CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1 ESERCIZI

Carlo Ravaglia

16 settembre 2015

Indice

Capitolo 1

Numeri reali

1.1 Ordine fra numeri reali

1. **Esercizio.** Sia
$$A = \{\frac{1}{n} - 1; n \in \mathbf{N}^*\} .$$
   (a) Dire se A ammette massimo e in caso affermativo determinarlo.
   (b) Dire se A ammette minimo e in caso affermativo determinarlo.
   (c) Dire se A ammette estremo superiore in $\mathbf{R}$ e in caso affermativo determinarlo.
   (d) Dire se A ammette estremo inferiore in $\mathbf{R}$ e in caso affermativo determinarlo.

   Risoluzione.

   (a) A ammette massimo e $\max(A) = 0$.
   (b) A non ammette minimo.
   (c) A ammette estremo superiore e $\sup(A) = 0$.
   (d) A ammette estremo inferiore e $\inf(A) = -1$.

2. **Esercizio.** Per ciascuno dei seguenti insiemi

   (a) $A = \left\{\frac{3n-1}{n}; n \in \mathbf{N}^*\right\}$,
   (b) $A = \left\{\frac{n+2}{n}; n \in \mathbf{N}^*\right\}$,
   (c) $A = \left\{\frac{3n^2+1}{n^2}; n \in \mathbf{N}^*\right\}$,
   (d) $A = \left\{\frac{1}{n^2+1}; n \in \mathbf{N}\right\}$,

dire se A ammette massimo e se A ammette minimo; dire se A è limitato superiormente, se A è limitato inferiormente, se A è limitato; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A rispetto a $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$.

Risoluzione.

(a) Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $\frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$; l'insieme A è quindi formato da punti che al crescere di n si avvicinano crescendo a 3 senza mai raggiungerlo; quindi si ha:
A non ammette massimo;
A ammette minimo e $\min(A) = 2$;
A è limitato superiormente;
A è limitato inferiormente;
Aè limitato;
si ha $\sup(A) = 3$;
si ha $\inf(A) = 2$.

(b) Si ha $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$. L'insieme A è fatto di infiniti punti che al crescere di n si avvicinano decrescendo a 1 senza mai raggiungerlo; quindi si ha:
A ammette massimo e si ha $\max(A) = 3$;
A non ammette minimo;
A è limitato superiormente;
A è limitato inferiormente;
A è limitato;
si ha $\sup(A) = 3$;
si ha $\inf A = 1$.

(c) L'insieme A è l'immagine della successione $\left(\frac{3n^2+1}{n^2}\right)_{n \in N^*}$.
Si ha $\frac{3n^2+1}{n^2} = 3 + \frac{1}{n^2}$; quindi la successione $\left(\frac{3n^2+1}{n^2}\right)_{n \in N^*}$ è decrescente; si ha poi $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+1}{n^2} = 3$ e $3 \notin A$; si ha quindi:
A ammette massimo e si ha $\max(A) = 4$;
A non ammette minimo;
A è limitato superiormente;
A è limitato inferiormente;
A è limitato;
si ha $\sup(A) = 4$;
si ha $\inf A = 3$.

(d) L'insieme A è l'immagine della successione $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n \in N}$.
La successione $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n \in N}$ è decrescente; al crescere di n i punti $\frac{1}{n^2+1}$ si avvicinano decrescendo a 0 senza mai raggiungerlo; si ha quindi:
A ammette massimo e si ha $\max(A) = 1$;
A non ammette minimo;
A è limitato superiormente;
A è limitato inferiormente;
A è limitato;

si ha $\sup(A) = 1$;
si ha $\inf A = 0$.

3. **Esercizio.** Sia
$$A = \{\frac{1}{x}; x \in]-\infty, 0[\} \;;$$
dire se A ammette massimo e se A ammette minimo; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Risoluzione. Posto
$$f :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x} \;,$$
si ha $A = f(]-\infty, 0[) =]-\infty, 0[$. Quindi A non ammette massimo, A non ammette minimo, $\sup(A) = 0$, $\inf(A) = -\infty$.

4. **Esercizio.** Per ciascuno dei seguenti insiemi

(a) $A = [\sqrt{2}, 2] \cap \mathbf{Q}$,
(b) $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$,
(c) $A = [0, \sqrt{2}] \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$,
(d) $A =]-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$,

dire se A ammette massimo e se A ammette minimo; dire se A è limitato superiormente, se A è limitato inferiormente, se A è limitato; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A rispetto a $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$.

Risoluzione.

(a) Per ogni $x \in A$ si ha $\sqrt{2} < x \leq 2$; inoltre $2 \in A$; inoltre vi sono punti di A vicini come si vuole a $\sqrt{2}$; quindi si ha:
A ammette massimo e $\max(A) = 2$;
A non ammette minimo;
A è limitato superiormente;
A è limitato inferiormente;
A è limitato;
si ha $\sup(A) = 2$;
si ha $\inf(A) = \sqrt{2}$.

(b) Per ogni $x \in A$ si ha $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$; inoltre vi sono punti di A vicini come si vuole a $-\sqrt{2}$ e a $\sqrt{2}$; quindi si ha:
A non ammette massimo;
A non ammette minimo;
A è limitato superiormente;
A è limitato inferiormente;
A è limitato;
si ha $\sup(A) = \sqrt{2}$;
si ha $\inf(A) = -\sqrt{2}$.

(c) Per ogni $x \in A$ si ha $0 < x \leq \sqrt{2}$; inoltre $\sqrt{2} \in A$ e vi sono punti di A vicini come si vuole a 0; quindi si ha:
A ammette massimo e si ha $\max(f) = \sqrt{2}$;
A non ammette minimo;
A è limitato superiormente;
A è limitato inferiormente;
A è limitato;
si ha $\sup(A) = \sqrt{2}$;
si ha $\inf(A) = 0$.

(d) Per ogni $x \in A$ si ha $x < \sqrt{2}$; inoltre $\sqrt{2} \notin A$ e vi sono punti di A vicini come si vuole a $\sqrt{2}$ e inferiori di un arbitrario numero reale; quindi si ha:
A non ammette massimo;
A non ammette minimo;
A è limitato superiormente;
A non è limitato inferiormente;
A non è limitato;
si ha $\sup(A) = \sqrt{2}$;
si ha $\inf(A) = -\infty$.

5. **Esercizio.** Dare un esempio di un sottoinsieme di $\{x \in \mathbf{R}; x < -1\}$ dotato di estremo superiore in $(\mathbf{R}, \leq)$, ma non di massimo.

   Risoluzione. $]-\infty, -2[$.

6. **Esercizio.** Determinare l'insieme dei maggioranti di $\mathbf{R}$ rispetto all'insieme ordinato $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$.

   Risoluzione. L'insieme dei maggioranti di $\mathbf{R}$ rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ è $\{+\infty\}$.

7. **Esercizio.** Dare un esempio di una funzione definita su $\{x \in \mathbf{R}; x \geq 1\}$ limitata inferiormente, ma non dotata di minimo.

   Risoluzione. $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longrightarrow \frac{1}{x}$.

1.2 Funzioni reali

1. **Esercizio.** Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore in $\overline{\mathbf{R}}$ della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x^2}\ .$$

   Risoluzione. Si ha $f(\mathbf{R}^*) =]0, +\infty[$; quindi si ha $\sup(f) = +\infty$, $\inf(f) = 0$.

2. **Esercizio.** Disegnare approssimativamente in uno stesso sistema di assi i grafici di

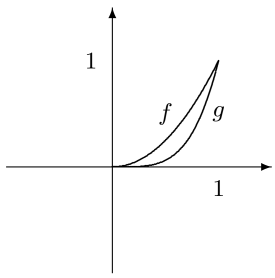
$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2$$

   e di

$$g : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^4$$

mettendo in evidenza il legame fra i grafici.

Risoluzione.



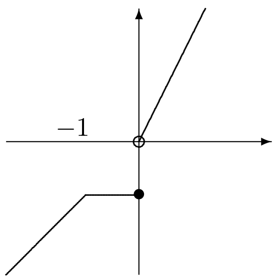
3. **Esercizio.** Sia

$$f :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow \begin{cases} x & \text{per } x \leq -1 \\ -1 & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ 2x & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad ;$$

   (a) tracciare approssimativamente il grafico di f;
   (b) determinare l'immagine di f;
   (c) dire se f ammette massimo e minimo e in caso affermativo determinarli;
   (d) dire se f è limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata;
   (e) determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f rispetto a $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha



   (b) Si ha $f(]-\infty, 1]) =]-\infty, -1] \cup]0, 2]$.
   (c) f ammette massimo e $\max(f) = 2$; f non ammette minimo.
   (d) f è limitata superiormente; f non è limitata inferiormente; f non è limitata.
   (e) Si ha $\sup(f) = 2$, $\inf(f) = -\infty$.

4. **Esercizio.** Sia $f : [-2, 0] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2$; determinare $f([-2, 0])$, provare che f è iniettiva e trovare la funzione inversa di f.

   Risoluzione. Si ha $f([-2, 0]) = [0, 4]$.

Per $y \in [0,4]$ e per ogni $x \in [-2,0]$ si ha $f^{-1}(y) = x$ se e solo se $f(x) = y$, cioè se e solo se $x^2 = y$; quindi si ha $x = \pm\sqrt{y}$; poichè $x \leq 0$, si ha $x = -\sqrt{y}$; ciò prova che f è iniettiva e che si ha

$$f^{-1} : [0,4] \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow -\sqrt{y} \; .$$

5. **Esercizio.** Sia $f : [-1,0[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x^2}$; determinare $f([-1,0[)$, provare che f è iniettiva e trovare la funzione inversa di f.

   Risoluzione. Si ha $f([-1,0[) = [1,+\infty[$.

   Per $y \in [1,+\infty[$ e $x \in [-1,0[$ si ha $f^{-1}(y) = x$ se e solo se $f(x) = y$, cioè se e solo se $\frac{1}{x^2} = y$; quindi si ha $x = \pm\frac{1}{\sqrt{y}}$; poichè $x < 0$, si ha $x = -\frac{1}{\sqrt{y}}$; ciò prova che f è iniettiva e che si ha

$$f^{-1} : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{y}} \; .$$

6. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2 - 3x + 2$;

   (a) determinare l'immagine di f;

   (b) dire se f è iniettiva.

   Risoluzione.

   (a) L'immagine di f è l'insieme delle $y \in \mathbf{R}$ tali che l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$, $x^2 + x + 1 = y$, ammette almeno una soluzione. L'equazione è equivalente a $x^2 - 3x + 2 - y = 0$; tale equazione ha soluzioni se e solo se $9 - 4(2-y) \geq 0$, cioè se e solo se $y \geq -\frac{1}{4}$; l'immagine di f è quindi $[-\frac{1}{4},+\infty[$.

   (b) La funzione f è iniettiva se e solo se per ogni y appartenente all'immagine di f l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - 3x + 2 = y$ ammette una ed una sola soluzione. Sia $y \geq -\frac{1}{4}$; l'equazione sopra è equivalente a $x^2 - 3x + 2 - y = 0$; tale equazione per $y \neq -\frac{1}{4}$ ha due soluzioni; quindi f non è iniettiva.

7. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x}{2x+1}$;

   (a) determinare l'immagine di f;

   (b) dire se f è iniettiva;

   (c) in caso affermativo, determinare f^{-1}.

   Risoluzione.

   (a) L'immagine di f è l'insieme delle $y \in \mathbf{R}$ tali che l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, $\frac{x}{2x+1} = y$, ammette almeno una soluzione.

   È quindi anche uguale all'insieme delle $y \in \mathbf{R}$ tali che l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} \frac{x}{2x+1} = y \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} ,$$

ammette almeno una soluzione.
L'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} x = (2x+1)y \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

L'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$, $x = (2x-1)y$, non ha la soluzione $x = -\frac{1}{2}$; quindi l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} x = (2x+1)y \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

è equivalente all'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$,

$$x = (2x+1)y ,$$

quindi a $x = 2xy + y$; quindi a $(1-2x)y - y$.
Tale equazione ha soluzioni $x \in \mathbf{R}$ se e solo se $1 - 2y \neq 0$, cioè se e solo se $y \neq \frac{1}{2}$.
L'immagine di f è quindi $\mathbf{R}-\{\frac{1}{2}\}$.

(b) La funzione f è iniettiva se e solo se per ogni y appartenente all'immagine di f l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}-\{-\frac{1}{2}\}$, $\frac{x}{2x+1} = y$, ammette una ed una sola soluzione. Sia $y \in \mathbf{R}-\{\frac{1}{2}\}$; l'equazione sopra è equivalente all'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$, $x(1-2y) = y$; tale equazione ha una ed una sola soluzione $x = \frac{y}{1-2y}$. quindi f è iniettiva.

(c) Si ha $f^{-1} : \mathbf{R}-\{\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbf{R}-\{-\frac{1}{2}\}, y \longrightarrow \frac{y}{1-2y}$.

1.3 Radici aritmetiche

1. **Esercizio.** Trovare un $m \in \mathbf{R}$ per cui

$$\frac{m+2}{\sqrt{m+3}}$$

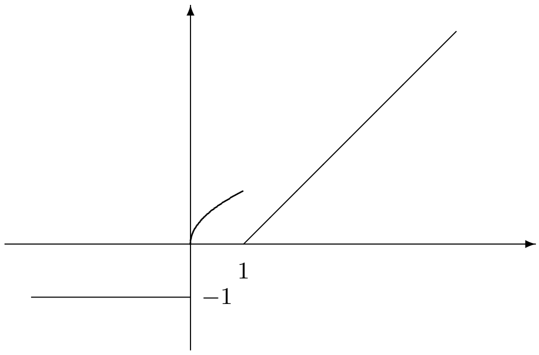
sia un numero razionale.

Risoluzione. Per $m = 1$ si ha $\frac{m+2}{\sqrt{m+3}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$; è quindi sufficiente scegliere $m = 1$.

2. **Esercizio.** Disegnare approssimativamente il grafico di

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{per } x > 1 \end{cases} .$$

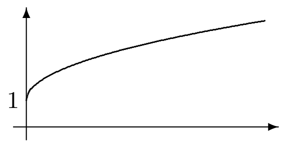
Risoluzione.



3. **Esercizio.** Sia
$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{x} + 1 \ ;$$
   (a) disegnare approssimativamente il grafico di f;
   (b) determinare l'immagine di f (si può rispondere utilizzando il grafico di f);
   (c) provare che f è iniettiva;
   (d) determinare f^{-1};
   (e) disegnare approssimativamente il grafico di f^{-1}.

   Risoluzione.

   (a)

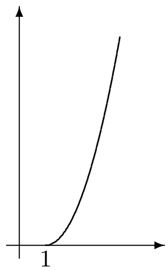


   (b) La proiezione del grafico sull'asse y è $[1, +\infty[$; si ha quindi $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$.
   Precisamente, se $y \in \mathbf{R}$, y appartiene all'immagine di f se e solo se l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}_+$
$$\sqrt{x} + 1 = y$$
   ammette almeno una soluzione.
   Tale equazione è equivalente all'equazione
$$\sqrt{x} = y - 1$$
   Per $y - 1 < 0$ l'equazione non ha soluzioni; per $y - 1 \geq 0$ l'equazione è equivalente a $x = (y - 1)^2$; quindi ha soluzioni. Quindi l'equazione ha soluzioni se e solo se $y - 1 \geq 0$, cioè se e solo se $y \geq 1$; si ha quindi
$$f([0, +\infty[) = [1, +\infty[\ .$$

(c) Supposto $y \geq 1$ l'equazione
$$\sqrt{x} = y - 1$$
ha un'unica soluzione data da
$$x = (y-1)^2 \ .$$
Quindi f è iniettiva.

(d) Si ha
$$f^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[, y \longrightarrow (y-1)^2 \ .$$

(e)



1.4 Valore assoluto

1. **Esercizio.** Determinare i $t \in \mathbf{R}$ per i quali
$$(|t| - 1)^2$$
ammette reciproco.

