\}$ è polare per il moto Browniano. Per semplicità sia $x_0 = 0$. Fissiamo ora b e facciamo tendere $a \to 0$ nella (3.16). Chiamiamo

$$T_0 = \inf\{t > 0 \mid X_t = 0\}.$$

Allora per $x \neq 0$, abbiamo

$$P^x(T_0 < T_b) \leq \lim_{a \to 0} P^x(T_a < T_b) = 0$$

per ogni b reale positivo. Per la Proposizione 3.42 abbiamo che

$$P^x(\lim_{r \to +\infty} T_r = +\infty) = 1.$$

Allora per ogni $x \neq 0$ abbiamo

$$P^x(T_0 < +\infty) = 0.$$

Possiamo, però, dire di più. Utilizzando la proprietà di Markov forte abbiamo

$$(X_t = 0,\, t \geq \varepsilon) = (X_t \circ \theta_\varepsilon = 0,\, t \geq 0),$$

allora

$$\begin{aligned} P^0(X_t = 0 \text{ per } t \geq \varepsilon) &= E^0(P^0(X_t = 0 \text{ per } t \geq \varepsilon)) \\ &= E^0(P^0(X_t \circ \theta_\varepsilon = 0,\, t \geq 0)) \\ &= E^0(P^{X_\varepsilon}(T_0 < +\infty)) = 0, \end{aligned}$$

per ogni ε positivo. Così

$$P^0(X_t = 0 \text{ per } t > 0) = 0.$$

In definitiva, abbiamo ottenuto che, per ogni $x \in \mathbb{R}^2$,

$$P^x(T_0 < +\infty) = 0,$$

e questo implica che $\{0\}$ è polare per il moto Browniano in $\mathbb{R}^2$.
Ricordando che la proiezione del moto Browniano in $\mathbb{R}^N$ su qualsiasi piano è ancora un moto Browniano, (cfr. Teorema 2.19), per dimostrare che ogni singoletto $\{x\}$ è polare per il moto Browniano in $\mathbb{R}^N$, basta proiettare il moto Browniano su $\mathbb{R}^2$.

Proviamo ora che il moto Browniano è transitorio in $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$. Dalla 3.15 abbiamo che

$$P^x(T_a < T_b) = \frac{b^{2-N} - \|x\|^{2-N}}{b^{2-N} - a^{2-N}}, \quad a < \|x\| < b.$$

Fissiamo a e facciamo tendere $b \to +\infty$. Il lato destro tende a $\left(\frac{\|x\|}{a}\right)^{2-N}$. Così, per $\|x\| > a$, abbiamo

$$P^x(T_a < +\infty) = \left(\frac{a}{\|x\|}\right)^{n-2} < 1.$$

Fissata una costante $R > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$, utilizzando la proprietà di Markov, per $M > R$, otteniamo

$$\begin{aligned} P^x(\lim_{t\to+\infty} |X_t| \leq \frac{R}{2}) &\leq P^x(|X_t| \leq R \text{ per } t \geq T_M) \\ &= E^x[P^{X_{T_M}}(T_R < +\infty)] = \left(\frac{R}{M}\right)^{N-2}. \end{aligned}$$

Ma l'ultimo termine tende a 0 per $M \to +\infty$, e questo implica che il moto Browniano in $\mathbb{R}^N$, per $N \geq 3$, è transitorio. $\square$

Osservazione 3.44. Il moto Browniano in $\mathbb{R}$ è ricorrente. Sia $a < x < b$ e $T = \inf\{t > 0 : X_t \notin]a, b[\}$. Allora

$$P^x(X_T = a) = \frac{b - x}{b - a},$$

e

$$P^x(X_T = b) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Dimostrazione. Da (3.13), con $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$x = E^x(X_T) = aP^x(X_T = a) + bP^x(X_T = b).$$

Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 3.43 (caso $N = 2$), si ha che

$$P^0(X_t = x \text{ i.o.}) = 1,$$

cioè il moto Browniano in $\mathbb{R}$ è ricorrente. □

Siamo in grado ora di dimostrare che se un punto è irregolare (in senso probabilistico), allora lo è anche in senso classico, ovvero la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet non assume, in generale, il dato al bordo.

Teorema 3.45. *Sia $N \geq 2$ e $z \in \partial D \setminus \partial_r D$, cioè z irregolare. Allora esiste una funzione $f \in C(\partial D)$ tale che*

$$\liminf_{x \to z, x \in D} u(x) < f(z),$$

dove u è la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet definita da (3.4).

Dimostrazione. Possiamo, senza perdita di generalità, supporre D limitato. Sia $f(z) = 1$ e $f < 1$ su $\partial D - \{z\}$. Un esempio di funzione di questo tipo è

$$f(w) = \max\{(1 - \|w - z\|), 0\}.$$

Ricordiamo che, per il moto Browniano in $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$, ogni singoletto $\{z\}$ è polare. Unitamente al fatto che z è irregolare per ipotesi, si ha che

$$P^z(X_{\tau_D} = z) = 0.$$

Giustifichiamo l'uguaglianza sopra. Osserviamo che, poiché D è limitato, $P^z(\tau_D < +\infty) = 1$, cioè X_t esce da D in un tempo finito. X_{τ_D} è il primo istante in cui $X_t \notin D$. Per ipotesi z è irregolare, il che significa che $X_t \in D$ per t piccolo, o in altre parole che X_t parte da z e entra in D. Ma $\{z\}$ è polare, il che significa che $P^z(X_t = z, \forall t > 0) = 0$, e quindi X_t deve uscire da D per un punto di ∂D diverso da z.
Questa osservazione giustifica la seguente disuguaglianza:

$$1 > E^z(f(X_{\tau_D})).$$

Osserviamo che per ogni $r > 0$, indicando con $T_r = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin B(z, r)\}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} E^z(u(X_{T_r}), T_r < \tau_D) &= E^z(E^{X_{T_r}}(f(X_{\tau_D})), T_r < \tau_D) \\ &= E^z(E^z(f(X_{\tau_D}) \circ \theta_{T_r}), T_r < \tau_D), \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dalla proprietà di Markov. Ma, per il Lemma 3.35, si ha che

$$P^z(\lim_{r\to 0^+} T_r = 0) = 1. \tag{3.17}$$

Posto $E_r = \{w \mid T_r(w) < \tau_D(w)\}$, si ha $E_r \subseteq E_s$ per $r < s$ e, per (3.17), se $E = \bigcup_{r>0} E_r$, si ha

$$1 = P^z(E) = \lim_{r\to 0^+} P^z(E_r) = \lim_{r\to 0^+} P^z(T_r < \tau_D).$$

Abbiamo così ottenuto che, per $r \to 0^+$,

$$E^z(E^z(f(X_{\tau_D}) \circ \theta_{T_r}), T_r < \tau_D) \to E^z(E^z(f(X_{\tau_D}))) = E^z(f(X_{\tau_D})).$$

Mettendo insieme queste osservazioni si ha

$$
\begin{aligned}
1 &> E^z(f(X_{\tau_D})) \\
&= \lim_{r\to 0^+} E^z(u(X(T_r)); T_r < \tau_D) \\
&\geq \lim_{r\to 0^+} \left[P^z(T_r < \tau_D) \inf_{x\in B(z,r)\cap D} u(x) \right] \\
&= \lim_{r\to 0^+} P^z(T_r < \tau_D) \lim_{r\to 0^+} \inf_{x\in B(z,r)\cap D} u(x) \\
&= \liminf_{x\to z, x\in D} u(x).
\end{aligned}
$$

Questo conclude la prova. $\square$

Appendice A

RICHIAMI DI TEORIA DELLA MISURA

A.1 Teoremi di Dynkin

In questo appendice richiamiamo alcuni fondamentali risultati della teoria della misura. Nel seguito indicheremo con Ω un insieme diverso dall'insieme vuoto $\emptyset$.

Definizione A.1 ($\sigma-$algebra). *Una famiglia di sottoinsiemi Σ di Ω si dice $\sigma-algebra$ se:*

- *$\emptyset$ e Ω appartengono a Σ;*
- *se $A \in \Sigma$ allora anche $A^c \in \Sigma$;*
- *l'unione numerabile di elementi di Σ appartiene a Σ.*

Definizione A.2 (Famiglia monotona). *Una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{M}$ di Ω si dice famiglia monotona se*

- *$\Omega \in \mathcal{M}$;*
- *se A e $B \in \mathcal{M}$ con $A \subseteq B$ allora $B \setminus A \in \mathcal{M}$;*
- *l'unione crescente di sottoinsiemi di $\mathcal{M}$ appartiene a $\mathcal{M}$.*

Definizione A.3 ($\cap-$*stabile*)**.** *Un famiglia $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$ si dice stabile rispetto all'intersezione ($\cap - stabile$) se per ogni A e $B \in \mathcal{A}$ abbiamo che $A \cap B \in \mathcal{A}$.*

È banale verificare che una $\sigma - algebra$ è una famiglia monotona, ma il contrario non è vero. Abbiamo però la seguente proposizione.

Proposizione A.4. *Ogni famiglia monotona stabile rispetto all'intersezione è una $\sigma - algebra$.*

Dimostrazione. Chiaramente le prime due condizioni della definizione di $\sigma - algebra$ sono verificate. Rimane da provare che l'unione numerabile di elementi di $\mathcal{M}$ appartiene a $\mathcal{M}$. Verifichiamo prima che se A e B appartengono a $\mathcal{M}$, allora la loro unione appartiene ancora a $\mathcal{M}$. Infatti

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c,$$

ma l'intersezione di elementi di $\mathcal{M}$ appartiene ancora a $\mathcal{M}$ per ipotesi e così pure il complementare. Ora, se (A_n) è una successione di elementi di $\mathcal{M}$, poniamo

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Per quanto visto sopra, si ha che $B_n \in \mathcal{M}$. Ma la successione (B_n) è crescente. Allora, dalla terza condizione della definizione di famiglia monotona, si ha

$$B_n \uparrow \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{M}.$$

Questo conclude la prova. $\square$

Sia $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$. Indichiamo con $\sigma(\mathcal{A})$ la $\sigma - algebra$ generata da $\mathcal{A}$, ossia la più piccola $\sigma - algebra$ che contiene $\mathcal{A}$, ovvero l'intersezione di tutte le $\sigma - algebre$ che contengono $\mathcal{A}$. Analogamente, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ indicherà la famiglia monotona generata da $\mathcal{A}$.

Esempio A.5. Consideriamo uno spazio topologico, (X, Θ). La $\sigma - algebra$, $\sigma(\Theta)$, generata dalla topologia Θ si chiama $\sigma - algebra$ dei borelliani. In $\mathbb{R}^N$ con la topologia euclidea i borelliani sono indicati con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Osservazione A.6. Per ogni N naturale abbiamo che

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \ldots \times \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Poniamo per ogni $j = 1, \ldots, N$ la funzione

$$e_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},$$

definita da

$$e_j(x_1, \ldots, x_N) = x_j.$$

Poichè e_j è continua, si ha che $e_j \in m\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})^N = \sigma(e_j,\, 1 \leq j \leq N) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

D'altra parte, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ è generata dagli aperti di $\mathbb{R}^N$, e ogni aperto è l'unione al più numerabile di "ipercubi" aperti della forma

$$\prod_{k=1}^{N}]a_k, b_k[,$$

dove un tale prodotto è in $\mathcal{B}(\mathbb{R})^N$. Allora, per la doppia inclusione si ha

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^N.$$

□

Teorema A.7 (Primo teorema di Dynkin). *Sia $\mathcal{A}$ una famiglia stabile rispetto all'intersezione. Allora $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, basta dimostrare che $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, che per comodità indicheremo solo con $\mathcal{M}$, è stabile rispetto all'intersezione. Ne verrà che $\mathcal{M}$ è una $\sigma - algebra$, allora $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$. D'altra parte, essendo una $\sigma - algebra$ una famiglia monotona, abbiamo che $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Per la

doppia inclusione si ha l'uguaglianza.
Poniamo

$$\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M} \mid A \cap I \in \mathcal{M}, \forall I \in \mathcal{A}\}.$$

Chiaramente $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_1$. Proviamo che $\mathcal{M}_1$ è una famiglia monotona. Ne verrà $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1$. Abbiamo che $\Omega \in \mathcal{M}_1$. Siano A e $B \in \mathcal{M}_1$, con $A \subseteq B$. Allora

$$(B \setminus A) \cap I = (B \cap I) \setminus (A \cap I) \in \mathcal{M}$$

per ogni $I \in \mathcal{A}$. Questo dimostra che $B \setminus A \in \mathcal{M}_1$. Infine, sia (A_n) una successione crescente in $\mathcal{M}_1$. Poniamo $A_n \uparrow A$. Allora, per ogni $I \in \mathcal{A}$, si ha

$$A \cap I = \bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap I) \in \mathcal{M}.$$

Dunque $\mathcal{M}_1$ è una famiglia monotona.
Poniamo ora

$$\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{M} \mid A \cap B \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{M}\}.$$

Per quanto dimostrato sopra, si ha che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_2$. Inoltre, con lo stesso procedimento di prima, si prova che $\mathcal{M}_2$ è una famiglia monotona. Allora $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_2$ e quindi $\mathcal{M}$ è $\cap$-stabile. $\square$

Questo primo teorema di Dynkin è importantissimo e il suo utilizzo nelle dimostrazioni è frequente. In particolare ci dice che se una famiglia monotona contiene una famiglia stabile rispetto all'intersezione allora ne contiene la $\sigma - algebra$ generata.
Introduciamo ora un'altra importante struttura.

Definizione A.8 (Famiglia monotona di funzioni). *Sia $\mathcal{H}$ una famiglia di funzioni su Ω a valori reali, limitate. Si dice che $\mathcal{H}$ è una famiglia monotona di funzioni, se*

- *$\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale;*
- *$\mathcal{H}$ contiene la funzione costante uguale a 1;*

- *se f_n è una successione crescente in $\mathcal{H}$ di funzioni non negative avente limite puntuale f, funzione limitata, allora $f \in \mathcal{H}$.*

Possiamo ora formulare il seguente teorema.