Risoluzione. Il numero reale $(|t|-1)^2$ ammette reciproco se e solo se $(|t|-1)^2 \neq 0$, cioè se e solo se $|t| - 1 \neq 0$, cioè se e solo se $|t| \neq 1$, cioè se e solo se $t \neq 1$ e $t \neq -1$.

2. **Esercizio.** Trovare un $m \in \mathbf{N}$ in modo che
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x^2 + x^{3m+1}}{|x|^m + 1}$$
sia una funzione pari.

Risoluzione. Affinchè f sia una funzione pari, è sufficiente che $3m+1$ sia un numero pari; è allora sufficiente scegliere $m = 1$; dunque
$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x^2+x^4}{|x|+1}$
è una funzione pari.

1.5 Polinomi

1. **Esercizio.** Determinare il quoziente ed il resto della divisione fra polinomi:

   (a) $(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3) : (x^2 + x + 1)$;

   (b) $(x^4 - 5x^3 - 4x + 3) : (x^2 - 1)$;

   (c) $(x^3 + 7x^2 + 3x + 1) : (x + 2)$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -x & +3 & x^2 + x + 1 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & -2x^3 & -2x^2 & & & 2x^2 - 5x + 5 \\ \cline{1-5}
 & -5x^3 & & -x & +3 & \\
 & 5x^3 & 5x^2 & 5x & & \\ \cline{2-5}
 & & 5x^2 & 4x & +3 & \\
 & & -5x^2 & -5x & -5 & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & -2 &
\end{array} .$$

   Quindi se $Q(x)$ è il quoziente e $R(x)$ è il resto, si ha $Q(x) = 2x^2 - 5x + 5$ e $R(x) = -x - 2$.

   (b) Si ha

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -5x^3 & & -4x & +3 & x^2 - 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & +x^2 & & & x^2 - 5x + 1 \\ \cline{1-5}
 & -5x^3 & +x^2 & -4x & +3 & \\
 & 5x^3 & & -5x & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & -9x & +3 & \\
 & & -x^2 & & +1 & \\ \cline{3-5}
 & & & -9x & +4 &
\end{array} .$$

   Quindi se $Q(x)$ è il quoziente e $R(x)$ è il resto, si ha $Q(x) = x^2 - 5x + 1$ e $R(x) = -9x + 4$.

   (c) Si ha

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 7 & 3 & -1 \\
-2 & & -2 & -10 & 14 \\ \hline
 & 1 & 5 & -7 & 15
\end{array} .$$

   Quindi, indicato con $Q(x)$ il quoziente e con $R(x)$ il resto, si ha $Q(x) = x^2 + 5x - 7$ e $R(x) = 15$.

2. **Esercizio.** Determinare il quoziente ed il resto della divisione fra polinomi utilizzando la regola di Ruffini:

   (a) $(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3) : (x - 1)$;

   (b) $(x^4 - x^2 + x) : (x + 2)$.

Risoluzione.

(a) Si ha:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & -3 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & & 2 & -1 & 1 & -4 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\ .$$

Quindi se $Q(x)$ è il quoziente e $R(x)$ è il resto, si ha $Q(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$ e $R(x) = -1$.

(b) Si ha:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & & -2 & 4 & -6 & 10 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -5 & 10 \end{array}\ .$$

Quindi se $Q(x)$ è il quoziente e $R(x)$ è il resto, si ha $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ e $R(x) = 10$.

1.6 Equazioni

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni polinomiali e determinare la molteplicità delle radici del polinomio:

(a) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$;

(b) $30x^3 - 7x^2 - 7x + 2 = 0$;

(c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Risoluzione.

(a) Si ha $x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x + 2)^2$. Quindi le radici sono $x = 1$ e $x = -2$; $x = 1$ è radice semplice, $x = -2$ è radice doppia.

(b) Sia $A(x) = 30x^3 - 7x^2 - 7x + 2$. Le radici razionali di $A(x)$ sono fra i numeri razionali $\frac{p}{q}$ con p divisore intero di 2 e q divisore intero di 30.
I divisori interi di 2 sono ± 1 e ± 2; i divisori interi di 30 sono ± 1, ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 10, ± 15, ± 30.
Si trova $A(-\frac{1}{2}) = 0$; quindi $-\frac{1}{2}$ è radice di $A(x)$.
Il quoziente della divisione $A(x) : (x + \frac{1}{2})$ è $30x^2 - 22x + 4$.
Si ha quindi
$A(x) = (30x^2 - 22x + 4)(x + \frac{1}{2}) = (15x^2 - 11x + 2)(2x + 1)$.
L'equazione $15x^2 - 11x + 2 = 0$ ha soluzioni $x = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{2}{5}$; si ha quindi $15x^2 - 11x + 2 = 15(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{5}) = (3x - 1)(5x - 2)$.
Si ha quindi $A(x) = (15x^2 - 11x + 2)(2x + 1) = (3x - 1)(5x - 2)(2x - 1)$.
Le radici dell'equazione sono quindi $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$. Le tre del polinomio sono tutte semplici.

(c) Si ha $x^2 = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$; quindi si ha $x^2 = 9$ o $x^2 = 4$; quindi si ha $x = \pm 3$ o $x = \pm 2$. Le radici del polinomio sono tutte semplici.

2. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni irrazionali

   (a) $\sqrt{x^2+1} = 3x - 1$;

   (b) $\sqrt{x} = x - 2$;

   (c) $\sqrt{x+1} = x$.

   Risoluzione.

   (a) Il dominio dell'equazione è $\mathbf{R}$. Si ha: $\sqrt{x^2+1} = 3x-1$ se e solo se $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3x-1 \\ 3x-1 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3x-1 \\ 3x-1 < 0 \end{cases}$.

   Risolviamo $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3x-1 \\ 3x-1 \geq 0 \end{cases}$. Il sistema è equivalente a $\begin{cases} x^2+1 = (3x-1)^2 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2+1 = 9x^2-6x+1 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 8x^2-6x = 0 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = 0 \text{ o } x = \frac{3}{4} \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$, cioè a $x = \frac{3}{4}$.

   Il sistema $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3x-1 \\ 3x-1 < 0 \end{cases}$ non ammette soluzioni.

   Quindi per l'equazione assegnata si trova $x = \frac{3}{4}$.

   (b) L'equazione si scrive $\begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x \geq 0 \end{cases}$; quindi equivale a $\begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$.

   Il sistema $\begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ non ammette soluzioni; quindi l'equazione equivale a $\begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = x^2-4x+4 \\ x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2-5x+4 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = 1 \text{ o } x = 4 \\ x \geq 2 \end{cases}$, cioè a $x = 4$.

   (c) L'equazione si scrive $\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ ed è equivalente a $\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$.

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ non ammette alcuna soluzione.

L'equazione assegnata è quindi equivalente a

$\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x+1 = x^2 \\ x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Si trova quindi $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni:

   (a) $x^2 + 2|x+1| - 1 = 0$;

   (b) $|x+1| = 3$;

   (c) $|x^2 + x - 1| = 3$;

   (d) $\frac{|x^2-1|}{x} = x + 1$;

   (e) $|x+1| = x$.

   Risoluzione.

   (a) L'equazione equivale a

   $$\begin{cases} x^2 + 2|x+1| - 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2 + 2|x+1| - 1 = 0 \\ x < -1 \end{cases} .$$

   Si ha
   $\begin{cases} x^2 + 2|x+1| - 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} x^2 + 2(x+1) - 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$ cioè $x = -1$.

   Si ha
   $\begin{cases} x^2 + 2|x+1| - 1 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} x^2 - 2(x+1) - 1 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$
   cioè $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \\ x < -1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x = 3 \text{ o } x = -1 \\ x < -1 \end{cases}$ e quindi mai.

   Quindi l'equazione ha una sola soluzione data da $x = -1$.

   (b) Si ha $|x+1| = 3$ se e solo se $x + 1 = \pm 3$, cioè $x = -4$ o $x = 2$.

   (c) L'equazione è equivalente a $x^2 + x - 1 = \pm 3$.
   L'equazione $x^2 + x - 1 = 3$ è equivalente a $x^2 + x - 4 = 0$, cioè a $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

L'equazione $x^2 + x - 1 = -3$ è equivalente a $x^2 + x + 2 = 0$; il polinomio $x^2 + x - 2$ ha discriminante $\Delta = -7 < 0$; quindi l'equazione $x^2 + x + 2 = 0$ non ha soluzioni.
Quindi l'equazione assegnata ha soluzioni. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

(d) L'equazione è assegnata per $x \neq 0$. L'equazione è equivalente a
$\begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x} = x+1 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x} = x+1 \\ x^2 - 1 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Il sistema $\begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x} = x+1 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x^2 - 1 = x^2 + x \\ x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = -1 \\ x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$, cioè a $x = -1$.

Il sistema $\begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x} = x+1 \\ x^2 - 1 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} 1 - x^2 = x^2 + x \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = \frac{-1 \pm 3}{4} \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = -1 \text{ o } x = \frac{1}{2} \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$, cioè a $x = \frac{1}{2}$.

L'equazione assegnata è quindi equivalente a $x = -1$ o $x = \frac{1}{2}$.

(e) L'equazione è equivalente a
$\begin{cases} |x+1| = x \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} |x+1| = x \\ x + 1 < 0 \end{cases}$.

Il sistema $\begin{cases} |x+1| = x \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x + 1 = x \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 1 = 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$; poichè $1 = 0$ è falsa, tale sistema non ammette soluzioni.

Il sistema $\begin{cases} |x+1| = x \\ x + 1 < 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} -x - 1 = x \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 2x = -1 \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x < -1 \end{cases}$; poichè non è $-\frac{1}{2} < -1$, tale sistema non ammette alcuna soluzione.

Quindi l'equazione assegnata non ammette soluzioni.

1.7 Disequazioni

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni polinomiali:

(a) $x + 5 < 4x + 2$;

(b) $x^2 - x + 1 > 0$;

(c) $\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases}$;

Risoluzione.

(a) Il dominio della disequazione è $\mathbf{R}$. Si ha:
$x + 5 < 4x + 2$ se e solo se $-3x < -3$, se e solo se $x > 1$.

(b) Il polinomio $x^2 - x + 1$ ha discriminante $\Delta = -3 < 0$; quindi la disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbf{R}$.

(c) Il sistema di disequazioni equivale a $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < 2 \text{ o } x > 3 \end{cases}$. Quindi si ha $1 < x < 2$.

2. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni fratte:

(a) $\frac{x+4}{x-3} < 2$;

(b) $\frac{2x+5}{3x-1} > 4$.

Risoluzione.

(a) Il dominio della disequazione è $\mathbf{R} - \{3\}$. Sia $x \neq 3$. Si ha:
$\frac{x+4}{x-3} < 2$ se e solo se
$\frac{x+4}{x-3} - 2 < 0$ se e solo se
$\frac{x+4-2x+6}{x-3} < 0$ se e solo se
$\frac{-x+10}{x-3} < 0$ se e solo se
$x < 3$ o $x > 10$.

(b) Il dominio della disequazione è $\mathbf{R} - \{\frac{1}{3}\}$. Sia $x \neq \frac{1}{3}$. Si ha:
$\frac{2x+5}{3x-1} > 4$ se e solo se
$\frac{2x+5}{3x-1} - 4 > 0$ se e solo se
$\frac{2x+5-12x+4}{3x-1} - 4 > 0$ se e solo se
$\frac{-10x+9}{3x-1} - 4 > 0$ se e solo se
$\frac{1}{3} < x < \frac{9}{10}$.

3. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

(a) $\sqrt{x+2} > x$.

(b) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1$;

(c) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3$;

(d) $\sqrt{x^2 - 9} > x$;

(e) $x < \sqrt{-x^2 + 1}$;

(f) $x + 1 > \sqrt{-x^2 - 2x}$;

(g) $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{x}$;

(h) $\frac{1}{1-\sqrt{x}} > \frac{1}{x}$;

Risoluzione.

(a) Tenendo conto della condizione sul dominio della disequazione, la disequazione è soddisfatta se e solo se $\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$, cioè se e solo se

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} .$$

Si ha $\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} x+2 > x^2 \\ x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} x+2 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Il polinomio $x^2 - x - 2$ ha discriminante $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$; il polinomio ammette quindi le radici $x = \frac{1 \pm 3}{2}$, cioè $x = -1$ o $x = 2$.

Si ha quindi $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} -1 < x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $0 \leq x < 2$.

Si ha $\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $-2 \leq x < 0$.

La disequazione assegnata è quindi soddisfatta se e solo se

$$-2 \leq x < 2 .$$

(b) La disequazione equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} > x-1 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} > x-1 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} .$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} > x-1 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$$

equivale a

$\begin{cases} x^2-3x+2 > (x-1)^2 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2-3x+2 > (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a

$\begin{cases} x^2-3x+2 > x^2-2x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -3x+2 > -2x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$; quindi non ammette alcuna soluzione.

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} > x-1 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

equivale a $\begin{cases} x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \leq 1 \text{ o } x \geq 2 \\ x < 1 \end{cases}$ cioè a $x < 1$.

Quindi la disequazione data equivale a $x < 1$.

(c) La disequazione equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} > x-3 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} > x-3 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} .$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} > x-3 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$$

equivale a

$\begin{cases} x^2-3x+2 > (x-3)^2 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2-3x+2 > (x-3)^2 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2-3x+2 > x^2-6x+9 \\ x \geq 3 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 3x > 7 \\ x \geq 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x > \frac{7}{3} \\ x \geq 3 \end{cases}$, cioè a $x \geq 3$.

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} > x-3 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

equivale a

$\begin{cases} x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \leq 1 \text{ o } x \geq 2 \\ x < 3 \end{cases}$, cioè a $x \leq 1$ o $2 \leq x < 3$.

Quindi la disequazione data equivale a $x \leq 1$ o $x \geq 2$.

(d) La disequazione è equivalente a

$\begin{cases} \sqrt{x^2-9} > x \\ x^2-9 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} \sqrt{x^2-9} > x \\ x^2-9 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$.

Risolviamo $\begin{cases} \sqrt{x^2-9} > x \\ x^2-9 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$. Il sistema è equivalente a
$\begin{cases} x^2-9 > x^2 \\ x^2-9 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -9 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$;
quindi nessuna soluzione.
Risolviamo $\begin{cases} \sqrt{x^2-9} > x \\ x^2-9 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$. Il sistema è equivalente a
$\begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \leq -3 \text{ o } x \geq 3 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè a $x \leq -3$.
Quindi la disequazione assegnata è equivalente a $x \leq -3$.

(e) La disequazione si scrive $\begin{cases} x < \sqrt{-x^2+1} \\ -x^2+1 \geq 0 \end{cases}$ ed è equivalente a
$\begin{cases} x < \sqrt{-x^2+1} \\ -x^2+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < \sqrt{-x^2+1} \\ -x^2+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$.
Il sistema
$\begin{cases} x < \sqrt{-x^2+1} \\ -x^2+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x^2 < -x^2+1 \\ -x^2+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a
$\begin{cases} 2x^2-1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
$\begin{cases} x < \sqrt{-x^2+1} \\ -x^2+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} -x^2+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè a
$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè a $-1 \leq x < 0$.
La disequazione assegnata è quindi equivalente a $-1 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(f) La disequazione si scrive $\begin{cases} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \end{cases}$ ed è equivalente a
$\begin{cases} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$.
Il sistema
$\begin{cases} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} (x+1)^2 > -x^2-2x \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a
$\begin{cases} x^2+2x+1 > -x^2-2x \\ -2 \leq x \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 2x^2+4x+1 > 0 \\ -2 \leq x \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$, cioè a

$\left\{\begin{array}{l} x < \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ o } x > \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \\ -2 \leq x \leq 0 \\ x > -1 \end{array}\right.$, cioè a $\frac{-2+\sqrt{2}}{2} < x \leq 0$.

Il sistema $\left\{\begin{array}{l} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{array}\right.$ non ammette soluzioni.

La disequazione assegnata è quindi equivalente a $\frac{-2+\sqrt{2}}{2} < x \leq 0$.