Teorema A.9 (Secondo teorema di Dynkin). *Sia $\mathcal{H}$ una famiglia monotona di funzioni. Sia $\mathcal{A}$ una famiglia $\cap -$ stabile. Se $\mathcal{H}$ contiene le funzioni caratteristiche di $\mathcal{A}$ allora contiene anche le funzioni limitate e misurabili rispetto a $\sigma(\mathcal{A})$.*

Dimostrazione. Iniziamo provando che $1_A \in \mathcal{H}$, $\forall A \in \sigma(\mathcal{A})$. Poniamo

$$\mathcal{M} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) \mid 1_A \in \mathcal{H}\}.$$

Allora $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ per ipotesi e inoltre $\mathcal{M}$ è una famiglia monotona. Allora

$$\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A}).$$

Abbiamo dunque dimostrato che le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili rispetto a $\sigma(\mathcal{A})$ appartengono a $\mathcal{H}$.
Sia ora f una funzione $\sigma(\mathcal{A})$-misurabile, limitata, a valori non negativi. Esiste una successione crescente di funzioni semplici (φ_n), non negative che convergono a f per $n \to +\infty$. Per quanto dimostrato prima, si ha che $\varphi_n \in \mathcal{H}$ e per la proprietà tre della definizione di famiglia di funzioni monotona, si ha che $f \in \mathcal{H}$.
Infine, sia $f \in b\sigma(\mathcal{A})$. Allora

$$f = f^+ - f^-,$$

con f^+ e f^- $\sigma(\mathcal{A})$-misurabili, non negative e limitate. Allora f^+ e $f^- \in \mathcal{H}$, da cui $f \in \mathcal{H}$, in quanto $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale. Questo conclude la prova □

A.2 Teorema di estensione di Carathéodory

In questa sezione definiamo la misura e gli spazi di misura. Dimostriamo il famoso Teorema di Carathéodory, su cui si basa il modo più comune di costruire le misure. Definiremo, infine, la misura prodotto e la misura di Lebesgue-Stieltjes.

Definizione A.10 (Semianello). *Una famiglia* $\Lambda \subseteq P(\Omega)$ *si dice semianello se*

- $\emptyset \in \Lambda$*;*
- Λ *è stabile rispetto all'intersezione;*
- *se* $A, B \in \Lambda$ *allora la differenza* $A \setminus B$ *si scrive come unione disgiunta e finita di elementi di* Λ*.*

Esempio A.11. In $\mathbb{R}$, la famiglia $\Lambda_1 = \{]a, b], a < b\} \cup \{\emptyset\}$ è un semianello. Più in generale

$$\Lambda_N = \{\prod_{k=1}^{N}]a_k, b_k], a_k < b_k\} \cup \{\emptyset\}$$

è un semianello su $\mathbb{R}^N$ e vale

$$\sigma(\Lambda_N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Dimostrazione. Per semplicità, sia $N = 1$. Dimostriamo prima che Λ_1 è una semianello. La prima condizione è banalmente verificata. Dimostriamo allora che Λ_1 è stabile rispetto all'intersezione. Siano $]a, b],]c, d] \in \Lambda_1$. Supponiamo che la loro intersezione sia non vuota, altrimenti non dobbiamo dimostrare niente. Allora possiamo supporre, senza perdita di generalità, che $c < b$. Abbiamo che

$$]a, b] \cap]c, d] =]c, b].$$

Verifichiamo ora l'ultima condizione della definizione di semianello. Siano $]a, b],]c, d] \in \Lambda_1$. Possiamo supporre che $]c, d] \subseteq]a, b]$. Allora, si ha che

$$]a, b] \setminus]c, d] =]a, c] \cup]d, b],$$

dove l'unione è disgiunta.

Questo dimostra che Λ_1 è un semianello.

Dimostriamo ora che la $\sigma - algebra$ generata da Λ_1 è la $\sigma - algebra$ dei borelliani. Fissiamo un $a, b \in \mathbb{R}$. Abbiamo che

$$]a, b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a, b + \frac{1}{n}[.$$

Allora, essendo l'intersezione numerabile di aperti, si ha che $]a, b] \in \mathcal{B}$. Dimostriamo ora l'inclusione contraria, cioè che ogni aperto G di $\mathbb{R}$ è contenuto in $\sigma(\Lambda_1)$. Ma essendo G l'unione numerabile di aperti, è sufficiente mostrare che, per $a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$]a, b[\in \sigma(\Lambda_1).$$

Considerando $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, si ha che

$$]a, b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a, b - \frac{\varepsilon}{n}].$$

Allora abbiamo che $]a, b[\in \sigma(\Lambda_1)$.
Questo conclude la prova. $\square$

Diamo ora il concetto di misura su un semianello.

Definizione A.12 (Misura). *Sia Λ un semianello. Una funzione*

$$\mu : \Lambda \to [0, \infty],$$

si dice misura su Λ se

- $\mu(\emptyset) = 0$*;*
- *se (A_n) è una successione di insiemi disgiunti di Λ tale che*

  $$\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \Lambda$$

  allora

  $$\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

Definizione A.13 (Spazio di misura). *Sia $\mathcal{F}$ una $\sigma - algebra$ su Ω e μ un misura su $\mathcal{F}$. Chiamiamo spazio di misura la terna*

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mu).$$

Richiamiamo brevemente alcune proprietà degli spazi di misura. Per le dimostrazioni, si veda, ad esempio, il libro di Williams “Probability with Martingales” [9], capitolo 1.

1. (monotonia) se $A, B \in \mathcal{F}$ con $A \subseteq$B allora $\mu(A) \leq \mu(B)$;
2. (subadditività) sia (A_n) una successione di elementi di $\mathcal{F}$, allora
$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \mu(\sum_{n\geq 1} A_n);$$
3. sia (A_n) una successione crescente in $\mathcal{F}$, allora
$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n);$$
4. sia (A_n) una successione decrescente in $\mathcal{F}$ tale che $\mu(A_1) < +\infty$, allora
$$\mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Definizione A.14 (Misura σ-finita). *Una misura μ su (Ω, Λ) si dice σ-finita se esiste una successione (A_n) di elementi di Λ tale che:*

- $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} A_n$;
- $\mu(A_n) < +\infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Proposizione A.15 (Unicità della misura). *Siano μ e ν due misure σ-finite su $\sigma(\mathcal{A})$ dove $\mathcal{A}$ è stabile rispetto all'intersezione. Se $\mu(A) = \nu(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ allora $\mu = \nu$.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) < +\infty$. Poniamo

$$\mathcal{M} = \{B \in \sigma(\mathcal{A}) \mid \mu(B) = \nu(B)\}.$$

Allora per ipotesi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Basta provare che $\mathcal{M}$ è una famiglia monotona: ne verrà $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$ in base al Teorema di Dynkin. Dimostriamo, dunque, che $\mathcal{M}$ soddisfa le tre condizioni richieste per essere una famiglia monotona. La prima è banalmente verificata, infatti $\Omega \in \mathcal{M}$ per ipotesi. Proviamo la seconda. Poiché le misure sono finite abbiamo che: per ogni A e B con A$\subseteq$B,

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B - A).$$

Quindi $B \setminus A \in \mathcal{M}$. Infine sia (A_n) una successione crescente di sottoinsiemi di $\mathcal{M}$ e indichiamo con A l'unione di tali sottoinsiemi. Allora $\mu(A_n) = \nu(A_n)$ per ipotesi. Sfruttando le proprietà della misura, abbiamo che

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \nu(A_n) = \nu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \nu(A).$$

Allora $A \in \mathcal{M}$.
Abbiamo quindi dimostrato che $\mathcal{M}$ è una famiglia monotona.
Siano ora μ, ν due misure σ-finite. Allora esiste una successione $(A_n) \in \sigma(\mathcal{A})$ crescente tale che

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} A_n,$$

e

$$\mu(A_n) = \nu(A_n) < +\infty.$$

Consideriamo le seguenti misure finite su $\sigma(\mathcal{A})$ definite da

$$\mu_n(B) = \mu(B \cap A_n),\ B \in \sigma(\mathcal{A}),$$

e

$$\nu_n(B) = \mu(B \cap A_n),\ B \in \sigma(\mathcal{A}).$$

Per ipotesi abbiamo che $\mu_n = \nu_n$ su $\mathcal{A}$, ma per quanto visto prima, essendo μ_n, ν_n misure finite, abbiamo che $\mu_n = \nu_n$ su $\sigma(\mathcal{A})$. Allora questo implica che $\mu = \nu$ su $\sigma(\mathcal{A})$. Infatti, per ogni $B \in \sigma(\mathcal{A})$, si ha

$$\mu(B) = \lim_{n \to +\infty} \mu_n(B) = \lim_{n \to +\infty} \nu_n(B) = \nu(B).$$

Questo conclude la prova. □

Enunciamo ora il seguente fondamentale teorema: dato un semianello Λ e una misura μ σ-finita su Λ è possibile definire una misura ν su $\sigma(\Lambda)$, che su Λ coincide con μ. Per dimostrare tutto ciò, dobbiamo introdurre una “generalizzazione” della misura, chiamata misura esterna.

Definizione A.16 (Misura esterna). *Sia Ω un insieme e indichiamo con $\mathcal{P}(\Omega)$ l'insieme delle parti di Ω. Una funzione*

$$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0; +\infty]$$

si dice misura esterna se:

- $\mu^*(\emptyset)$*=0.*
- *se (A_n) è una successione di sottoinsiemi di Ω, allora*

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Teorema A.17 (di estensione di Carathéodory). *Siano Λ un semianello su Ω e μ una misura σ-finita su Λ. Esiste ed è unica una misura su $\sigma(\Lambda)$ che coincide con μ su Λ.*

Dimostrazione. Articoliamo la dimostrazione in passi.
1 PASSO: Definiamo una misura esterna su Ω. Per ogni $E \subseteq \Omega$ poniamo

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \mid E \subseteq \cup A_n,\ A_n \in \Lambda\}.$$

Verifichiamo che è effettivamente una misura esterna.
Chiaramente $\mu^*(\emptyset) = 0$. Infatti basta considerare $A_n = \emptyset$ per ogni n.
Sia ora $E = \bigcup E_n$. Dobbiamo provare che

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n).$$

Se $\sum \mu^*(E_n) = +\infty$ non c'e niente da dimostrare. Sia allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n) < +\infty.$$

Per ogni n siano $A_{nj} \in \Lambda$ tali che

$$E_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_{nj}.$$

Allora si ha

$$+\infty > \frac{\varepsilon}{2^n} + \mu^*(E_n) > \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_{nj}).$$

Osserviamo che

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{nj}.$$

Essendo la misura positiva, otteniamo

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_{nj}) \big) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\frac{\varepsilon}{2^n} + \mu^*(E_n) \big) \\ &= \varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n). \end{aligned}$$

Facendo il limite per $\varepsilon \to 0^+$, si ha la tesi.
2 PASSO: Dimostriamo che μ^* è un prolungamento di μ sull'insieme delle parti di Ω. Dobbiamo provare che se $A \in \Lambda$, allora

$$\mu(A) = \mu^*(A).$$

Osserviamo che, se $A_i \in \Lambda$ disgiunti e $B \in \Lambda$ tale che $\bigcup A_i \subseteq B$, allora

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \leq \mu(B).$$

Infatti possiamo scrivere

$$B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \ \cup \ (B \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i),$$

dove l'unione è disgiunta. Ma anche l'unione $(B \setminus \bigcup A_i)$ è disgiunta. Allora, per le proprietà del semianello si ha

$$(B \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{m} C_i,$$

dove $C_i \in \Lambda$ disgiunti. Allora

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{m} \mu(C_i) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i).$$

Proviamo ora che $\mu(A) = \mu^*(A)$ per $A \in \Lambda$. Osserviamo che possiamo sempre scrivere

$$A = A \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset.$$

Allora si ha

$$\mu^*(A) \leq \mu(A).$$

Proviamo la disuguaglianza contraria.
Sia $A \subseteq \bigcup A_n$ con $A_n \in \Lambda$. Osserviamo che

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \big(A \cap A_n\big) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n,$$

con $B_n \in \Lambda$, essendo il semianello stabile rispetto all'intersezione. Possiamo scrivere

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \big(B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_j\big),$$

dove l'unione è disgiunta e $B_n \setminus \bigcup B_j$ è la differenza di elementi di Λ. Allora, per le proprietà del semianello, esiste una famiglia finita $C_j \in \Lambda$ disgiunti, tali che

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{j} C_j.$$

Abbiamo così

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j} \mu(C_j).$$

Essendo $\bigcup C_n \subseteq B_n$ per ogni n, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j} \mu(C_j) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Abbiamo così trovato che

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n),$$

per ogni ricoprimento A_n di A. Allora, facendo l'estremo inferiore al variare dei ricoprimenti, trovo

$$\mu(A) \leq \mu^*(A).$$

3 PASSO: Costruiamo, a partire da una misura esterna, una σ-algebra. Poniamo

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq \Omega \mid \forall\, E \subseteq \Omega,\, \mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)\}.$$

Verifichiamo che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra.
Chiaramente $\emptyset \in \mathcal{M}$ poichè $\mu^*(\emptyset \cap E) = \mu^*(\emptyset) = 0$, e $\mu^*(\Omega \cap E) = \mu^*(E)$. Analogamente $\Omega \in \mathcal{M}$.
Ora che se $A \in \mathcal{M}$ allora anche $A^c \in \mathcal{M}$, poichè la definizione è simmetrica.
Dimostriamo ora che se (A_n) è una successione di elementi di $\mathcal{M}$, allora $\bigcup(A_n) \in \mathcal{M}$. Sia $E \subseteq \Omega$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geq \mu^*(A_1 \cap E) + \mu^*((A_1)^c \cap E) \\
&\geq \mu^*(A_1 \cap E) + \mu^*((A_1)^c \cap A_2 \cap E) + \mu^*(E \cap (A_1)^c \cap (A_2)^c)
\end{aligned}$$

e ragionando per induzione, al passo n otteniamo

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*\big(E \cap A_k - \bigcup_{j<k} A_j\big) + \mu^*\big(E \cap \bigcap_{k=1}^{n} (A_k)^c\big).$$

Facendo il limite per $n \to +\infty$, otteniamo

$$\begin{aligned} \mu^*(E) \quad &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(E \cap A_k \setminus \bigcup_{j<k} A_j) + \mu^*(E \cap \bigcap_{j=1}^{+\infty} (A_j)^c) \\ &\geq \mu^*\big(E \cap \bigcup_{k\geq 1} (A_k \setminus \bigcup_{j<k} A_j)\big) + \mu^*\big(E \cap \bigcap_{j=1}^{+\infty} (A_j)^c\big) \end{aligned}$$

Osserviamo che $\bigcup (A_k \setminus \bigcup_{j<k} A_j) = \bigcup A_k$. Allora otteniamo che

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\big(E \cap \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\big) + \mu^*\big(E \cap (\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j)^c\big).$$

Essendo la disuguaglianza contraria sempre verificata, abbiamo che $\bigcup A_n \in \mathcal{M}$. Abbiamo così dimostrato che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra.
4 PASSO: Dimostriamo che μ^* ristretta a $\mathcal{M}$ è effettivamente una misura.
Chiaramente $\mu^*(\emptyset) = 0$. Rimane da dimostrare che se $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ dove l'unione è disgiunta, abbiamo

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Chiaramente, abbiamo

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Proviamo la disuguaglianza contraria. Abbiamo

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*\big(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \cap A_k\big) + \mu^*(\emptyset).$$

Osserviamo che, essendo A_k disgiunti, abbiamo che $A_k - \bigcup_{j<k} A_j = A_k$. Allora il secondo membro dell'uguaglianza sopra è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Allora μ^* ristretta a $\mathcal{M}$ è una misura.