(g) La disequazione è assegnata per $x \in \mathbf{R}$ tale che

$$\left\{\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right. \quad , \quad \text{cioè tale che} \quad \left\{\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right. \quad ;$$

quindi per $-1 < x < 0$ o $x > 0$.
Per $-1 < x < 0$ la disequazione è soddisfatta.
Supponiamo $x > 0$. La disequazione è equivalente a $\sqrt{x+1} < x$, quindi a $x+1 < x^2$; quindi a $x^2 - x - 1 > 0$.
Il polinomio $x^2 - x - 1$ ha discriminante $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$; il polinomio ammette quindi le radici $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
La disequazione $x^2 - x - 1 > 0$ è quindi soddisfatta per $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; quindi, essendo $x > 0$, se e solo se $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
La disequazione assegnata è quindi soddisfatta se e solo se

$$-1 < x < 0 \text{ o } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ .$$

(h) La disequazione è assegnata per
$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 1-\sqrt{x} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right.$, cioè per $\left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \end{array}\right.$, cioè per $0 < x < 1$ o $x > 1$.
Supponiamo $0 < x < 1$; si ha $1 - \sqrt{x} > 0$ e $1 - x > 0$; l'equazione è quindi equivalente a
$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1-\sqrt{x}} > \frac{1}{x} \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$, cioè a $\left\{\begin{array}{l} 1-\sqrt{x} < x \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$, cioè a $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x} > 1-x \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$, cioè a
$\left\{\begin{array}{l} x > (1-x)^2 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$, cioè a $\left\{\begin{array}{l} x > 1-2x+x^2 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$, cioè a $\left\{\begin{array}{l} x^2-3x+1 < 0 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$,
cioè a $\left\{\begin{array}{l} \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$, cioè a $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1$.
Per $x > 1$ si ha $1 - \sqrt{x} < 0$; quindi la disequazione non è soddisfatta in quanto $\frac{1}{1-\sqrt{x}} < 0$ e $\frac{1}{x} > 0$.
Quindi la disequazione assegnata è equivalente a $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1$.

4. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $|x+1| > 2x+3$;

(b) $\frac{|x|+1}{x-1} > x+1$;

(c) $|x-3| < 2$;

(d) $x|x+1| > x$;

(e) $\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{2}$;

(f) $\frac{x}{x-2} > |x-2|$.

Risoluzione.

(a) La disequazione è equivalente a
$\begin{cases} |x+1| > 2x+3 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} |x+1| > 2x+3 \\ x+1 < 0 \end{cases}$.

Risolviamo $\begin{cases} |x+1| > 2x+3 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$. Il sistema è equivalente a
$\begin{cases} x+1 > 2x+3 \\ x \geq -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x < -2 \\ x \geq -1 \end{cases}$;
quindi il sistema non ammette alcuna soluzione.

Risolviamo $\begin{cases} |x+1| > 2x+3 \\ x+1 < 0 \end{cases}$. Il sistema è equivalente a
$\begin{cases} -(x+1) > 2x+3 \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -x-1) > 2x+3 \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 3x < -4 \\ x < -1 \end{cases}$,
cioè a $\begin{cases} x < -\frac{4}{3} \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $x < -\frac{4}{3}$.

Quindi la disequazione assegnata è equivalente a $x < -\frac{4}{3}$.

(b) Si ha $x \neq 1$.

La disequazione equivale a $\frac{|x|+1}{x-1} - (x+1) > 0$, cioè a $\frac{|x|+1-(x^2-1)}{x-1} > 0$, cioè a $\frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0$, cioè a

$$\begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Il sistema $\begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} \frac{-x^2+x+2}{x-1} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a
$\begin{cases} x < -1 \text{ o } 1 < x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a $1 < x < 2$.

Il sistema $\begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x < 0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} \frac{-x^2-x+2}{x-1} > 0 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè a
$\begin{cases} x < -2 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè a $x < -2$.

Quindi la disequazione assegnata è equivalente a

$$x < -2 \text{ o } 1 < x < 2 \,.$$

(c) La disequazione equivale a $-2 < x - 3 < 2$, cioè a $1 < x < 5$.

(d) La disequazione equivale a
$\begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 < 0 \end{cases}$.

Il sistema $\begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} x(x+1) > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2+x > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$, cioè a $-1 \leq x < 0$ o $x > 0$.

Il sistema $\begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 < 0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} x(-x-1) > x \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -x^2-x > x \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2+2x < 0 \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $-2 < x < -1$.

Quindi la disequazione assegnata equivale a $-2 < x < 0$ o $x > 0$.

(e) La disequazione è assegnata per $x \neq 1$; si scrive dunque $\begin{cases} \frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$; essa è equivalente a $\begin{cases} |x-1| < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -2 < x-1 < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -1 < x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$, cioè a $-1 < x < 1$ o $1 < x < 3$.

(f) La disequazione è assegnata per $x \neq 2$; supposto $x \in \mathbf{R}$ e $x \neq 2$ risolviamo la disequazione in due modi

i. *Modo 1* Si ha
$$\frac{x}{x-2} > |x-2|$$
se e solo se
$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x < 2 \end{cases} \,.$$
Si ha
$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} \frac{x}{x-2} > x-2 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{se e solo se}$$
$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} - x + 2 > 0 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} \frac{x-x^2+4x-4}{x-2} > 0 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{se e solo se}$$
$$\begin{cases} \frac{x^2-5x+4}{x-2} < 0 \\ x > 2 \end{cases} \,.$$

Tenendo conto della condizione $x > 2$, se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} 1 < x < 4 \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se .}$$

$$2 < x < 4 \, .$$

Si ha

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x < 2 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x}{x-2} > -x + 2 \\ x < 2 \end{cases} \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} + x - 2 > 0 \\ x < 2 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x+x^2-4x+4}{x-2} > 0 \\ x < 2 \end{cases} \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0 \\ x < 2 \end{cases} \, .$$

Tenendo conto della condizione $x < 2$, se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 < 0 \\ x < 2 \end{cases} \, .$$

Il polinomio $x^2 - 3x + 4$ ha discriminante $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$; quindi la disequazione $x^2 - 3x + 4 < 0$ non è mai soddisfatta. Quindi il sistema 8

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 < 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

non ha soluzioni.
La disequazione assegnata è quindi equivalente a

$$2 < x < 4 \, .$$

ii. *Modo 2* Si ha

$$\frac{x}{x-2} > |x-2| \text{ se e solo se } |x-2| < \frac{x}{x-2} \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} x - 2 < \frac{x}{x-2} \\ x - 2 > -\frac{x}{x-2} \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} x - 2 - \frac{x}{x-2} >< 0 \\ x - 2 + \frac{x}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2-x}{x-2} < 0 \\ \frac{(x-2)^2+x}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x^3-5x+4}{x-2} < 0 \\ \frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0 \end{cases} \, .$$

Il polinomio $x^2 - 5x + 4$ ha radici 1 e 4; quindi $x^2 - 5x + 4 > 0$ se e solo se $x < 1$ o $x > 4$; si ha quindi $\frac{x^2-5x+4}{x-2} < 0$ se e solo se $x < 1$ o $2 < x < 4$.
Il polinomio $x^2 - 3x + 4$ ha discriminante $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$; quindi $x^2 - 3x + 4 > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; si ha quindi $\frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0$ se e solo se $x > 21$.

Quindi si ha

$$\begin{cases} \frac{x^3-5x+4}{x-2} < 0 \\ \frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} x < 1 \text{ o } 2 < x < 4 \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se}$$

$$2 < x < 4\,.$$

1.8 Dominio naturale di funzioni

1. **Esercizio.** Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

   (a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}}$;

   (b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x}}$;

   (c) $f(x) = \sqrt{|x|-1}$;

   (d) $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$.

   Risoluzione.

   (a) Il dominio naturale di f è dato dalle soluzioni del seguente sistema

   $$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}.$$

   Il sistema equivale a $\begin{cases} x \geq 1 \text{ o } x \leq -1 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-1} \neq \sqrt{x} \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 \neq x \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 1 \neq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$, cioè a

   $$1 \leq x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ o } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

   Quindi si ha

   $$\mathrm{dom}(f) = [1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[\, \cup \,]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[\,.$$

   (b) Il dominio naturale di f è dato dalle soluzioni del seguente sistema

   $$\begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-2} - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}.$$

Il sistema equivale a $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \text{ o } x \leq -\sqrt{2} \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-2} \neq \sqrt{x} \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x^2 - 2 \neq x \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x^2 - x - 2 \neq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \neq 2 \text{ e } x \neq -1 \end{cases}$, cioè a $\sqrt{2} \leq x < 2$ o $x > 2$. Quindi si ha

$$\operatorname{dom}(f) = [\sqrt{2}, 2[\cup]2, +\infty[\ .$$

(c) Il dominio naturale di f è dato dalle $x \in \mathbf{R}$ tali che $|x| - 1 \geq 0$, cioè tali che $|x| \geq 1$, cioè tali che $x \leq -1$ o $x \geq 1$. Quindi si ha

$$\operatorname{dom}(f) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\ .$$

(d) Il dominio naturale di f è dato dalle $x \in \mathbf{R}$ tali che $|x| - 1 \neq 0$, cioè tali che $|x| \neq 1$, cioè tali che $x \neq -1$ e $x \neq 1$. Quindi si ha

$$\operatorname{dom}(f) =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[\ .$$

Capitolo 2

Numeri complessi

2.1 Parte reale, parte immaginaria, modulo

1. **Esercizio.** Determinare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

   (a) $\frac{1}{i}$;

   (b) $-\frac{1}{i}$;

   (c) $\frac{1-i}{1+7i} - 5i$;

   (d) $1 - \frac{1}{i}$;

   (e) $i - \frac{1}{i}$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $\frac{1}{i} = -i$; quindi si ha $\Re(\frac{1}{i}) = 0$, $\Im(\frac{1}{i}) = -1$.

   (b) Si ha $-\frac{1}{i} = i$; quindi si ha $\Re(-\frac{1}{i}) = 0$, $\Im(-\frac{1}{i}) = 1$.

   (c) Si ha
   $\frac{1-i}{1+7i} - 5i = \frac{(1-i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)} - 5i = \frac{1-7i-i-7}{1+49} - 5i = \frac{-6-8i}{50} - 5i = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25} - 5i = -\frac{3}{25} - \frac{129}{25}i.$
   Si ha quindi $\Re(\frac{1-i}{1+7i} - 5i) = -\frac{3}{25}$ e $\Im(\frac{1-i}{1+7i} - 5i) - \frac{129}{25}$.

   (d) Si ha $1 - \frac{1}{i} = 1 + i$. Si ha quindi
   $\Re\left(1 - \frac{1}{i}\right) = 1$ e $\Im\left(1 - \frac{1}{i}\right) = 1$.

   (e) Si ha $i - \frac{1}{i} = i + i = 2i$. Si ha quindi
   $\Re\left(i - \frac{1}{i}\right) = 0$ e $\Im\left(i - \frac{1}{i}\right) = 2$.

2. **Esercizio.** Determinare la parte reale, la parte immaginaria e il modulo dei seguenti numeri complessi:

   (a) $\frac{1}{1-i}$;

(b) $\frac{2+i}{3+i}$.

Risoluzione.

(a) Si ha
$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
Quindi si ha $\Re z = \frac{1}{2}$, $\Im z = \frac{1}{2}$, $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

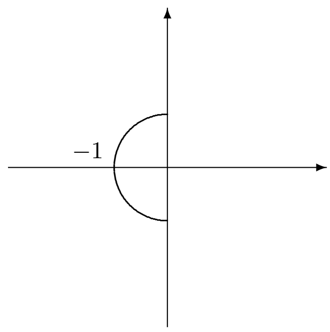
(b) Si ha
$\frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i+3i+1}{9+1} = \frac{7+i}{10} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$.
Si ha quindi
$\Re(\frac{2+i}{3+i}) = \frac{7}{5}$, $\Im(\frac{2+i}{3+i}) = \frac{1}{10}$ e
$\left|\frac{2+i}{3+i}\right| = \sqrt{\frac{49}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.2 Rappresentazione di sottoinsiemi di C

1. **Esercizio.**

   Disegnare
$$A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1, \Re z < 0\} .$$

   Risoluzione.



Capitolo 3

Lo spazio euclideo $\mathbf{R}^N$

3.1 Composizione di funzioni

1. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}_+, n \longrightarrow n! + 1 \quad \text{e} \quad g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{x} + 1 \; ;$$

determinare $g \circ f$, esprimendola nella forma

$$g \circ f : A \longrightarrow B, u \longrightarrow \mathcal{T}\{u\} \; ,$$

esplicitando A, B e $\mathcal{T}\{u\}$.

Risoluzione. Sia $n \in \mathbf{N}$; si ha
$g(f(n)) = g(n! + 1) = \sqrt{n! + 1} + 1$.
Si ha quindi

$$g \circ f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}, n \longrightarrow \sqrt{n! + 1} + 1 \; .$$

2. Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{|x|}$$

e

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2x - 1 \; ;$$

(a) determinare $f \circ g$;
(b) determinare $g \circ f$;
(c) dimostrare che g è biettiva e determinare g^{-1}.

Risoluzione.

(a) Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = \sqrt{|2x - 1|}$.
Si ha quindi

$$f \circ g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{|2x - 1|} \; .$$

(b) Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{|x|}) = 2\sqrt{|x|} - 1$.
Si ha quindi
$$g \circ f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2\sqrt{|x|} - 1 \ .$$

(c) Sia $x \in \mathbf{R}$; consideriamo l'equazione di incognita $x]in\mathbf{R}$,
$$2x - 1 = y \ .$$
L'equazione ammette una ed una sola soluzione,
$$x = \frac{y+1}{2} \ .$$
Quindi g è biettiva e si ha
$$g^{-1} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow \frac{y+1}{2} \ .$$

3.2 Componenti di una funzione vettoriale

1. **Esercizio.** Determinare le componenti della funzione $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ che a $t \in \mathbf{R}$ fa corrispondere il punto intersezione della retta di equazione
$$5x + 7y - 2 = 0$$
con la retta di equazione
$$y = t \ .$$
Risoluzione. Il valore $f(t)$ è la soluzione del sistema $\begin{cases} 5x + 2y - 2 = 0 \\ y = t \end{cases}$. Il sistema è equivalente a
$\begin{cases} y = t \\ 5x = 2 - 7t \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} y = t \\ x = \frac{2-7t}{5} \end{cases}$.
Quindi si ha $f(t) = \left(\frac{2-7t}{5}, t\right)$; quindi
$$f_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow \frac{2-7t}{5} \ ,$$
$$f_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow t \ .$$

3.3 Prodotto scalare e norma

1. **Esercizio.** Calcolare:

(a) $\big((1,4,3,2)|(-1,2,-3,1)\big)$;

(b) $\big((1,2,-1,4)|(5,3,1,-2)\big)$;

(c) $\Big(3(5,2,1,4)\Big|-(3,1,-2,4)\Big)$.

Risoluzione.

(a) Si ha $\big((1,4,3,2)\big|(-1,2,-3,1)\big) = -1+8-9+2 = 0$.

(b) Si ha $\big((1,2,-1,3)\big|(4,1,5,6)\big) = 4+2-5+18 = 19$.

(c) Si ha
$\Big(3(5,2,1,4)\Big|-(3,1,-2,4)\Big) = \Big((15,6,3,12)\Big|(-3,-1,2,-4)\Big) =$
$-45-6+6-48 = -93$.

2. **Esercizio.** Determinare il valore della seguente espressione:

$$\|2(4,1,-2,-3)+(5,7,-1,2)\| .$$

Risoluzione. Si ha
$\|2(4,1,-2,-3)+(5,7,-1,2)\| = \|(8,2,-4,-6)+(5,7,-1,2)\| =$
$\|(13,9,-5,4)\| = \sqrt{169+81+25+16} = \sqrt{291}$.

3. **Esercizio.** Dire quali delle seguenti espressioni hanno significato; di queste calcolarne il valore:

(a) $\|2(3,1,2)\| + \|(1,2,3)\|$;

(b) $7-(1,2,3)$;

(c) $\dfrac{(3,1,4)}{(4,5,3)}$.

Risoluzione.

(a) L'espressione $\|2(3,1,2)\| + \|(1,2,3)\|$ ha significato e si ha
$\|2(3,1,2)\|+\|(1,2,3)\| = 2\sqrt{9+1+4}+\sqrt{1+4+9} = 2\sqrt{14}+\sqrt{14} = 3\sqrt{14}$.

(b) L'espressione $7-(1,2,3)$ non ha significato.

(c) L'espressione $\frac{(3,1,4)}{(4,5,3)}$ non ha significato.

3.4 Distanza

1. **Esercizio.** Calcolare la distanza

(a) $d\Big((1,5,3,4),(0,2,1,6)\Big)$;

(b) $d\Big((3,1,4,5),(2,1,4,2)\Big)$.

Risoluzione.

(a) Si ha
$d\left((1,5,3,4),(0,2,1,6)\right) = \|(1,5,3,4)-(0,2,1,6)\| = \|(1,3,2,-2)\| =$
$\sqrt{1+9+4+4} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

(b) Si ha $d\left((3,1,4,5),(2,1,4,2)\right) = \|(3,1,4,5)-(2,1,4,2)\| = \|(1,0,0,3)\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

Capitolo 4

Topologia di $\mathbf{R}^N$

4.1 Intorni in $\mathbf{R}^N$

1. **Esercizio.** Dare un esempio di un intorno U in $\mathbf{R}$ di 1 tale che $1+\frac{1}{2}\notin U$.

   Risoluzione. $U =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

2. **Esercizio.** Sia
$$A = \{-\frac{1}{n}+1; n \in \mathbf{N}^*\} ;$$

   (a) determinare $\overset{\circ}{A}$ e dire se A è aperto;

   (b) determinare $\overline{A}$ e dire se A è chiuso;

   (c) determinare $\mathrm{Fr}\,(A)$;

   (d) determinare l'insieme dei punti isolati di A.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $\overset{\circ}{A}= \emptyset$; quindi A non è aperto.

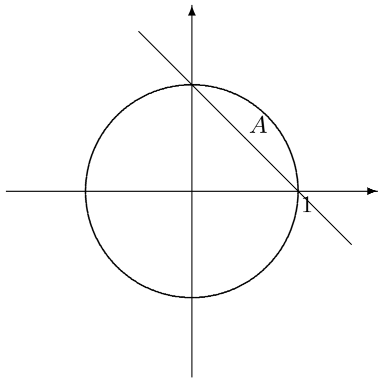
   (b) Si ha $\overline{A} = A \cup \{1\}$; poichè $1 \notin A$, A non è chiuso.

   (c) Si ha $\mathrm{Fr}\,(A) = A \cup \{1\}$.

   (d) Ogni punto di A è punto isolato.

3. **Esercizio.** Disegnare nel piano l'insieme
$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ x + y > 1\} ;$$
   dire se A è aperto; dire se A è chiuso; determinare $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\mathrm{Fr}\,(A)$ e l'insieme dei punti isolati di A.

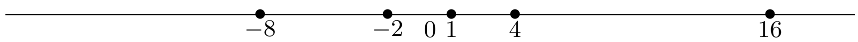
   Risoluzione. Si ha:



L'insieme A non è aperto; l'insieme A non è chiuso; si ha:
$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\}$,
$\overset{\circ}{A} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1,\ x + y > 1\}$,
$\mathrm{Fr}\,(A) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1,\ x + y \geq 1\} \cup$
$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y = 1\}$;
l'insieme dei punti isolati di A è l'insieme vuoto.

4. **Esercizio.** Sia
$$A = \{(-2)^n;\ n \in \mathbf{N}\};$$
consideriamo A come sottoinsieme dello spazio topologico $\mathbf{R}$; determinare $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\mathrm{Fr}\,(A)$ e l'insieme dei punti isolati di A; dire se A è aperto e se A è chiuso (è sufficiente rispondere direttamente, avendo presente la posizione dei punti di A sulla retta).

Risoluzione.



L'insieme A è formato da infiniti punti fra loro "separati". Si ha

(a) $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;
(b) $\overline{A} = A$;
(c) $\mathrm{Fr}\,(A) = A$;
(d) ogni punto di A è isolato;
(e) A non è aperto, in quanto $A \neq \overset{\circ}{A}$;
(f) A è chiuso, in quanto $A = \overline{A}$.

4.2 Gli spazi topologici $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R}_{(+)}$ e $\mathbf{R}_{(-)}$

1. **Esercizio.** Trovare, per lo spazio topologico $\overline{\mathbf{R}}$, un intorno di $+\infty$ diverso da $\overline{\mathbf{R}}$ e contenente $\mathbf{N}$.

Risoluzione. Un intorno di $+\infty$, diverso da $\overline{\mathbf{R}}$ e contenente $\mathbf{N}$ è $[0, +\infty[$.

4.3 Funzioni continue

1. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow (\operatorname{sgn} x)x\ ;$$

   (a) disegnare il grafico di f;

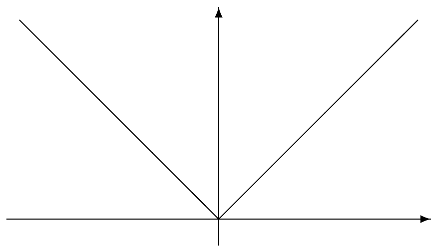
   (b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua.

   Risoluzione.

   (a) Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ -x & \text{per } x - 0 \end{cases}$$

   quindi f è la funzione valore assoluto; il grafico di f è quindi



   (b) La funzione è continua in ogni $x \in \mathbf{R}$.

2. **Esercizio.** Dire se

$$f : [0, 27] \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^4 + 1}$$

   ammette massimo e se ammette minimo, spiegandone il motivo.

   Risoluzione. Poichè f è continua e poichè $\operatorname{dom}(f)$ è compatto, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo.

3. **Esercizio.** Assegnate le funzioni

   (a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$,

   (b) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+1}$,

   dire se l'equazione di incognita x

$$f(x) = 0$$

   ammette almeno una soluzione; in tal caso determinare $a, b \in \mathbf{R}$, con $a < b$ tali che nell'intervallo $]a, b[$ vi sia almeno una soluzione dell'equazione.

   Risoluzione.

(a) Si ha $f(0) = 1 > 0$, $f(-3) = -54 + 27 + 15 + 1 = -11 < 0$; quindi per il teorema del valor intermedio esiste $x \in]-3, 0[$ tale che $f(x) = 0$.

(b) Si ha $f(-1) = \frac{1}{2} > 0$ e $f(-2) = -\frac{1}{17} < 0$; per il teorema degli zeri di una funzione continua, esiste $x \in]-2, -1[$ tale che $f(x) = 0$.

4.4 Limiti

(a) **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

i. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^2+2x-1}{2x^3+3x-5}$;

ii. $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$;

iii. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - x)$;

iv. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-1})$;

v. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+1} - x)$;

vi. $\lim_{x\to1-} \frac{5x+3}{x^2-1}$;

vii. $\lim_{x\to1+} \frac{5x+3}{x^2-1}$.

Risoluzione.

i. Si ha
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^2+2x-1}{2x^3+3x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$.

ii. Si ha
$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot 2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{2} = 1$.

iii. Si ha
$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - x) =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$.

iv. Si ha
$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-1}) =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1}} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1}} =$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1}} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}.$

v. Si ha
$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+1}-x) =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1}-x)(\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2)} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2)} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2)} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2)} = 0.$

vi. Si ha
$\lim_{x\to1-} \left|\frac{5x+3}{x^2-1}\right| = +\infty.$
Si ha $\lim_{x\to1-}(5x+3) = 8$; per il teorema della permanenza del segno la funzione $5x+3$ è positiva in un intorno sinistro di 1.
Si ha $x^2-1>0$ se e solo $x<-1$ o $x>1$ e $x^2-1<0$ se e solo se $-1<x<1$; quindi la funzione x^2-1 è negativa in un intorno sinistro di 1.
Quindi la funzione $\frac{5x+3}{x^2-1}$ è negativa in un intorno sinistro di 1.
Si ha quindi $\lim_{x\to1-} \frac{5x+3}{x^2-1} = -\infty.$

vii. Si ha
$\lim_{x\to1+} \left|\frac{5x+3}{x^2-1}\right| = +\infty.$
Si ha $\lim_{x\to1+}(5x+3) = 8$; per il teorema della permanenza del segno la funzione $5x+3$ è positiva in un intorno destro di 1.
Si ha $x^2-1>0$ se e solo $x<-1$ o $x>1$ e $x^2-1<0$ se e solo se $-1<x<1$; quindi la funzione x^2-1 è positiva in un intorno destro di 1.
Quindi la funzione $\frac{5x+3}{x^2-1}$ è positiva in un intorno destro di 1.
Si ha quindi $\lim_{x\to1+} \frac{5x+3}{x^2-1} = +\infty.$

4. **Esercizio.** Sia

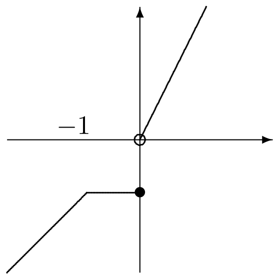
$$f :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow \begin{cases} x & \text{per } x \le -1 \\ -1 & \text{per } -1 < x \le 0 \\ 2x & \text{per } 0 < x \le 1 \end{cases} \quad ;$$

(a) tracciare approssimativamente il grafico di f;

(b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua.

Risoluzione.

(a) Si ha



(b) Per il carattere locale della continuità f è continua su $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1]$.
Consideriamo il punto -1.
Si ha
$\lim_{x\to -1-,x\neq -1} f(x) = \lim_{x\to -1-,x\in]-\infty,-1[} x = -1$
e
$\lim_{x\to -1+,x\neq -1} f(x) = \lim_{x\to -1+,x\in]-1,0]} -1 = -1$.
Si ha quindi $\lim_{x\to -1,x\neq -1} f(x) = -1$.
Si ha $f(-1) = -1$.
Quindi f è continua in -1.
Consideriamo il punto 0.
Si ha
$\lim_{x\to 0-,x\neq 0} f(x) = \lim_{x\to 0-,x\in]-1,0[} -1 = -1$
e
$\lim_{x\to 0+,x\neq 0} f(x) = \lim_{x\to 0+,x\in]0,1]} 2x = 0$.
Quindi $f|(]-\infty,1]-\{0\})$ non è convergente; Quindi f non è continua in 0.
L'insieme dei punti ove f è continua è quindi $]-\infty,0[\cup]0,1]$.

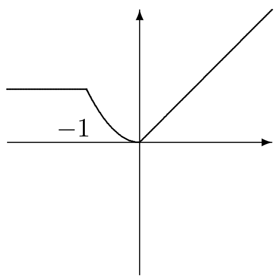
5. **Esercizio.** Assegnata la funzione

$$f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R},\ x\longrightarrow\begin{cases}1 & \text{per } x\leq -1\\ x^2 & \text{per } -1<x<0\\ x & \text{per } x\geq 0\end{cases},$$

(a) tracciare approssimativamente il grafico di f;
(b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua.

Risoluzione.

(a) Si ha



(b) Per il carattere locale della continuità f è continua su $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1]$.
Consideriamo il punto -1.
Si ha
$\lim_{x\to-1-,x\neq-1} f(x) = \lim_{x\to-1-,x\in]-\infty,-1[} 1 = 1$
e
$\lim_{x\to-1+,x\neq-1} f(x) = \lim_{x\to-1+,x\in]-1,0]} x^2 = 1$.
Si ha quindi $\lim_{x\to-1,x\neq-1} f(x) = 1$.
Si ha $f(-1) = 1$.
Quindi f è continua in -1.
Consideriamo il punto 0.
Si ha
$\lim_{x\to0-,x\neq0} f(x) = \lim_{x\to0-,x\in]-1,0[} x^2 = 0$
e
$\lim_{x\to0+,x\neq0} f(x) = \lim_{x\to0+,x\in]0,+\infty[} x = 0$.
Si ha quindi $\lim_{x\to0,x\neq0} f(x) = 0$.
Si ha $f(0) = 0$.
Quindi f è continua in 0.
L'insieme dei punti ove f è continua è quindi $\mathbf{R}$.

Capitolo 5

Confronto asintotico

5.1 Confronto asintotico

1. **Esercizio.** Trovare un $p \in \mathbf{Z}$ tale che:

   (a) $x^3 \lll_{x\to+\infty} x^{p-4}$;

   (b) $\frac{1}{x^{4p+1}} \lll_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$;

   giustificare il risultato.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $x^3 \lll_{x\to+\infty} x^{p-4}$ se e solo se $3 < p-4$, cioè se e solo se $p > 7$. Si può quindi scegliere $p = 8$.

   (b) Si ha $\frac{1}{x^{4p+1}} \lll_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$ se e solo se $x^{-(4p+1)} \lll_{x\to 0} x^{-3}$, cioè se e solo se $-4p-1 > -3$, cioè se e solo se $-4p > -2$, cioè se e solo se $p < \frac{1}{2}$. Si può quindi scegliere $p = 0$.

2. **Esercizio.** Determinare i $p \in \mathbf{Z}$ tale che:

   (a) $x^5 + 3x^2 \lll_{x\to+\infty} x^{3p-1}$;

   (b) $x^5 + 2x^2 \lll_{x\to 0} x^{3p-2}$;

   (c) $x^4 - 3x \lll_{x\to-\infty} x^{2p-4}$;

   giustificare il risultato.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $x^5 + 3x^2 \sim_{x\to+\infty} x^5$; quindi si ha $x^5 + 3x^2 \lll_{x\to+\infty} x^{3p-1}$ se e solo se $x^5 \lll_{x\to+\infty} x^{3p-1}$, cioè se e solo se $5 < 3p-1$, cioè se e solo se $6 < 3p$, cioè se e solo se $p > 2$.

   (b) Si ha $x^5 + 2x^2 \sim_{x\to 0} 2x^2$; quindi si ha $x^5 + 2x^2 \lll_{x\to 0} x^{3p-2}$ se e solo se $x^2 \lll_{x\to 0} x^{3p-2}$, cioè se e solo se $2 > 3p-2$, ciośe e solo se $4 > 3p$, cioè se e solo se $p < \frac{4}{3}$.

(c) Si ha $x^4-3x\sim_{x\to-\infty}x^4$; quindi si ha $x^4-3x\lll_{x\to-\infty}x^{2p-4}$ se e solo se $x^4\lll_{x\to-\infty}x^{2p-4}$, cioè se e solo se $4<2p-4$, cioè se e solo se $2p>8$, cioè se e solo se $p>4$.

3. **Esercizio.** Determinare gli $a\in\mathbf{R}$ e i $p\in\mathbf{Z}$ tali che

 (a) $x^3+x+1\sim_{x\to0}(a-2)x^{p+3}$,

 (b) $x^2+3x+1\sim_{x\to+\infty}(a+1)x^{p-1}+3ax+2$.

 Risoluzione.

 (a) Si ha $x^3+x+1\sim_{x\to0}1$; quindi si ha $x^3+x+1\sim_{x\to0}(a-2)x^{p+3}$ se e solo se $1\sim_{x\to0}(a-2)x^{p+3}$, cioè se e solo se $p+3=0$ e $a-2=1$, cioè se e solo se $p=-3$ e $a=3$.

 (b) Si ha $x^2+3x+1\sim_{x\to+\infty}x^2$; quindi si ha $x^2+3x+1\sim_{x\to+\infty}(a+1)x^{p-1}+3ax+2$ se e solo se $x^2\sim_{x\to+\infty}(a+1)x^{p-1}+3ax+2$. Perchè ciò accada deve essere $p-1=2$, cioè $p=3$; deve inoltre essere $a+1\neq0$, cioè $a\neq-1$. Supponiamo $p=3$ e $a\neq-1$; si ha allora $(a+1)x^{p-1}+3ax+2\sim_{x\to+\infty}(a+1)x^2$; si ha quindi $x^2\sim_{x\to+\infty}(a+1)x^{p-1}+3ax+2$ se e solo se $x^2\sim_{x\to+\infty}(a+1)x^2$, cioè se e solo se $a+1=1$, cioè se e solo se $a=0$. Si trova dunque $p=3$ e $a=0$.