5 PASSO: Dimostriamo ora che se $A \in \Lambda$, allora A è μ^*-misurabile. Sia $E \subseteq \Omega$. Dobbiamo provare che

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E),$$

essendo la disuguaglianza contraria verificata. Consideriamo un ricoprimento di E. Siano $A_n \in \Lambda$ tali che $E \subseteq \bigcup A_n$. Poichè

$$A \cap E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap A_n),$$

otteniamo che

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap A_n).$$

Allo stesso modo, poichè

$$A^c \cap E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A^c \cap A_n),$$

otteniamo che

$$\mu^*(A^c \cap E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A^c \cap A_n).$$

Allora

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\mu^*(A \cap A_n) + \mu^*(A^c \cap A_n)\Big).$$

Osserviamo che $A^c \bigcap A_n = \bigcup C_j$, dove $C_j \in \Lambda$, C_j disgiunti. Allora

$$\mu^*(A^c \cap A_n) = \mu^*(\bigcup_j C_j) \leq \sum_j \mu^*(C_j) = \sum_j \mu(C_j).$$

Osserviamo anche che

$$A_n = (A \cap A_n) \, \cup \, \big(\bigcup_j C_j\big)$$

dove l'unione è disgiunta. Allora

$$\mu(A_n) = \mu(A \cap A_n) + \sum_j \mu(C_j) \geq \mu^*(A \cap A_n) + \mu^*(A^c \cap A_n).$$

Abbiamo così provato che

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Essendo questo valido per ogni ricoprimento (A_n) di E, trovo

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E).$$

Questo conclude la prova. □

Un'importante applicazione del Teorema di Carathéodory permette di definire la misura prodotto di due misure. Abbiamo il seguente teorema.

Teorema A.18 (Misura prodotto). *Siano μ, ν due misure σ-finite rispettivamente definite sulle $\sigma - algebre$ $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$. Allora l'insieme*

$$\Lambda = \{A \times B \mid A \in \mathcal{F}_1 \text{ e } B \in \mathcal{F}_2\},$$

è un semianello. Sia

$$\pi : \Lambda \to [0, +\infty]$$

definita da

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Si ha che π è una misura sul semianello Λ. In base al Teorema di Caratheodory, esiste ed è unica la misura, che chiameremo misura prodotto di μ e ν e indicheremo con $\mu \otimes \nu$, su $\sigma(\Lambda)$ che coincide con π su Λ.

Dimostrazione. Dimostriamo che Λ è un semianello.
Chiaramente, poichè $\emptyset \in \mathcal{F}_1$ e $\emptyset \in \mathcal{F}_2$, si ha che $\emptyset \in \Lambda$.
Inoltre Λ è stabile rispetto all'intersezione. Infatti, siano A e $B \in \mathcal{F}_1$ e C e $D \in \mathcal{F}_2$. Allora

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Ma $A \cap B \in \mathcal{F}_1$ e ugualmente $C \cap D \in \mathcal{F}_2$, essendo una $\sigma - algebra$ stabile rispetto all'intersezione. Allora

$$(A \times B) \cap (C \times D) \in \Lambda.$$

Proviamo ora che la differenza di due elementi di Λ si scrive come unione disgiunta e finita di elementi di Λ. Siano $(A \times B)$ e $(C \times D) \in \Lambda$. Poniamo, senza perdita di generalità, $(C \times D) \subseteq (A \times B)$. Allora

$$\begin{aligned}
(A \times B) \setminus (C \times D) \quad & = \{(x, y) \in A \times B |\, (x, y) \notin C \times D\} \\
& = \{(x, y) \in A \times B | x \notin C\} \cup \{(x, y) \in A \times B | y \notin D\} \\
& = (A \setminus C) \times B \,\cup\, \big(A \times (B \setminus D)\big) \\
& = (A \setminus C) \times B \,\cup\, \big((A \setminus C) \times (B \setminus D)\big) \cup \\
& \quad \cup \big(C \times (B \setminus D)\big) \\
& = (A \setminus C) \times B \cup \big(C \times (B \setminus D)\big).
\end{aligned}$$

Osserviamo che l'unione è disgiunta. Abbiamo così dimostrato che Λ è un semianello.

Dimostriamo ora che π è una misura su Λ.

Chiaramente $\pi(\emptyset) = 0$.

Sia $A \times B = \bigcup_{n \geq 1} (A_n \times B_n) \in \Lambda$, dove l'unione è disgiunta. Sia $x \in A$. Abbiamo

$$\big(\{x\} \times \Omega\big) \cap (A \times B) = \big(\{x\} \cap A\big) \times B = \{x\} \cap B.$$

Allora

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \big(A_n \cap \{x\}\big) \times \big(B_n \cap \Omega\big) = \bigcup_{n=1, x \in A_n}^{+\infty} \{x\} \times B_n = \{x\} \times \bigcup_{n=1, x \in A_n}^{+\infty} B_n.$$

Allora

$$B = \bigcup_{n=1, x \in A_n}^{+\infty} B_n.$$

Osserviamo che l'unione è disgiunta. Essendo ν una misura, abbiamo che

$$\nu(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(B_n) 1_{A_n}(x).$$

Integrando su A rispetto a μ, otteniamo

$$\begin{aligned}\mu(A)\nu(B) &= \int_A \nu(B)d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A \nu(B_n)1_{A_n}(x)\mu(dx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(B_n)\mu(A_n).\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\pi(A \times B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \pi(A_n \times B_n).$$

Allora π è una misura su Λ.
A questo punto, basta applicare il Teorema di Carathéodory e si ha la tesi.

□

Un'altra applicazione del Teorema di Carathéodory permette di definire la misura di Lebesgue-Stieltjes.

Teorema A.19 (Misura di Lebesgue-Stieltjes). *Sia*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

una funzione

- *non decrescente;*
- *continua a destra, nel senso che, per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a);$$

- *tale che*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Allora, esiste un'unica misura μ_F *su* $\mathcal{B}$ *tale che, per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$*, vale*

$$F(b) - F(a) = \mu_F(]a, b]).$$

Dimostrazione. Sia

$$S = \{]a, b] \mid a < b\} \cup \{\emptyset\},$$

e sia

$$\mu_F : S \to [0, +\infty[,$$

definita da

$$\mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a).$$

Allora S è un semianello e μ_F è una misura su F.

Per il Teorema di Carathéodory, μ_F si prolunga in modo unico a una misura una $\sigma - algebra$ che contiene $\sigma(S)$. Tale misura è detta misura di Lebesgue-Stieltjes associata a F.

Abbiamo già precedentemente dimostrato che S è un semianello.

Dimostriamo che μ_F è una misura su S.

Occorre solo dimostrare che μ_F sia numerabilmente additiva su S. Sia (A_n) una successione in S tale che gli elementi siano a due a due disgiunti e la loro unione stia in S. Poniamo

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

1 PASSO: Dimostriamo che

$$\sum_{n \geq 1} \mu_F(A_n) \leq \mu_F(A).$$

Proviamo prima che, per ogni $A_1, \ldots, A_p \in S$ disgiunti tali che

$$\bigcup_{k=1}^{p} A_k \subseteq A \in S,$$

vale

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_F(A_k) \leq \mu_F(A).$$

Siano
$$A_k =]a_k, b_k], \quad \text{con } a_k < b_k < a_{k+1},$$
e sia
$$A =]a, b].$$
Allora
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} \mu_F(]a_k, b_k]) &= \sum_{k=1}^{p} F(b_k) - F(a_k)\\ &\leq \sum_{k=1}^{p-1} F(a_{k+1}) - F(a_k) + F(b_p) - F(a_p)\\ &\leq F(b) - F(a_1)\\ &\leq F(b) - F(a) = \mu_F(A).\end{aligned}$$
Sia ora (A_n) una successioni di elementi di S a due a due disgiunti. Poniamo
$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in S.$$
Poiché, per quanto visto prima, per ogni $p \in \mathbb{N}$, vale
$$\sum_{k=1}^{p} \mu_F(A_k) \leq \mu_F(A),$$
si ha la tesi del 1 PASSO.
2 PASSO: Dimostriamo che
$$\sum_{n \geq 1} \mu_F(A_n) \geq \mu_F(A).$$
Per prima cosa proviamo, per induzione su p, che se $A =]a, b]$ e $A_k =]a_k, b_k]$ con $k = 1, \ldots, p$, tale che
$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{p}]a_k, b_k[,$$

vale

$$\mu_F(A) \leq \sum_{k=1}^{p} \mu_F(A_k). \tag{A.1}$$

Per $p = 1$ è ovvio.