5.2 Principio di sostituzione

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti

 (a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+x}{x+\sqrt{x}}$;

 (b) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}+2x}{2x^2-3\sqrt{x}}$.

 Risoluzione.

 (a) Si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+x}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$.

 (b) Si ha $\frac{\sqrt{x}+2x}{2x^2-3\sqrt{x}}\sim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{-3\sqrt{x}}=-\frac{1}{3}$. Quindi si ha $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}+2x}{2x^2-3\sqrt{x}}=-\frac{1}{3}$.

5.3 Asintoti

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per $x\to+\infty$; in caso affermativo determinare l'asintoto:

 (a) $f(x)=\frac{2x^2+x+3}{x-3}$;

 (b) $f(x)=\sqrt{x^2-x+2}$.

 Risoluzione.

(a) Si ha
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x+3}{x^2-3x} = 2.$
Si ha
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2+x+3}{x-3} - 2x\right) =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x+3-2x^2+6x}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x+3}{x-3} = 7.$
Quindi f ammette sviluppo asintotico affine per $x \to +\infty$ e l'asintoto a f per $x \to \infty$ è la retta $y = 2x + 7$.

(b) Si ha
$\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x} \sim_{x\to+\infty} 1$; quindi si ha
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x} = 1.$
Si ha
$\sqrt{x^2-x+2} - x = \frac{(\sqrt{x^2-x+2}-x)(\sqrt{x^2-x+2}+x)}{\sqrt{x^2-x+2}+x} = \frac{x^2-x+2-x^2}{\sqrt{x^2-x+2}+x} =$
$\frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+2}+x} \sim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$
Quindi f ammette sviluppo asintotico affine per $x \to +\infty$ e l'asintoto di f per $x \to +\infty$ è la retta

$$y = x - \frac{1}{2} \; .$$

2. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per $x \to -\infty$; in caso affermativo determinare l'asintoto:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$;

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}}{x^2}$;

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}$.

Risoluzione.

(a) Si ha
$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1.$
Si ha
$\lim_{x\to-\infty}(f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + x\right) =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{-2x} =$
$\frac{1}{2}.$
Quindi f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e l'asintoto di f per $x \to -\infty$ è la retta di equazione $y = -x + \frac{1}{2}$.

(b) Nell'equivalenza che segue possiamo supporre $x < 0$; si ha
$\frac{\sqrt{x^6+x^5+1}}{x^2} \sim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6}}{x^2} = \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{x^2} = \frac{|x^3|}{x^2} = \frac{-x^3}{x^2} = -x$
e
$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^6+x^5+1}}{x^2} + x\right) =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}+x^3}{x^2} =$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}+x^3}{x^2} \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}-x^2}{\sqrt{x^6+x^5+1}-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6+x^5+1-x^6}{x^2(\sqrt{x^6+x^5+1}-x^2)} =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5}{x^2(\sqrt{x^6+x^5+1}-x^3)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5}{-2x^5} = -\frac{1}{2}$.
Quindi f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e l'asintoto di f per $x \to -\infty$ è la retta di equazione $y = -x - \frac{1}{2}$.

(c) Si ha
$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \sim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3} = x$
e
$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - x) =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+x+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}+x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+x+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}+x^2} =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+x+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+x+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}+x^2} =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$.
Quindi f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e l'asintoto di f per $x \to -\infty$ è la retta di equazione $y = x + \frac{1}{3}$.

Capitolo 6

Serie

6.1 Serie convergenti

1. **Esercizio.** Data la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n+4} \, ,$$
e indicata con s la successione delle somme parziali, calcolare s_2, esprimendo tale numero razionale nella forma $\frac{p}{q}$.

   Risoluzione. Indicata con a la successione dei termini della serie, si ha $a_0 = \frac{3}{4}$, $a_1 = \frac{4}{5}$, $a_2 = \frac{5}{6}$; quindi si ha
$$s_2 = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{143}{60} \, .$$

6.2 Serie geometrica

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti serie sono convergenti e in caso affermativo, determinare la loro somma.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1} 3^{n+1}}{3^{2n}}$;

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-2} 3^{n+2}}{3^{2n}}$;

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-3} 3^{n+3}}{3^{2n}}$;

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-4} 3^{n+4}}{3^{2n}}$;

   giustificare la risposta.

   Risoluzione.

(a) Si ha
$(-1)^n \frac{2^{n-1}3^{n+1}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9^n} \frac{3}{2} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{3}{2} = (-\frac{2}{3})^n \frac{3}{2}$.
Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$; quindi la serie è convergente e ha per somma $\frac{3}{2} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{9}{10}$.

(b) Si ha
$(-1)^n \frac{2^{n-2}3^{n+2}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9n} \frac{9}{4} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{9}{4} = (-\frac{2}{3})^n \frac{9}{4}$.
Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$; quindi la serie è convergente e ha per somma $\frac{9}{4} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{27}{20}$.

(c) Si ha
$(-1)^n \frac{2^{n-3}3^{n+3}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9n} \frac{27}{8} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{27}{8} = (-\frac{2}{3})^n \frac{27}{8}$.
Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$; quindi la serie è convergente e ha per somma $\frac{27}{8} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{81}{40}$.

(d) Si ha
$(-1)^n \frac{2^{n-4}3^{n+4}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9n} \frac{81}{16} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{81}{16} = (-\frac{2}{3})^n \frac{81}{16}$.
Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$; quindi la serie è convergente e ha per somma $\frac{81}{16} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{243}{80}$.

2. **Esercizio.** Determinare, attraverso le serie, la frazione generatrice del seguente numero periodico

$$.5\overline{31}\ .$$

Risoluzione. Si ha
$.5\overline{31} = \frac{5}{10} + \frac{31}{1000} + \frac{31}{100000} + \frac{31}{10000000} + \ldots = \frac{5}{10} + \frac{31}{1000} \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{526}{990}$.

3. **Esercizio.** Determinare (se esiste) la serie geometrica di primo termine 1 e avente per somma 3.

Risoluzione. Se q è la ragione della serie geometrica, deve essere $\frac{1}{1-q} = 3$, cioè $1 - q = \frac{1}{3}$, cioè $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; la serie geometrica è quindi $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

4. **Esercizio.** Determinare gli $x \in \mathbf{R}^*$ per i quali le seguenti serie sono convergenti:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{x})^n$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})^n$;

per tali x determinare la somma della serie.

Risoluzione.

(a) Si tratta di una serie geometrica di ragione $1 - \frac{1}{x}$. La serie è convergente se e solo se $-1 < 1 - \frac{1}{x} < 1$, cioè se e solo se $-2 < -\frac{1}{x} < 0$, cioè se e solo se $\begin{cases} -\frac{1}{x} < 0 \\ \frac{1}{x} - 2 < 0 \end{cases}$; il sistema è equivalente a
$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{1-2x}{x} < 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \text{ o } x > \frac{1}{2} \end{cases}$, cioè a $x > \frac{1}{2}$;

quindi la serie è convergente per $x > \frac{1}{2}$.
Per $x > \frac{1}{2}$, la somma della serie è
$\frac{1}{1-(1-\frac{1}{x})} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.

(b) La serie è convergente se e solo se $\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right| < 1$, cioè se e solo se $\sqrt{x^2+1} < |x|$, cioè se e solo se $x^2 + 1 < x^2$, cioè se e solo se $1 < 0$. Quindi la serie non è convergente per alcun x.

5. **Esercizio.** Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ le seguenti seguente serie sono convergenti:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2+|x|})^n$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(2+|x|)^n$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{|x|}{1+|x|})^n$;

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-x}{1+|x|})^n$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty}(|x-1| - x^2)^n$;

(f) $\sum_{n=0}^{\infty}(|x-1| - x)^n$;

per tali x determinare la somma della serie.

Risoluzione.

(a) Sia $x \in \mathbf{R}$; la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2+|x|})^n$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2+|x|}$. La serie è convergente se e solo se $|\frac{1}{2+|x|}| < 1$, cioè se e solo se $\frac{1}{2+|x|} < 1$, cioè se e solo se $2 + |x| > 1$, cioè se e solo se $|x| > -1$; quindi per ogni $x \in \mathbf{R}$.
Per $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2+|x|})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2+|x|}} = \frac{2+|x|}{1+|x|}\ .$$

(b) Sia $x \in \mathbf{R}$; la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(2+|x|)^n$ è una serie geometrica di ragione $2+|x|$. Si ha $2 + |x| \geq 1$; quindi la serie è divergente positivamente. Quindi per ogni $x \in \mathbf{R}$ la serie assegnata non è convergente.

(c) Sia $x \in \mathbf{R}$; la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{|x|}{1+|x|})^n$ è una serie geometrica di ragione $\frac{|x|}{1+|x|}$. La serie è convergente se e solo se $|\frac{|x|}{1+|x|}| < 1$, cioè se e solo se $\frac{|x|}{1+|x|} < 1$, cioè se e solo se $|x| < 1+|x|$, cioè se e solo se $0 < 1$; quindi per ogni $x \in \mathbf{R}$.
Per $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{|x|}{1+|x|})^n = \frac{1}{1-\frac{|x|}{1+|x|}} = \frac{1+|x|}{1-|x|+|x|} = 1+|x|\ .$$

(d) Sia $x \in \mathbf{R}$; la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-x}{1+|x|})^n$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1-x}{1+|x|}$.
Supponiamo $x > 0$; si ha la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-x}{1+x})^n$; tale serie è convergente se e solo se $-1 < \frac{1-x}{1+x} < 1$, cioè se e solo se $\begin{cases} -1 < \frac{1-x}{1+x} \\ \frac{1-x}{1+x} < 1 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} -1-x < 1-x \\ 1-x < 1+x \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} -1 < 1 \\ -x < x \end{cases}$, cioè se e solo se $-1 < 1$; poichè $-1 < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-x}{1+x})^n$ è convergente.
Supponiamo $x \leq 0$; si ha la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ che è divergente positivamente.
Quindi la serie assegnata è convergente se e solo se $x > 0$.
Sia $x > 0$; si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-x}{1+|x|})^n = \frac{1}{1-\frac{1-x}{1+|x|}} = \frac{1+|x|}{x+|x|} = \frac{1+x}{2x} .$$

(e) Si tratta di un serie geometrica di ragione $|x-1|-x^2$; la serie è convergente se e solo se $-1 < |x-1|-x^2 < 1$, cioè $\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \end{cases}$; tale sistema è equivalente a
$\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$.
Il sistema $\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x-1-x^2 < 1 \\ x-1-x^2 > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2-x+2 > 0 \\ x^2-x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$.
Il polinomio x^2-x+2 ha discriminante $\Delta = 1-8 = -7 < 0$; per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha quindi $x^2-x+2 > 0$; quindi il sistema $\begin{cases} x^2-x+2 > 0 \\ x^2-x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x^2-x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$; tale sistema non ammette alcuna soluzione.
Il sistema $\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} 1-x-x^2 < 1 \\ 1-x-x^2 > -1 \\ x < 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2+x > 0 \\ x^2+x-2 < 0 \\ x < 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ -2 < x < 1 \\ x < 1 \end{cases}$, cioè a $-2 < x < -1$ o $0 < x < 1$.
La serie è quindi convergente se e solo se $-2 < x < -1$ o $0 < x < 1$; per tali x si ha
$\sum_{n=0}^{\infty}(|x-1|-x^2)^n = \frac{1}{1-|x-1|+x^2} = \frac{1}{1+x-1+x^2} = \frac{1}{x^2+x}$.

(f) Si tratta di una serie geometrica di ragione $|x-1|-x$. La serie è convergente se e solo se $-1 < |x-1|-x < 1$, cioè se e solo se $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \end{cases}$.

Il sistema $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \end{cases}$ è equivalente a

$\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$.

Il sistema $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x-1-x < 1 \\ x-1-x > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -1 < 1 \\ -1 > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$;

poichè $-1 > -1$ è falsa il sistema non è mai verificato.

Il sistema $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} -x+1-x < 1 \\ -x+1-x > -1 \\ x < 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -2x < 0 \\ -2x > -2 \\ x < 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x < 1 \end{cases}$, cioè a $0 < x < 1$.

Quindi la serie è convergente se e solo se $0 < x < 1$; per tali x la somma della serie è
$\frac{1}{1-|x-1|+x} = \frac{1}{1+x-1+x} = \frac{1}{2x}$.

6. **Esercizio.** Determinare gli x del dominio naturale per i quali le seguenti serie sono convergenti:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{x-1}-x)^n$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-x\right)^n$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{|x-1|}-1)^n$;

per tali x determinare la somma della serie.

Risoluzione.

(a) La serie è assegnata per $x-1 \geq 0$. Si tratta di una serie geometrica di ragione $\sqrt{x-1}-x$. La serie è convergente se e solo se $-1 < \sqrt{x-1}-x < 1$, cioè se e solo se $\begin{cases} \sqrt{x-1}-x < 1 \\ \sqrt{x-1}-x > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè, se e solo se $\begin{cases} \sqrt{x-1} < x+1 \\ \sqrt{x-1} > x-1 \\ x \geq 1 \end{cases}$,

cioè, essendo anche $x+1 \geq 0$, se e solo se $\begin{cases} x-1 < (x+1)^2 \\ x-1 > (x-1)^2 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} x-1 < x^2+2x+1 \\ x-1 > x^2-2x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} x^2+x+2 > 0 \\ x^2-3x+1 < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} x^2-3x+1 < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè se e solo se $1 < x < 2$.

Quindi la serie è convergente se e solo se $1 < x < 2$; per tali x la somma della serie è
$\frac{1}{1-\sqrt{x-1}+x}$.

(b) 1^o *modo* Il dominio naturale della funzione definita da $\sqrt{2x^2-1}-x$ è dato dalle x soddisfacenti $2x^2-1 \geq 0$.

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $\sqrt{2x^2-1}-x$; la serie è quindi convergente se e solo se $-1 < \sqrt{2x^2-1}-x < 1$.

Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x^2-1 \geq 0 \\ -1 < \sqrt{2x^2-1}-x \\ \sqrt{2x^2-1}-x < 1 \end{cases} .$$

Risolviamo $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$.

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} .$$

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a
$\begin{cases} 2x^2-1 > (x-1)^2 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 2x^2-1 > (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a
$\begin{cases} 2x^2-1 > x^2+2x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} x^2+2x-2 > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè a
$\begin{cases} x < -1-\sqrt{3} \text{ o } x > -1+\sqrt{3} \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè a $x \geq 1$.

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ cioè a
$\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x < 1 \end{cases}$, cioè a $x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1$.

La disequazione $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$ è quindi equivalente a $x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Risolviamo $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$.

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases} .$$

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a

$\begin{cases} 2x^2-1 < 1+2x+x^2 \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2-2x-2 < 0 \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$, cioè a

$\begin{cases} 1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3} \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$, cioè a $1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{\text{o}} \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3}$.

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$ non ammette soluzioni.

La disequazione $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$ è quindi equivalente a $1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3}$.

Il sistema $\begin{cases} 2x^2-1 \geq 0 \\ -1 < \sqrt{2x^2-1} - x \\ \sqrt{2x^2-1} - x < 1 \end{cases}$ è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{\text{o}} \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3} \end{cases} ,$$

cioè a $1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{\text{o}} \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3}$.