Supposta vera per p, dobbiamo provare che vale per $p+1$. Siano

$$A_1, \dots, A_{p+1} \in S,$$

tali che

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{p+1}]a_k, b_k[.$$

Possiamo sempre supporre, senza perdita di generalità, che

$$b_{p+1} = \max_{1 \leq k \leq p+1} \{b_k\}.$$

Osserviamo che, in queste condizioni, deve essere

$$b_{p+1} \geq b.$$

D'altra parte, supponiamo che

$$a < a_{p+1} < b,$$

altrimenti tutto diventa banale. In queste condizioni, esiste $\epsilon > 0$ tale che $a_{p+1} + \epsilon < b$ e valga

$$[a, a + \epsilon] \subseteq \bigcup_{k=1}^{p}]a_k, b_k[.$$

Di conseguenza si ha

$$\begin{aligned} \mu_F(]a, b]) &= \mu_F(]a, a_{p+1} + \epsilon]) + \mu_F(]a_{p+1} + \epsilon, b]) \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} \mu_F(]a_k, b_k]) + \mu_F(]a_{p+1}, b_{p+1}]), \end{aligned}$$

da cui (A.1). Proviamo ora la tesi del 2 PASSO.

Siano $A, (A_n)$ come nelle ipotesi. Fissato $\epsilon > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, \delta_n > 0$, tali che

$$F(b_n + \delta_n) - F(b_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Abbiamo che
$$[a+\epsilon,b]\subseteq\bigcup_{n\geq 1}]a_n,b_n+\delta_n[,$$
ed essendo $[a+\epsilon,b]$ compatto, possiamo assumere, a meno di riordinare gli A_n,
$$[a+\epsilon,b]\subseteq\bigcup_{k=1}^{p}]a_k,b_k+\delta_n[.$$
Per (A.1) si ha
$$\begin{aligned}\mu_F(]a+\epsilon,b] &\leq\sum_{k=1}^{p}\mu_F(]a_k,b_k+\delta_n])\\ &=\sum_{k=1}^{p}\mu_F(A_k)+\frac{\epsilon}{2^n}\\ &\leq 2\epsilon+\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_F(A_k).\end{aligned}$$
Sfruttando l'ipotesi di continuità a desta della F, facendo il limite per $\epsilon\to 0^+$, si ha
$$\mu_F(]a+\epsilon,b[)\to\mu_F(A),$$
da cui la tesi.

Questo conclude la prova del teorema. □

Esempio A.20. Se $F(x)=x$ per ogni x reale allora la misura di L-S è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$. Ovviamente se siamo in $\mathbb{R}^n$ la misura di L-S sarà quella di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

Esempio A.21. Se $F(x)=1_{[x;+\infty]}$ allora la misura di L-S è la misura di Dirac centrata in x.

Osservazione A.22. Se F non è continua a destra, allora μ_F può non essere numerabilmente additiva, e dunque può non essere una misura. Per esempio, basta considerare
$$F=1_{]0,+\infty[},$$

e

$$A_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}].$$

Si ha che

$$\mu_F(A_n) = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

mentre

$$\mu_F(\bigcup_{n\geq 1}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]) = \mu_F(]0, 1]) = 1.$$

Dunque, l'ipotesi di continuità a destra è fondamentale.

A.3 Teorema di Lebesgue-Nikodym-Radon

In questa sezione introduciamo le funzioni misurabili e l'integrazione rispetto a una misura μ. Infine, dimostreremo il famoso Teorema di Lebesgue-Nikodym-Radon. Nel seguito la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ indicherà uno spazio di misura.

Definizione A.23 (Funzione misurabile). *Una funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ si dice misurabile rispetto a $\mathcal{F}$, e scriveremo $f \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, se la controimmagine di ogni borelliano mediante f appartiene a $\mathcal{F}$, cioè $f^{-1}(H) \in \mathcal{F}$, per ogni $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*

Notazione A.24. *D'ora in poi indicheremo con $m\mathcal{F}^+(\Omega, \mathbb{R})$ l'insieme della funzioni misurabili non negative, e con $b\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ l'insieme delle funzioni da Ω a valori in $\mathbb{R}^N$ misurabili limitate.*

Proposizione A.25. *Una funzione $f \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ se e solo se ciascuna delle sue componenti $f_k \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$, per $k = 1, \ldots, N$.*

Dimostrazione. Proviamo dapprima la necessità. Basta considerare la funzione

$$e_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},$$

definita da

$$e_k(x) = x_k.$$

In altri termini, e_k è la proiezione sull'asse k-esimo. Poiché $e_k \in m\mathcal{B}$, allora anche

$$e_k \circ f = f_k \in m\mathcal{F}.$$

Proviamo ora l'equivalenza contraria.
Supponiamo che $f_k \in m\mathcal{F}$ per ogni $k = 1, \ldots, N$. Dobbiamo provare che $f^{-1}(H) \in \mathcal{F}$ per ogni $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Utilizziamo il primo Teorema di Dynkin.
Poniamo

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}.$$

Proviamo che $\mathcal{M}$ è una famiglia monotona.
Chiaramente $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$.
Siano A e $B \in \mathcal{M}$, con $A \subseteq B$. Allora, poiché

$$f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$$

ed essendo $f^{-1}(B)$ e $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ per ipotesi, si ha che

$$f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Ciò implica che

$$B \setminus A \in \mathcal{M}.$$

Proviamo infine che se (A_n) è una successione crescente di elementi di $\mathcal{M}$, allora $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}$. Questo segue dal fatto che

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}.$$

Rimare da provare che

$$\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Poniamo

$$S = \{\prod_{k=1}^{N} A_k, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Si verifica immediatamente che S è $\cap$-stabile ed inoltre $S \subseteq \mathcal{M}$. Infatti si ha che

$$f^{-1}(\prod_{k=1}^{N} A_k) = \bigcap_{k=1}^{N} f_k^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Inoltre per l'Osservazione A.6 si ha che

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \sigma(S).$$

Utilizzando il primo Teorema di Dynkin, si ha che $\mathcal{M}$ contiene $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. D'altra parte $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ dalla definizione. Per la doppia inclusione, si ha la tesi. □

Definiamo ora l'integrale rispetto a una misura μ.

Definizione A.26 (Funzione semplice). *Siano $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ e siano $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, insiemi disgiunti. Una funzione del tipo*

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} c_n 1_{(A_n)}(x),$$

si dice semplice.

Se f è una funzione semplice, posto $A = \bigcup A_K$, si pone

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k).$$

Per ogni $g \in m\mathcal{F}^+(\Omega, \mathbb{R})$, si pone

$$\int_\Omega g d\mu = \int_\Omega g(x)\mu(dx) = \sup\Big\{ \int_\Omega f(x)\mu(dx) | f \leq g,\ f \text{ semplice}\Big\}.$$

Una funzione $f \in m\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ si dice integrabile (rispettivamente sommabile) quando almeno una tra (rispettivamente entrambe) le funzioni f^+ e f^- ha integrale finito. In tal caso si pone

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu.$$

Un teorema che sarà molto importante in seguito è il famoso Teorema di Lebesgue-Nikodym-Radon. Prima di enunciarlo abbiamo bisogno di un'altra definizione.

Definizione A.27 (Misura assolutamente continua). *Sia $\mathcal{F}$ una $\sigma-$algebra su Ω. Siano μ e ν due misure su $(\Omega, \mathcal{F})$. Allora μ si dice ν-assolutamente continua se per ogni $A \in \mathcal{F}$ con $\nu(A) = 0$, si ha che $\mu(A) = 0$.*

Siamo ora in grado di enunciare il seguente teorema.

Teorema A.28 (Lebesgue-Nikodym-Radon). *Siano μ e ν due misure σ-finite su $(\Omega, \mathcal{F})$. Esiste un'unica funzione $h \in m\mathcal{F}^+(\Omega, \mathbb{R})$ ed esiste $A \in \mathcal{F}$, con $\mu(A) = 0$ tale che*

$$\int_\Omega f(w)\nu(dw) = \int_\Omega f(w)h(w)\mu(dw) + \int_A f(w)\nu(dw)$$

per ogni $f \in m\mathcal{F}^+(\Omega, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Articoliamo la dimostrazione in due passi.
1 PASSO: Dimostriamo il teorema nel caso in cui le due misure sono finite. Considero il seguente operatore lineare

$$T : L^2(\Omega, \mu + \nu) \to \mathbb{R},$$

così definito

$$f \mapsto \int_\Omega f(w)\nu(dw).$$

L'operatore T, nel caso in cui f è sommabile rispetto a ν, è ben definito ed inoltre vale

$$|T(f)| \leq (\nu(\Omega))^2 \|f, L^2\|.$$

Osserviamo che T è lineare e continuo. Per il Teorema di Riesz, esiste $g \in L^2(\Omega, \mu + \nu)$ tale che

$$T(f) = \int_\Omega f(w)g(w)(\mu + \nu)(dw).$$

Essendo il prodotto fg sommabile, si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(w)g(w)(\mu + \nu)(dw) &= \int_\Omega f(w)g(w)\mu(dw) + \int_\Omega f(w)g(w)\nu(dw) \\ &= \int_\Omega f(w)\nu(w).\end{aligned}$$

Guardiamo come è fatta g.

Consideriamo l'insieme

$$C = \{x \in \Omega \mid \ g(x) < 0\} = \cup \{x \mid \ g(x) \leq -\frac{1}{n}\} = \cup C_n.$$

Consideriamo $f = 1_{C_n}$. Abbiamo

$$\int_\Omega 1_{C_n}(w)\nu(dw) = \int_\Omega 1_{C_n}(w)g(w)\mu(dw) + \int_\Omega 1_{C_n}(w)g(w)\nu(dw),$$

da cui otteniamo

$$\nu(C_n) = \int_{C_n} g(w)\mu(dw) + \int_{C_n} g(w)\nu(dw) \leq -\frac{1}{n}(\mu(C_n) + \nu(C_n)).$$

Allora

$$(1 + \frac{1}{n})\,\nu(A_n) + \frac{1}{n}\,\mu(C_n) \leq 0,$$

ma essendo le misure positive, si ha

$$\nu(C_n) = \mu(C_n) = 0,$$

cioè $g \geq 0$ $(\mu + \nu)$-quasi dappertutto.

Sia ora

$$B = \{x \in \Omega \mid g(x) > 1\} = \cup \{x \mid g(x) \geq 1 + \frac{1}{n}\} = \cup B_n.$$

Ragionando come prima, otteniamo

$$0 \geq \frac{1}{n}\,\nu(B_n) + (1 + \frac{1}{n})\,\mu(B_n),$$

da cui

$$\nu(B_n) = \mu(B_n) = 0.$$

Abbiamo così che $g \leq 1$ $(\mu + \nu)$-quasi dappertutto.

Consideriamo adesso l'insieme

$$A = \{x \in \Omega \mid g(x) = 1\}.$$

Prendendo come $f = 1_A$ otteniamo

$$\nu(A) = \int_\Omega 1_A g(w)\mu(dw) + \int_\Omega 1_A g(w)\nu(dw) = \mu(A) + \nu(A),$$

da cui

$$\mu(A) = 0.$$

L'insieme A è l'insieme cercato.

Sia adesso $f \geq 0$, con $f \in L^2(\Omega, \mu + \nu)$. Essendo $0 \leq g \leq 1$ $(\mu + \nu)$-quasi dappertutto, si ha che per ogni k naturale $fg^k \in L^2(\Omega, \mu + \nu)$. Ragionando come prima, mettendo nelle seguenti uguaglianze

$$\int_\Omega f(w)(1 - g(w))\nu(dw) = \int_\Omega f(w)g(w)\mu(dw) = \int_{\Omega - A} f(w)g(w)\mu(dw),$$

al posto di f la funzione fg^k, trovo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega - A} f(w)g^k(w)(1 - g(w))\nu(dw) &= \int_\Omega f(w)g^k(w)(1 - g(w))\mu(dw) \\ &= \int_{\Omega - A} f(w)g^{k+1}(w)\nu(dw).\end{aligned}$$

Essendo valida per ogni k naturale, possiamo sommare e troviamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \int_{\Omega - A} f(w)g^k(w)(1 - g(w))\nu(dw) &= \sum_{k=0}^{n} \int_{\Omega - A} f(w)g^{k+1}(w)\mu(dw) \\ &= \int_{\Omega - A} f(w)g(w)\Big(\frac{1 - g^{n+1}(w)}{1 - g(w)}\Big)\mu(dw).\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{\Omega - A} f(w)g^k(w)(1 - g(w))\nu(dw) = \int_{\Omega - A} f(w)(1 - g^{n+1}(w))\nu(dw).$$

Inoltre, poiché $0 \leq g \leq 1$ $(\mu + \nu)$+quasi dappertutto, si ha che

$$0 \leq g^{n+1} \leq g^n \leq 1,$$

per ogni n naturale. Allora, la successione $(1 - g^n)$ è crescente e maggiore o uguale a zero $(\mu+\nu)$-quasi dappertutto. Possiamo perciò applicare il Teorema di Beppo-Levi. Osserviamo che

$$g^n \to 0, \quad \text{in } A,$$

allora

$$1 - g^{n+1} \to 1, \quad \text{in } A.$$

Applicando il Teorema di Beppo-Levi, troviamo

$$\int_{\Omega - A} f(w)\nu(dw) = \int_{\Omega - A} \frac{f(w)g(w)}{1 - g(w)}\mu(dw).$$

Definiamo allora

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(w)}{1-g(w)} & \text{se } x \in \Omega - A \\ \\ 0 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

Si allora ha che

$$\int_{\Omega - A} f(w)\nu(dw) = \int_{\Omega} f(w)h(w)\mu(dw).$$

Abbiamo così dimostrato il teorema nel caso in cui le misure sono finite e $f \in L^2(\Omega, \mu + \nu)$.

Sia ora $0 \leq f$ misurabile. Esiste una successione crescente di funzioni semplici, (φ_n), e positive tale che

$$\varphi_n \uparrow f$$

per $n \to +\infty$. Essendo φ_n funzioni semplici, si ha che $\varphi_n \in L^2(\Omega, \mu + \nu)$. Allora per le φ_n vale il teorema, e dunque

$$\int_{\Omega - A} \varphi_n(w)\nu(dw) = \int_{\Omega} \varphi_n(w)h(w)\mu(w).$$

Applicando il Teorema di Beppo-Levi a entrambi i membri, si ha

$$\int_{\Omega - A} f(w)\mu(dw) = \int_{\Omega} f(w)h(w)\mu(dw).$$

Abbiamo così dimostrato la validità del teorema nel caso in cui le misure sono finite.