Quindi la serie è convergente per

$$x \in]1-\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{3}[\;;$$

per tali x si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2x^2-1} - x)^n = \frac{1}{1-\sqrt{2x^2-1}+x} .$$

2^o *modo* Il dominio naturale della funzione definita da $\sqrt{2x^2-1}-x$ è dato dalle x soddisfacenti $2x^2-1\geq 0$.
La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $\sqrt{2x^2-1}-x$; la serie è quindi convergente se e solo se $-1<\sqrt{2x^2-1}-x<1$.
Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x^2-1\geq 0 \\ -1<\sqrt{2x^2-1}-x \\ \sqrt{2x^2-1}-x<1 \end{cases} .$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x^2-1\geq 0 \\ \sqrt{2x^2-1}>x-1 \\ \sqrt{2x^2-1}<1+x \end{cases} ,$$

cioè a

$$\begin{cases} 2x^2-1\geq 0 \\ \sqrt{2x^2-1}>x-1 \\ \sqrt{2x^2-1}<1+x \\ x<-1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 2x^2-1\geq 0 \\ \sqrt{2x^2-1}>x-1 \\ \sqrt{2x^2-1}<1+x \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases} \text{ o }$$

$$\begin{cases} 2x^2-1\geq 0 \\ \sqrt{2x^2-1}>x-1 \\ \sqrt{2x^2-1}<1+x \\ x>1 \end{cases} .$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2-1\geq 0 \\ \sqrt{2x^2-1}>x-1 \\ \sqrt{2x^2-1}<1+x \\ x<-1 \end{cases} ;$$

si ha $1+x<0$; quindi l'equazione $\sqrt{2x^2-1}<1+x$ non è mai soddisfatta; quindi il sistema non ha soluzioni.
Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2-1\geq 0 \\ \sqrt{2x^2-1}-x>x-1 \\ \sqrt{2x^2-1}<1+x \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases} ;$$

il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x^2-1\geq 0 \\ 2x^2-1<(1+x)^2 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases} ,$$

cioè a

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2x^2 - 1 < 1 + 2x + x^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2x - 2 < 0 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \\ 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3} \end{cases},$$

cioè a

$$1 - \sqrt{3} < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \,.$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ x > 1 \end{cases};$$

il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 1 > (x-1)^2 \\ 2x^2 - 1 < (1+x)^2 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 1 > x^2 - 2x + 1 \\ 2x^2 - 1 < 1 + 2x + x^2 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 - \sqrt{3} \text{ o } x > -1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3} \end{cases},$$

cioè a

$$1 < x < 1 + \sqrt{3} \,.$$

Quindi il sistema da cui siamo partiti è equivalente a

$$1 - \sqrt{3} < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 1 + \sqrt{3} \,.$$

Quindi la serie è convergente per

$$x \in]1 - \sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{3}[\;;$$

per tali x si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2x^2-1}-x)^n = \frac{1}{1-\sqrt{2x^2-1}+x} \ .$$

(c) La serie è assegnata per $x-1 \neq 0$, cioè per $x \neq 1$. Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{|x-1|}-1$. La serie è convergente se e solo se $-1 < \frac{1}{|x-1|}-1 < 1$, cioè se e solo se $0 < \frac{1}{|x-1|} < 2$, cioè se e solo se $\frac{1}{|x-1|} < 2$, cioè se e solo se $|x-1| > \frac{1}{2}$, cioè se e solo se $x-1 < -\frac{1}{2}$ o $x-1 > \frac{1}{2}$, cioè se e solo se $x < \frac{1}{2}$ o $x > \frac{3}{2}$.
Per tali x la somma della serie è
$\frac{1}{1-\frac{1}{|x-1|}+1} = \frac{1}{2-\frac{1}{|x-1|}} = \frac{|x-1|}{2|x-1|-1}$.

6.3 Serie a termini positivi

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2+n+1}{n^3+1}$;

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+7n+3}{n^5+n+2}$;

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+5n+2}{n^3+3n+1}$;

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{2n^2+1}$;

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3-2n}}{n^5+1}$;

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^3+2n+3}}$;

   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$;

   (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}-n^3}{\sqrt{n^5+1}}$;

   giustificare la risposta.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $\frac{5n^2+n+1}{n^3+1} \sim_{n\to\infty} \frac{5}{n}$; quindi la serie data è divergente positivamente.

   (b) Si ha
   $$\frac{n^2+7n+3}{n^5+n+2} \sim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3} \ ;$$
   quindi la serie è convergente.

   (c) Si ha
   $$\frac{n^2+5n+2}{n^3+3n+1} \sim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \ ;$$
   quindi la serie è divergente positivamente.

(d) Si ha $\frac{n^2+3}{2n^2+1} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{2}$; quindi la serie è divergente positivamente.

(e) Si ha $\frac{\sqrt{n^4+n^3-2n}}{n^5+1} \sim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3}$; quindi la serie è convergente.

(f) Si ha
$\sqrt{\frac{n^2+1}{n^3+2n+3}} \sim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \not\succ_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.
Quindi la serie assegnata è divergente positivamente.

(g) Si ha $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$; quindi la serie è divergente positivamente.

(h) Si ha $\frac{n+\sqrt{n}-n^3}{\sqrt{n^5+1}} \sim_{n\to\infty} \frac{-n^3}{\sqrt{n^5}} = -\frac{n^3}{n^2\sqrt{n}} = -\frac{n}{\sqrt{n}}$; si ha $\lim_{n\to\infty} -\frac{n}{\sqrt{n}} = -\infty$; quindi la serie è divergente negativamente.

2. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{n^3+3^n}$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+5^n}{4n+4^n}$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n+n^3}{3^n+n^4}$;

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+7n+1}{n!+3^n+1}$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n!+n}$;

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-n!}{n^3+2n!}$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+n+2}{n!-n+3}$;

giustificare la risposta.

Risoluzione.

(a) Si ha
$\frac{n^2+2^n}{n^3+3^n} \sim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$..
Quindi la serie assegnata è convergente.

(b) Si ha $\frac{4n+5^n}{4n+4^n} \sim_{n\to\infty} \frac{5^n}{4^n} = \left(\frac{5}{4}\right)^n$; quindi la serie è divergente positivamente.

(c) Si ha $\frac{n^2 2^n+n^3}{3^n+n^4} \sim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n}{3^n} = n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$; quindi la serie è convergente.

(d) Si ha $\frac{2^n+7n+1}{n!+3^n+1} \sim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$; quindi la serie data è convergente.

(e) Si ha
$\frac{2^n+3^n}{n!+n} \sim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$;
quindi la serie è convergente.

(f) Si ha $\frac{n^2-n!}{n^3+2n!} \sim_{n\to\infty} \frac{-n!}{2n!} = -\frac{1}{2}$.
Quindi la serie è divergente negativamente.

(g) Si ha
$\frac{n^5+n+2}{n!-n+3} \sim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$;
quindi la serie è convergente.

3. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^{n^2}}$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}+n}{2^{n^3}+n^2}$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+2}{(2n)!+3}$;

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{n+3}{2^n+1})^n$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$;

giustificare la risposta.

Risoluzione.

(a) Si ha:
$\frac{\frac{(n+1)!}{3^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{3^{n^2}}} = \frac{n!(n+1)}{3^{n^2+2n+1}} \frac{3^{n^2}}{n!} = \frac{n+1}{3^{2n+1}} = \frac{n+1}{3 \cdot 9^n} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{n}{9^n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$
Quindi la serie data è convergente per il criterio del rapporto.

(b) Si ha $\frac{2^{n^2}+n}{2^{n^3}+n^2} \sim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{2^{n^3}}$. Si ha:
$\frac{\frac{2^{(n+1)^2}}{3^{(n+1)^3}}}{\frac{2^{n^2}}{2^{n^3}}} = \frac{2^{n^2+2n+1}}{2^{n^3+3n^2+3n+1}} \frac{2^{n^3}}{2^{n^2}} = 2^{-3n^2-n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$
Quindi la serie data è convergente per il criterio del rapporto.

(c) Si ha $\frac{n!+2}{(2n)!+3} \sim_{n\to\infty} \frac{n!}{(2n)!}$; Si ha:
$\frac{\frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{n!}{(2n)!}} = \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$
Quindi, per il criterio del rapporto, serie data è convergente.

(d) Si ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n+3}{2^n+1})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$
Quindi, per il criterio della radice, la serie è convergente.

(e) Si ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$
Quindi, per il criterio della radice, la serie è convergente.

6.4 Limiti di successioni

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti di successioni

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{n+3^n}$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 5^n - n!}{n^5 7^n + 2n!}$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n-n}{7^n-n!}$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n+n!}{n^2+9^n}$;

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2^n+n!}{n^2+3^n+2n!}$.

Risoluzione.

(a) Si ha $\frac{2^{n+1}+3^n}{n+3^n} \sim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n} = 1$. Quindi si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{n+3^n} = 1$.

(b) Si ha $\frac{n^3 5^n - n!}{n^5 7^n + 2n!} \sim_{n\to\infty} \frac{-n!}{2n!} = -\frac{1}{2}$. Quindi si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 5^n - n!}{n^5 + 2n!} = -\frac{1}{2}$.

(c) Si ha $\frac{2^n+3^n-n}{7^n-n!} \sim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$; quindi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n-n}{7^n-n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0 \, .$$

(d) Si ha $\frac{5^n+n!}{n^2+9^n} \sim_{n\to\infty} \frac{n!}{9^n}$; quindi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n+n!}{n^2+9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{9^n} = +\infty \, .$$

(e) Si ha $\frac{n+2^n+n!}{n^2+3^n+2n!} \sim_{n\to\infty} \frac{n!}{2n!} = \frac{1}{2}$; quindi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2^n+n!}{n^2+3^n+2n!} = \frac{1}{2} \, .$$

Capitolo 7

Serie di potenze

7.1 Serie di potenze

1. **Esercizio.** Studiare le seguenti serie di potenze:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2n}{2^n} z^n$;

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3^n}{n^4+5^n} z^n$;

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n$;

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n!+3^n} z^n$;

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+2^n}{n^2+3^n} z^n$;

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{2^n+n} z^n$;

   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+n^2+1}{n^2+n+1} z^n$;

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n+n^3}{n^2+1} z^n$.

   Risoluzione.

   (a) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha
   $\left|\frac{1+2n}{2^n} z^n\right| \sim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n}|z|^n = 2n\left(\frac{|z|}{2}\right)^n$.
   Quindi la serie di potenze è assolutamente convergente in z se e solo se $\frac{|z|}{2} < 1$, cioè se e solo se $|z| < 2$. Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 2.
   Per $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 2$ si ha
   $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+2n}{2^n} z^n\right| = \lim_{n\to\infty} 2n\left(\frac{|z|}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2n = +\infty$.
   Quindi la serie non è convergente in z.

   (b) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha
   $\left|\frac{n^2+3^n}{n^4+5^n} z^n\right| \sim_{n\to\infty} (\frac{3}{5}|z|)^n$;

quindi la serie è assolutamente convergente se e solo se $\frac{3}{5}|z| < 1$, ciośe e solo se $|z| < \frac{5}{3}$. Quindi il raggio di convergenza è $\frac{5}{3}$.
Per $z \in \mathbf{C}$, $|z| = \frac{5}{3}$ si ha
$\lim_{n\to\infty} |\frac{n^2+3^n}{n^4+5^n} z^n| = \lim_{n\to\infty} (\frac{3}{5}|z|)^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.
Quindi la serie non è convergente in z.

(c) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha
$|\frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n| \sim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n}|z|^n = (\frac{2}{3}|z|)^n$
Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n$ è assolutamente convergente se e solo se $\frac{2}{3}|z| < 1$, cioè se e solo se $|z| < \frac{3}{2}$. Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $\frac{3}{2}$.
Per $z \in \mathbf{C}$, $|z| = \frac{3}{2}$ si ha
$\lim_{n\to\infty} |\frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n| = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3}|z|)^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.
Quindi la serie non è convergente in z.

(d) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha
$|\frac{n+2^n}{n!+3^n} z^n| \sim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}|z|^n = \frac{(2|z|)^n}{n!}$
Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n!+3^n} z^n$ è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbf{C}$.
Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$r = +\infty\ .$$

(e) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha
$|\frac{n!+2^n}{n^2+3^n} z^n| \sim_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n}|z|^n = n!(\frac{|z|}{3})^n$
Per $z \neq 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} n!(\frac{|z|}{3})^n = +\infty$
Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+2^n}{n^2+3^n} z^n$ è assolutamente convergente se e solo se $z = 0$. Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$r = 0\ .$$

(f) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $\left|\frac{n+5}{2^n+n} z^n\right| \sim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}|z|^n = n\left(\frac{|z|}{2}\right)^n$;
la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in z se e solo se $\frac{|z|}{2} < 1$, cioè se e solo se $|z| < 2$; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 2.
Per $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 2$ si ha
$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+5}{2^n+n} z^n\right| = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|z|}{2}\right)^n \lim_{n\to\infty} n = +\infty$.
Quindi la serie non è convergente in z.

(g) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $\left|\frac{3^n+n^2+1}{n^2+n+1} z^n\right| \sim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^2}|z|^n = \frac{1}{n^2}(3|z|)^n$;
la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in z se e solo se $3|z| \leq 1$, cioè se e solo se $|z| \leq \frac{1}{3}$; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $\frac{1}{3}$.
Supponiamo $z \in \mathbf{C}$ e $|z| = \frac{1}{3}$; abbiamo visto che per $|z| = \frac{1}{3}$ la serie è assolutamente convergente; quindi la serie è convergente in z.

(h) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $\left|\frac{n3^n+n^3}{n^2+1}z^n\right| \sim_{n\to\infty} \frac{n3^n}{n^2}|z|^n = \frac{1}{n}|3z|^n$; la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in z se e solo se $|3z|<1$, cioè se e solo se $|z|<\frac{1}{3}$; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $\frac{1}{3}$.

Supponiamo $z \in \mathbf{C}$ e $|z| = \frac{1}{3}$.

Si ha
$\frac{n3^n+n^3}{n^2+1}z^n = \left(\frac{n3^n+n^3}{n^2+1}z^n - \frac{3^n}{n}z^n\right) + \frac{3^n}{n}z^n = \frac{n^4-3^n}{n(n^2+1)}z^n + \frac{1}{n}(3z)^n$.

Si ha $\left|\frac{n^4-3^n}{n(n^2+1)}z^n\right| \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(3|z|)^n = \frac{1}{n^3}$; quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4-3^n}{n(n^2+1)}z^n$ è assolutamente convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(3z)^n$ è convergente per $3z \neq 1$, non convergente per $3z = 1$, cioè è convergente per $z \neq \frac{1}{3}$, non convergente per $z = \frac{1}{3}$.

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n+n^3}{n^2+1}z^n$ è convergente per $z \neq \frac{1}{3}$, non convergente per $z = \frac{1}{3}$.

2. **Esercizio.** Determinare l'insieme degli x reali per i quali la seguente serie è definita ed è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1}\left(\frac{x+2}{x}\right)^n .$$

Risoluzione. La serie è definita per $x \neq 0$.

Supponiamo $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

Poniamo $t = \frac{x+2}{x}$.

Consideriamo la serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1}t^n$.

Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha
$\left|\frac{n^2+3}{n^3+1}t^n\right| \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|t|^n$; la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in t se e solo se $|t|<1$; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 1.

Supponiamo $t \in \mathbf{R}$ e $|t| = 1$, cioè $t = 1$ o $t = -1$.

Per $t = 1$ si ha la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1}$; si ha $\frac{n^2+3}{n^3+1} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$; quindi la serie di potenze non è convergente in 1.

Per $t = -1$ si ha

Si ha
$\frac{n^2+3}{n^3+1}(-1)^n = \left(\frac{n^2+3}{n^3+1}(-1)^n - \frac{1}{n}(-1)^n\right) + \frac{1}{n}(-1)^n = \frac{3n-1}{n(n^3+1)}(-1)^n + \frac{1}{n}(-1)^n$.

Si ha $\left|\frac{3n-1}{n(n^3+1)}(-1)^n\right| \sim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}$; quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n^3+1)}(-1)^n$ è assolutamente convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$ è convergente per il criterio di Leibniz.

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1}(-1)^n$ è convergente.

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1}t^n$ è quindi convergente se e solo se $-1 \leq t < 1$.

La serie assegnata è quindi convergente se $x \in \mathbf{R}^*$ è tale che $-1 \leq \frac{x+2}{x} < 1$.