Questo completa il primo passo.

2 PASSO: Dimostriamo il teorema nel caso in cui le misure sono σ-finite.

Per ipotesi abbiamo che

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} A_n, \ \text{ con } \mu(A_n) < +\infty,$$

e

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} B_n, \quad \text{con } \nu(B_n) < +\infty.$$

Osserviamo che non è restrittivo supporre che le unioni siano disgiunte. Poniamo

$$X_m = \bigcup_{n \geq 1} (A_m \bigcap B_n).$$

Osserviamo che l'unione è disgiunta e inoltre si ha che

$$\Omega = \bigcup_{m \geq 1} X_m.$$

Definiamo

$$\mathcal{F}_n = \{A \in \mathcal{F} \mid A \subseteq X_n\}.$$

Si ha che $\mathcal{F}_n$ è una $\sigma - algebra$ su X_n, per ogni n naturale. Si considerano i due spazi di misura

$$(X_n, \mathcal{F}_n, \mu),$$

e

$$(X_n, \mathcal{F}_n, \nu).$$

Sono spazi di misura finita su cui possiamo applicare il teorema, per quanto dimostrato nel PASSO 1. Consideriamo $0 \leq f \in \mathcal{F}$-misurabile. Sia f' la restrizione di f a X_n. Chiaramente $f' \in \mathcal{F}_n$-misurabile. Allora esiste $0 \leq h_n \in \mathcal{F}_n$-misurabile ed esiste $Z_n \subseteq X_n$, con $\mu(Z_n) = 0$, tali che

$$\int_{X_n} f(w)\nu(dw) = \int_{X_n} f(x)h_n(w)\mu(dw) + \int_{Z_n} f(w)\nu(dw).$$

Per $x \in X_n$, con $n \geq 1$, definiamo $h(x) = h_n(x)$. Essendo X_n a due a due disgiunti, risulta che h è ben definita. Inoltre si ha $h \geq 0$ e $h \in \mathcal{F}$-misurabile. Per ogni n si ha

$$\int_\Omega f(w)1_{X_n}\nu(dw) = \int_\Omega f(w)h(w)1_{X_n}\mu(dw) + \int_\Omega f(x)1_{Z_n}\nu(dw).$$

Sommando si ottiene

$$\sum_{n \geq 1} \int_\Omega f(x)1_{X_n}\nu(dw) = \sum_{n \geq 1} \big(\int_\Omega f(w)h(w)1_{X_n}\mu(dw) + \int_\Omega f(w)1_{Z_n}\nu(dw) \big).$$

Abbiamo però che

$$\sum_{n\geq 1}\int_\Omega f(x)1_{X_n}\nu(dw) = \int_\Omega \sum_{n\geq 1} f(x)1_{X_n}\nu(dw),$$

e ricordando che (X_n) ricopre Ω si ha

$$\int_\Omega \sum_{n\geq 1} f(x)1_{X_n}\nu(dw) = \int_\Omega f(w)\nu(dw).$$

Ragionando allo stesso modo si ha

$$\sum_{n\geq 1}\int_\Omega f(w)h(w)1_{X_n}\mu(dw) = \int_\Omega f(w)h(w)\mu(dw),$$

e

$$\sum_{n\geq 1}\int_\Omega f(w)1_{Z_n}\nu(dw) = \int_A f(w)\nu(dw),$$

dove si è posto

$$A = \bigcup_{n\geq 1} Z_n.$$

Osserviamo che

$$\mu(A) = 0.$$

Abbiamo cosi ottenuto

$$\int_\Omega f(w)\nu(dw) = \int_\Omega f(w)h(w)\mu(dw) + \int_A f(w)\nu(dw).$$

Abbiamo così dimostrato il secondo passo.
Questo conclude la prova. □

Osservazione A.29. Considerando come $f = 1_E$ per ogni $E \in \mathcal{F}$, il Teorema di Lebesgue-Nikodym-Radon si può scrivere nella forma seguente

$$\nu(E) = \int_E h(w)\mu(dw) + \nu(A \cap E).$$

Teorema A.30 (Lebesgue-Nikodym-Radon). *Siano μ e ν due misure finite su $(\Omega, \mathcal{F})$. Se ν è μ-assolutamente continua, allora esiste un'unica funzione $f \in L^1(\Omega,\mu)$ tale che*

$$\nu(E) = \int_E f(w)\mu(dw).$$

Dimostrazione. Per l'osservazione precedente, abbiamo che esiste $f \in \mathcal{F}$-misurabile ed esiste $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$, tale che

$$\nu(E) = \int_\Omega f(w)\mu(dw) + \nu(A \cap E),$$

per ogni $E \in \mathcal{F}$. Ma per ipotesi, ν è μ-assolutamente continua, e allora

$$\nu(A \cap E) = 0.$$

Allora abbiamo che

$$\nu(E) = \int_\Omega f(w)\mu(dw).$$

Questo conclude la prova. $\square$

Bibliografia

[1] K. L. CHUNG, *A course in probability theory*, Ed. Academic Press New York, (1974).

[2] K. L. CHUNG, *Lectures from Markov processes to Brownian motion*, Ed. Springer-Verlag, (1982).

[3] K. L. CHUNG, *Lectures from Brownian motion to Schrodinger's equation*, Ed. Springer, (1995).

[4] A. EINSTEIN, *On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by molecular kinetic theory of heat*, Ann. Phys. 17, (1905).

[5] S. KAKUTANI, *Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, (1944).

[6] B. ØKSENDAL *Stocastic differential equation: an introduction with application*, Ed. Springer-Verlag, (1985).

[7] J. L. DOOB *Semimartingales and subarmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 77, (1954).

[8] R. DURRETT *Brownian motion and martingales in analysis*, Ed. Wadsworth Advance Book & Softer, (1984).

[9] D. WILLIAMS *Probability with martingales*, Ed. Cambridge University Press, (1991).

[10] S. C. PORT - C. J. STONE *Brownian motion and classical potential theory*, Ed. Academic Press New York, (1978).

[11] N. WIENER *Differential space*, J. Math. Phys. 2, (1923).

[12] N. WIENER *Certain notions in potential theory*, J. Math. Phys. 3, (1924).

Indice analitico

attesa condizionata, 19

evento, 15
exit time, 50

filtrazione, 24
funzione armonica-radiale, 62
funzioni armoniche, 58

indipendenza, 16

legge, 12
legge 0-1 di Blumenthal, 49

media di superficie, 58
misura armonica, 66
misura di Gauss, 33
moto Browniano, 35

probabilità condizionata, 16
problema di Dirichlet, 65
processo stocastico, 24
proprietà di Markov, 25
proprietà di Markov forte, 54
punto regolare, 73

soluzione generalizzata, 66
spazio di probabilità, 11
stopping time, 49

valore atteso, 17
variabili aleatorie, 11

RINGRAZIAMENTI

Intendo ringraziare fortemente per la collaborazione alla realizzazione e stesura della tesi, nonchè per il sostegno e la pazienza dimostrata durante questi mesi, il Prof. Andrea Pascucci.
Intendo ringraziare anche il Prof. Sergio Polidoro per avermi consigliato e indirizzato allo svolgimento di questo lavoro.
Infine intendo ringraziare il Prof. Angelo Cavallucci per alcune consulenze riguardanti la teoria della misura.