Ciò equivale a dire
$\begin{cases} \frac{x+2}{x} \geq -1 \\ \frac{x+2}{x} < 1 \end{cases}$, cioè
$\begin{cases} \frac{x+2}{x} + 1 \geq 0 \\ \frac{x+2}{x} - 1 < 0 \end{cases}$, cioè
$\begin{cases} \frac{x+1}{x} \geq 0 \\ \frac{1}{x} < 0 \end{cases}$, cioè
$\begin{cases} x \leq -1 \text{ o } x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè
$x \leq -1$.

La serie assegnata è quindi assegnata e convergente se e solo se $x \leq -1$.

3. **Esercizio.** Dimostrare che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

(la somma della quale è $\sin z$) ha raggio di convergenza $+\infty$.

Risoluzione. Sia $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$; studiamo l'assoluta convergenza della serie di potenze in z, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Applichiamo il criterio del rapporto; si ha
$\frac{\frac{|z|^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{|z|^{2n+1}}{2n+1!}} = \frac{|z|^{2n+3}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{|z|^{2n+1}} = |z|^2 \frac{1}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} (2n+1)! =$
$\frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+3)} \sim \frac{|z|^2}{4n^2} \longrightarrow_{n \to \infty} 0.$

Quindi la serie è assolutamente convergente in z. Per l'arbitrarietà di z la serie di potenze ha raggio di convergenza $+\infty$.

7.2 Esponenziale, seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico

1. **Esercizio.** Dire se la relazione:

$$\cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos 2$$

è vera e, in caso affermativo, giustificare la risposta.

Risoluzione. La relazione è vera in quanto
$\cos 2 = \cos(1+1) = \cos 1 \cos 1 - \sin 1 \sin 1 = \cos^2 1 - \sin^2 1$.

2. **Esercizio.** Calcolare:

$$|i \exp i| \ .$$

Risoluzione. Si ha $|i \exp i| = |i| \cdot |\exp i| = 1 \cdot |\cos 1 + i \sin 1| = 1 \cdot 1 = 1$.

7.3 Limiti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^3}{(x-\sin x)^2}$;

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\exp(5x))^2}{\sin(2x)\,\mathrm{sh}(7x)}$;

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x(\cos x-1)}$;

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{(\exp x-1)^2 \sin^2 x}{1-\cos x^2}$.

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin x^2}{\mathrm{sh}\, x(1-\cos x)}$.

   Risoluzione. Gli esercizi sono risolti utilizzando unicamente le equivalenze asintotiche, senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

   (a) Si ha $\frac{(1-\cos x)^3}{(x-\sin x)^2} \sim_{x\to 0} \frac{(\frac{x^2}{2})^3}{(\frac{x^3}{6})^2} = \frac{6^2}{2^3} = \frac{9}{2}$. Quindi il limite è $\frac{9}{2}$.

   (b) Si ha $\frac{(1-\exp(5x))^2}{\sin(2x)\,\mathrm{sh}(7x)} \sim_{x\to 0} \frac{(5x)^2}{2x7x} = \frac{25}{14}$. Quindi il limite è $\frac{25}{14}$.

   (c) Si ha
   $\frac{x-\sin x}{x(\cos x-1)} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x(-\frac{x^2}{2})} = -\frac{1}{3}$..
   Quindi si ha
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x(\cos x-1)} = -\frac{1}{3}\ .$$

   (d) Si ha $\lim_{x\to 0} \frac{(\exp x-1)^2 \sin^2 x}{1-\cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{\frac{x^4}{2}} = 2$.

   (e) Si ha $x^2-\sin x^2 \sim_{x\to 0} \frac{1}{6}x^6$ e $\mathrm{sh}\, x(1-\cos x) \sim_{x\to 0} x\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3$;
   quindi $\frac{x^2-\sin x^2}{\mathrm{sh}\, x(1-\cos x)} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^6}{\frac{1}{2}x^3} = \frac{1}{3}x^3$.
   Quindi si ha
   $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin x^2}{\mathrm{sh}\, x(1-\cos x)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}x^3 = 0$.

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2+\sin x}{\mathrm{sh}\, x}$;

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{sh}\, x+\sin x}{1-\cos x+\sin x}$;

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x-\mathrm{sh}(2x)}{1-\cos x+\sin(5x)}$;

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x-\sin(4x)}{\mathrm{ch}\, x-1+x}$;

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x\,\mathrm{sh}\, x+3x}{1-\cos x+\sin(2x)}$.

   Risoluzione. Gli esercizi sono risolti utilizzando le equivalenze asintotiche e la trascurabilità, senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

(a) Si ha
$\frac{\sin x^2+\sin x}{\operatorname{sh} x} \sim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \sim_{x\to 0} 1;$
quindi si ha
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2+\sin x}{\operatorname{sh} x} = 1.$

(b) Poichè $x - \operatorname{sh} x \lll_{x\to 0} \sin x$ e poichè $1 - \cos x \lll_{x\to 0} \operatorname{sh} x$, si ha $\frac{x-\operatorname{sh} x+\sin x}{1-\cos x+\operatorname{sh} x} \sim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = \frac{x}{x} = 1$. Quindi il limite è 1.

(c) Si ha $\frac{x^2 \sin x-\operatorname{sh}(2x)}{1-\cos x+\sin(5x)} \sim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sh}(2x)}{\sin(5x)} \sim_{x\to 0} \frac{-2x}{5x} = -\frac{2}{5}$; quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x - \operatorname{sh}(2x)}{1 - \cos x + \sin(5x)} = -\frac{2}{5} \,.$$

(d) Si ha $\frac{\sin^3 x-\sin(4x)}{\operatorname{ch} x-1+x} \sim_{x\to 0} \frac{-\sin(4x)}{x} \sim_{x\to 0} \frac{-4x}{x} = -4$; quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x - \sin(4x)}{\operatorname{ch} x - 1 + x} = -4 \,.$$

(e) Si ha $\frac{\sin^2 x \operatorname{sh} x+3x}{1-\cos x+\sin(2x)} \sim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin(2x)} \sim_{x\to 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$; quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x \operatorname{sh} x + 3x}{1 - \cos x + \sin(2x)} = \frac{3}{2} \,.$$

3. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\operatorname{sh} x}{\exp(3x)-1}$;

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2+1-\cos x}{x(\exp x-1)}$.

Risoluzione. Gli esercizi sono risolti utilizzando il teorema $f \sim c_1 h$, $g \sim c_2 h$, $c_1 + c_2 \neq 0 \Rightarrow f + g \sim (c_1 + c_2)h$, senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

(a) Si ha $\sin x \sim_{x\to 0} x$, $\operatorname{sh} x \sim_{x\to 0} x$; $\exp(3x) - 1 \sim_{x\to 0} 3x$; quindi si ha
$\frac{\sin x+\operatorname{sh} x}{\exp(3x)-1} \sim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3};$
quindi si ha
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\operatorname{sh} x}{\exp(3x)-1} = \frac{3}{2}.$

(b) Si ha $\sin x^2 \sim_{x\to 0} x^2$, $1 - \cos x \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}$; quindi si ha
$\frac{\sin x^2+1-\cos x}{x(\exp x-1)} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2} = \frac{3}{2};$
quindi si ha
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2+1-\cos x}{x(\exp x-1)} = \frac{3}{2}.$

4. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{6(\operatorname{sh} x-x)-x^3}{\operatorname{ch} x-1}$;

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3-\operatorname{sh} x^3}{1-\cos x}$;

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3-\operatorname{sh} x^3}{1-\cos x}$;

(d) $\lim_{x\to 0}|\frac{\sin x}{2(1-\cos x)-\sin^2 x}|$.

Risoluzione. Gli esercizi sono risolti utilizzando il teorema $f\sim c_1 h$, $g\sim c_2 h$, $c_1+c_2=0\Rightarrow f-g\lll h$, senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

(a) Si ha $6(\operatorname{sh} x-x)\sim_{x\to 0} x^3$; quindi si ha $6(\operatorname{sh} x-x)-x^3\lll_{x\to 0} x^3$; si ha $\operatorname{ch} x-1\sim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}$; quindi si ha $\lim_{x\to 0}\frac{6(\operatorname{sh} x-x)-x^3}{\operatorname{ch} x-1}=0$.

(b) Si ha $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3-\operatorname{sh} x^3}{1-\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{O}(x^3)}{\frac{x^2}{2}}=0$.

(c) Si ha $\sin x^3-\operatorname{sh}^3 x\lll_{x\to 0} x^3\lll_{x\to 0} 1-\cos x$. Quindi il limite è 0.

(d) Si ha $2(1-\cos x)-\sin^2 x\lll_{x\to 0} x^2\lll x\to 0\sin x$. Quindi il limite è $+\infty$.

5. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{4(1-\cos x)^2-x^2\sin^2 x}{\operatorname{sh} x^4\sin^2 x}$;

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\exp x-1)-x^2}{x-\sin x}$;

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sh} x(1-\cos x)-x^3}{\sin x(\operatorname{ch} x-1)^2}$;

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-\sin^2 x}{(\operatorname{ch} x-1)^2}$;

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-\operatorname{sh}^2 x}{(1-\cos x)^2}$;

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{ch} x-1)-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$;

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}^2 x-x\sin x}{\sin x(x-\sin x)}$;

(h) $\lim_{x\to 0}\frac{(\exp x-1)\sin x-2(\operatorname{ch} x-1)}{x-\sin x}$;

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{(\exp x-1)^3-\exp x^3+1}{(1-\cos x)^2}$;

(j) $\lim_{x\to 0}\frac{4(1-\cos x)-\sin x\operatorname{sh}(2x)}{(1-\cos x)^2}$.

Risoluzione. Gli esercizi sono risolti utilizzando gli sviluppi asintotici.

(a) Si ha:
$\operatorname{sh} x^4\sin^2 x\sim_{x\to 0} x^6$,
$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\mathrm{o}(x^4)$,
$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\mathrm{o}(x^4)$,
$(1-\cos x)^2=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6+\mathrm{o}(x^6)$,
$4(1-\cos x)^2=x^4-\frac{1}{6}x^6+\mathrm{o}(x^6)$,
$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)$,
$\sin^2 x=x^2-\frac{1}{3}x^4+\mathrm{o}(x^4)$,
$x^2\sin^2 x=x^4-\frac{1}{3}x^6+\mathrm{o}(x^6)$,

$4(1-\cos x)^2 - x^2\sin^2 x = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^6 + \mathrm{o}(x^6) \sim_{x\to 0} \frac{1}{6}x^6$,
$\frac{4(1-\cos x)^2 - x^2\sin^2 x}{\log(1+x^4)\sin^2 x} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^6}{x^6} = \frac{1}{6}$.
Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(1-\cos x)^2 - x^2\sin^2 x}{\log(1+x^4)\sin^2 x} = \frac{1}{6}\ .$$

(b) Si ha:
$x - \sin x \sim_{x\to 0} \frac{1}{6}x^3$,
$\sin x = x + \mathrm{o}(x^2)$,
$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$,
$\exp x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$,
$\sin x(\exp x - 1) = (x + \mathrm{o}(x^2))(x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)) = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\sin x(\exp x - 1) - x^2 = \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \sim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^3$,
$\frac{\sin x(\exp x-1)-x^2}{x-\sin x} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^3} = 3$.
Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\exp x - 1) - x^2}{x - \sin x} = 3\ .$$

(c) Si ha:
$\sin x(\operatorname{ch} x - 1) \sim_{x\to 0} x(\frac{1}{2}x^2)^2 = \frac{1}{4}x^5$,
$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$\operatorname{sh} x(1-\cos x) = (x + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3))(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4\mathrm{o}(x^4)) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{12}x^5 + \mathrm{o}(x^5) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$,
$2\operatorname{sh} x(1-\cos x) = x^3 + \frac{1}{12}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$,
$2\operatorname{sh} x(1-\cos x) - x^3 = \frac{1}{12}x^5 \sim_{x\to 0} \frac{1}{12}x^5$,
$\frac{2\operatorname{sh} x(1-\cos x)-x^3}{\sin x(\operatorname{ch} x-1)^2} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^5}{\frac{1}{4}x^5} = \frac{1}{3}$.
Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sh} x(1-\cos x) - x^3}{\sin x(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{1}{3}\ .$$

(d) Si ha
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$2(1 - \cos x) = x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$;
$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$2(1-\cos x) - \sin^2 x = x^2 - \frac{1}{12}x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4) = \frac{1}{4}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim \frac{1}{4}x^4$;
$(\operatorname{ch} x - 1)^2 \sim (\frac{1}{2}x^2)^2 = \frac{1}{4}x^4$
$\frac{2(1-\cos x)-\sin^2 x}{(\operatorname{ch} x-1)^2} \sim \frac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = 1$.
Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x) - \sin^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = 1\ .$$

(e) Si ha
$(1-\cos x)^2 \sim (\frac{1}{2}x^2)^2 = \frac{1}{4}x^4$
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$2(1-\cos x) = x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$;
$\operatorname{sh}^2 x = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$2(1-\cos x) - \operatorname{sh}^2 x = x^2 - \frac{1}{12}x^4 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4) = -\frac{5}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim -\frac{5}{12}x^4$;
$\frac{2(1-\cos x)-\operatorname{sh}^2 x}{(1-\cos x)^2} \sim \frac{-\frac{5}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = -\frac{5}{3}$.
Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x) - \operatorname{sh}^2 x}{(1-\cos x)^2} = -\frac{5}{3}\ .$$

(f) Si ha
$(1-\cos x)^2 \sim (\frac{1}{2}x^2)^2 = \frac{1}{4}x^4$
$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$\operatorname{ch} x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$2(\operatorname{ch} x - 1) = x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$;
$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$2(\operatorname{ch} x - 1) - \sin^2 x = x^2 + \frac{1}{12}x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4) = \frac{5}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim \frac{5}{12}x^4$;
$\frac{2(\operatorname{ch} x-1)-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2} \sim \frac{\frac{5}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{5}{3}$.
Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{ch} x - 1) - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2} = \frac{5}{3}\ .$$

(g) Si ha
$\sin x(x - \sin x) \sim_{x\to 0} \frac{x^4}{6}$.
Si ha
$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\operatorname{sh}^2 x = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$x \sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$\operatorname{sh}^2 x - x\sin x = \frac{1}{2}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^4$.
Quindi si ha
$\frac{\operatorname{sh}^2 x - x\sin x}{\sin x(x-\sin x)} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^4}{\frac{1}{6}x^4} = 3$.
Quindi si ha
$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x - x\sin x}{\sin x(x-\sin x)} = 3$.

(h) Si ha
$x - \sin x \sim_{x\to 0} \frac{x^3}{6}$;
$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$; quindi
$\exp x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$;

$\sin x = x + \mathrm{o}(x^2)$; quindi
$(\exp x - 1)\sin x = (x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2))(x + \mathrm{o}(x^2)) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3)$;
$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$; quindi
$\mathrm{ch}\, x - 1 = \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$; quindi
$2(\mathrm{ch}\, x - 1) = x^2 + \mathrm{o}(x^3)$; quindi
$(\exp x - 1)\sin x - 2(\mathrm{ch}\, x - 1) = \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3) \sim_{x\to 0} \frac{x^3}{2}$; quindi
$\frac{(\exp x-1)\sin x-2(\mathrm{ch}\, x-1)}{x-\sin x} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{6}} = 3.$
Si ha quindi $\lim_{x\to 0} \frac{(\exp x-1)\sin x-2(\mathrm{ch}\, x-1)}{x-\sin x} = 3.$

(i) Si ha
$(1-\cos x)^2 \sim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$;
$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$; quindi
$\exp x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$; quindi
$(\exp x - 1)^3 = x^3 + 3x^2\frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^4)$;
$\exp x = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \mathrm{o}(x^6) = 1 + x^3 + \mathrm{o}(x^4)$; quindi
$(\exp x - 1)^3 - \exp x^3 + 1 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 - 1 - x^3 + 1 + \mathrm{o}(x^4) = \frac{3}{2}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0} \frac{3}{2}x^4$; quindi
$\frac{(\exp x-1)^3-\exp x^3+1}{(1-\cos x)^2} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = 6.$
Quindi si ha $\lim_{x\to 0} \frac{(\exp x-1)^3-\exp x^3+1}{(1-\cos x)^2} = 6.$

(j) Si ha
$(1-\cos x)^2 \sim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$;
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$; quindi
$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$; quindi
$4(1-\cos x) = 2x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$;
$\mathrm{sh}(2x) = 2x + \frac{1}{6}(2x)^3 + \mathrm{o}(x^3) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$;
$\sin x\, \mathrm{sh}(2x) = (x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3))(2x + \frac{4}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)) =$
$2x^2 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4) = 2x^2 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$4(1-\cos x) - \sin x\, \mathrm{sh}(2x) = 2x^2 - \frac{1}{6}x^4 - 2x^2 - x^4 + \mathrm{o}(x^4) = -\frac{7}{6}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0} -\frac{7}{6}x^4$;quindi
$\frac{4(1-\cos x)-\sin x\, \mathrm{sh}(2x)}{(1-\cos x)^2} \sim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{6}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = -\frac{14}{3}.$
Quindi si ha $\lim_{x\to 0} \frac{4(1-\cos x)-\sin x\, \mathrm{sh}(2x)}{(1-\cos x)^2} = -\frac{14}{3}.$

7.4 Serie

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{n^3+n+1}{n^5+n+3}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^2+3}\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\sqrt{\frac{1}{n}}$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sh}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\exp\frac{1}{n^2} - 1}$;

Risoluzione.

(a) Si ha $\sin\frac{n^3+n+1}{n^5+n+3} \sim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^5+n+3} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$.
Quindi la serie è convergente.

(b) Si ha $\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}} \sim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{n}$.
Quindi la serie è divergente positivamente.

(c) Si ha $\frac{n^3+1}{n^2+3}(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}) \sim_{n\to\infty} n\frac{1}{6}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}$.
Quindi la serie è convergente.

(d) Si ha $\sin\sqrt{\frac{1}{n}} \sim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$; quindi la serie è divergente positivamente.

(e) Si ha $\operatorname{sh}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim_{n\to\infty} = \frac{1}{n}$.
Quindi la serie è divergente positivamente.

(f) Si ha $1 - \cos\frac{1}{n} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$; quindi la serie è convergente.

(g) Si ha
$\sqrt{\exp\frac{1}{n^4} - 1} \sim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^2}$;
quindi la serie è convergente.

Capitolo 8

Derivate

8.1 Derivate

1. **Esercizio.** Sia
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^3 \;;$$
   (a) scrivere il rapporto incrementale $r(h)$ di f in 1 applicato ad h, (semplificando l'espressione).
   (b) calcolare $f'(1)$ come limite del rapporto incrementale.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $r(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^3-1}{h} = \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} = \frac{3h+3h^2+h^3}{h} = h^2+3h+3$.
   (b) Si ha $f'(1) = \lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} *h^2+3h+3) = 3$.

2. **Esercizio.** Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva
$$y = x^3$$
   nel punto $(1,1)$.

   Risoluzione. Posto $f(x) = x^3$, si ha $f(1) = 1$ e$f'(1) = 3$; quindi l'equazione della retta è $y-1 = 3(x-1)$, cioè $y = 3x-2$.

3. **Esercizio.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:
   (a) $f(x) = x^2 \sin x^3$;
   (b) $f(x) = x^3 \sin x^2$;
   (c) $f(x) = x^2 \sin \exp(5x^2)$.

   Risoluzione.

(a) Si ha

$$f'(x) = 2x \sin x^3 + x^2 (\cos x^3) 3x^2 = 2x \sin x^3 + 3x^4 \cos x^3 \ .$$

(b) Si ha

$$f'(x) = 3x^2 \sin x^2 + x^3 (\cos x^2) 2x = 3x^2 \sin x^2 + 2x^4 \cos x^2 \ .$$

(c) Si ha

$$f'(x) = 2x \sin \exp(5x^2) + x^2 (\cos \exp(5x^2)) \exp(5x^2) 10x \ .$$

4. **Esercizio.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni in un punto x del dominio ove le funzioni sono derivabili

   (a) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 \sin x^3}$

   (b) $f(x) = \sqrt{\sin \frac{1}{x}}$;

   Risoluzione.

   (a) Si ha
   $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2 \sin x^3)^3}} (2x \sin x^3 + x^2 (\cos x^3) 3x^2) =$
   $\frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2 \sin x^3)^3}} (2x \sin x^3 + 3x^4 \cos x^3)$.

   (b) Si ha

   $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin \frac{1}{x}}} \cos \frac{1}{x} (-\frac{1}{x^2}) \ .$$

5. **Esercizio.** Determinarne il dominio naturale e calcolare la derivata della seguente funzione:

   $$f(x) = \exp \frac{1}{x} \ .$$

   Risoluzione.

   Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}^*$ e per ogni $x \in \mathbf{R}^*$ si ha

   $$f'(x) = \left(\exp \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \ .$$

6. **Esercizio.** Sia

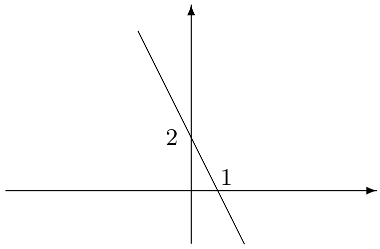
   $$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x+1} \ ;$$

   trovare in funzione di h l'espressione che, attraverso la derivata, approssima l'incremento $(\Delta f(1))\,(h)$ della funzione f in 1, per h "piccolo".

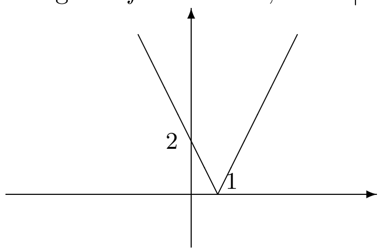
   Risoluzione. Si ha $f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$; quindi si ha $f'(1) = -\frac{1}{4}$; quindi si ha $(\Delta f(1))(h) = f(1+h) - f(1) = f'(1)h + \mathrm{o}(h) = -\frac{1}{4}h + \mathrm{o}(h)$.

7. **Esercizio.** Fare un esempio di una funzione reale di variabile reale, continua in 1, non derivabile in 1 e tale che $f(0) = 2$. Si richiede l'espressione esplicita della funzione.

   Risoluzione. Consideriamo la retta passante per i punti $(1, 0)$ e $(0, 2)$; essa ha equazione $x + \frac{y}{2} = 1$, cioè $2x + y = 2$, cioè $y = 2 - 2x$.



   Come funzione si può scegliere $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow |2 - 2x|$.



8.2 Massimo, minimo

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni

   (a) $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x-1}{x+1}$,

   (b) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2 + x + 1$,

   (c) $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x^2+1}{x+1}$

   ammettono massimo e minimo; in caso affermativo determinarli.

   Risoluzione.

   (a) Essendo f continua ed essendo $\mathrm{dom}(f)$ compatto, f ammette massimo e minimo.

   Sia $x \in]0, 1[$; si ha $f'(x) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \neq 0$; quindi il massimo ed il minimo di f sono raggiunti in $\{0, 1\}$; si ha $f(0) = -1$, $f(1) = 0$; quindi si ha $\max(f) = 0$, $\min(f) = -1$.

   (b) Poichè f è continua e definita su un compatto, f ammette massimo e minimo.

   Il massimo ed il minimo di f sono raggiunti nei punti di $] - 1, 1[$ ove si annulla f' o su $\{-1, 1\}$.

Sia $x \in]-1,1[$; si ha $f'(x) = 2x+1$; quindi si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -\frac{1}{2}$.
Si ha
$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-2+4}{4} = \frac{3}{4}$, $f(1) = 3$, $f(-1) = 1$.
Quindi si ha $\max(f) = 3$, $\min(f) = \frac{3}{4}$.

(c) i. Essendo f continua ed essendo $\mathrm{dom} f$ compatto, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo.

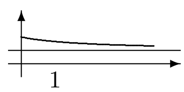
ii. Il massimo ed il minimo di f sono raggiunti negli estremi di $[0,1]$ o nei punti interni di $[0,1]$ nei quali $f'(x) = 0$.
Sia $x \in]0,1[$; si ha
$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1)}{(x+1)^2}$;
si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2+2x-1 = 0$, cioè se e solo se $x = -1 \pm \sqrt{2}$, cioè, essendo $0 < x < 1$, se e solo se $x = \sqrt{2}-1$.
Quindi il massimo ed il minimo di f sono raggiunti su $\{0, 1, \sqrt{2}-1\}$.
Si ha $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(\sqrt{2}-1) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{2+1-2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-4}{2} = 2\sqrt{2}-2$.
Si ha $2\sqrt{-2} < 1$: infatti ciò equivale a $2\sqrt{2} < 0$, cioè a $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, cioè a $2 < \frac{9}{4}$, cioè a $8 < 9$.
Si ha quindi $\max(f) = 1$ e $\min(f) = 2\sqrt{2}-2$.

2. **Esercizio.** Sia $A = \{\frac{x+5}{2x+5}; x \in \mathbf{R}_+\}$;

(a) dire se A ammette massimo e se A ammette minimo

(b) determinare $\sup(A)$ e $\inf(A)$ rispetto allo spazio ordinato $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$

Risoluzione. Sia $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longrightarrow \frac{x+5}{2x+3}$, di modo che $A = f([0,+\infty[)$.
Si ha $f(0) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Per $x \in]0,+\infty[$ si ha $f'(x) = \frac{2x+5-2(x+5)}{(2x+5)^2} = -\frac{5}{(2x+5)^2} < 0$; quindi f è strettamente decrescente.



Si ha quindi $A =]\frac{1}{2}, 1]$. Quindi A ammette massimo e $\max(A) = 1$; A non ammette minimo; si ha $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = \frac{1}{2}$.

8.3 Teorema del valor medio

1. **Esercizio.** Dire quale delle seguenti funzioni $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ con

(a) $f(x) = x^2 + x + 1$,

(b) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$,

(c) $f(x) = |x|$,

soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle; motivare per ciascuna funzione la risposta; per le funzioni che soddisfano tali ipotesi, determinare i punti ξ l'esistenza dei quali è assicurata dal teorema di Rolle.

Risoluzione.

(a) Si ha $f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1$, $f(1) = 3$; quindi f non soddisfa le condizioni del teorema di Rolle.

(b) La funzione f è derivabile e si ha $f(-1) = 2$ e $f(1) = 2$; quindi f soddisfa le condizioni del teorema di Rolle; quindi esiste $\xi \in]-1, 1[$ tale che $f'(\xi) = 0$; per ogni $x \in]-1, 1[$ si ha $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$; si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $3x^2 + 2x - 1 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{-1\pm\sqrt{4}}{3} = \frac{1\pm 2}{3}$, cioè se e solo se $x = -1$ o $x = \frac{1}{3}$, cioè, essendo $x \in]-1, 1[$ se e solo se $x = \frac{1}{3}$; si ha quindi $\xi = \frac{1}{3}$.

(c) La funzione f non è derivabile in 0; quindi non soddisfa le condizioni del teorema di Rolle.

2. **Esercizio.** Sia $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2$; determinare il punto ξ di cui viene affermata l'esistenza nel teorema di Lagrange.

Risoluzione. Per ogni $x \in [0, 1]$ si ha $f'(x) = 2x$; il punto ξ soddisfa $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(\xi)$; si ha quindi $1 = 2\xi$; quindi $\xi = \frac{1}{2}$.

8.4 Derivabilità e derivata

1. **Esercizio.** Sia

$$f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} |x| & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases} ;$$

(a) disegnare approssimativamente il grafico di f;

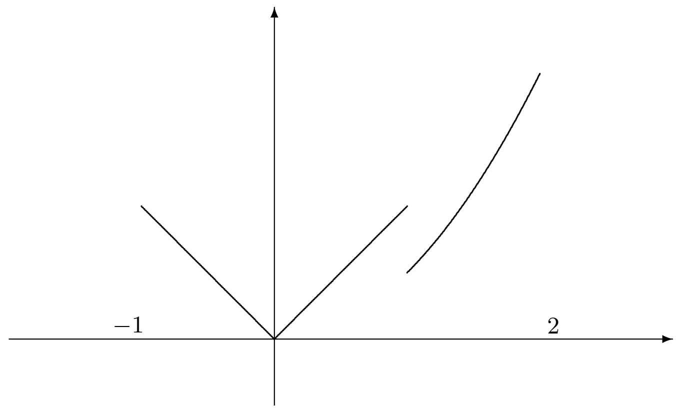
(b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua;

(c) determinare l'insieme dei punti ove f è derivabile;

motivare adeguatamente la risposta.

Risoluzione.

(a)



(b) Per il carattere locale della continuità, f è continua su $[-1, 1[$ e su $]1, 2]$.

Studiamo la continuità di f in 1. Si ha
$\lim_{x\to 1-, x\neq 1} f(x) = \lim_{x\to 1-, x\neq 1} |x| =!$
e
$\lim_{x\to 1+, x\neq 1} f(x) = \lim_{x\to 1+, x\neq 1} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$.
Quindi f non è continua in 1.

L'insieme dei punti di continuità di f è quindi

$$[-1, 1[\cup]1, 2] \ .$$

(c) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases} \ .$$

Per il carattere locale della derivabilità, f è derivabile su $[-1, 0[$, su $]0,1[$ e su $]1, 2]$.

In 1 f non è derivabile in quanto non è continua.

Studiamo la continuità di f in 0. Si ha
$\lim_{x\to 0-, x\neq 0} f'(x) = \lim_{x\to 0-, x\neq 0} -1 =!$
quindi f è derivabile da sinistra in 0 e si ha $f'_-(0) = -1$.

Si ha
$\lim_{x\to 0+, x\neq 0} f'(x) = \lim_{x\to 0+, x\neq 0} 1 =!$
quindi f è derivabile da destra in 0 e si ha $f' + (0) = 1$.

Essendo $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, f non è derivabile in 0.

L'insieme dei punti di continuità di f è quindi

$$[-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2] \ .$$

8.5 Studio funzione

1. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) Determinare il dominio di f;

(b) Calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}$.

(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Sia $x \in \mathbf{R}$. Si ha

$$f'(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2+1)(x+1) \ .$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -1$; si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x > -1$; si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < -1$. Quindi f è strettamente crescente su $[-1+\infty[$, strettamente decrescente su $]-\infty, -1]$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[-1, +\infty[\} \,, \qquad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset \,,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{]-\infty, -1]\} \ .$$

(d) Sia $x \in \mathbf{R}$. Si ha

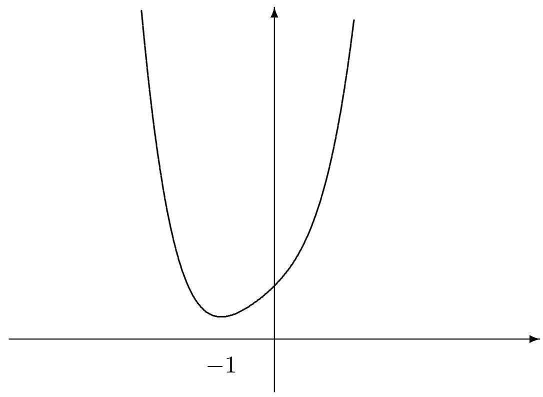
$$f''(x) = 3x^2 + x + 1 > 0 \ .$$

Quindi f è strettamente convessa su tutto $\mathbf{R}$.

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]-\infty, +\infty[\} \ , \qquad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset \qquad \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset\} \ .$$

Per tracciare il grafico di f teniamo conto che $f(-1) = \frac{5}{12} \approx .42$ e $f(0) = 1$. Si ha



2. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6\,,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}$.

(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Sia $x \in \mathbf{R}$; si ha $f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{-2\pm\sqrt{19}}{3}$, $f'(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{-2-\sqrt{19}}{3}$ o $x > \frac{-2+\sqrt{19}}{3}$, $f'(x) < 0$ se e solo se $\frac{-2+\sqrt{19}}{3} < x < \frac{-2+\sqrt{19}}{3}$; quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, \frac{-2-\sqrt{19}}{3}]$ e su $[\frac{-2+\sqrt{19}}{3}, +\infty[$, f è strettamente decrescente su $[\frac{-2-\sqrt{19}}{3}, \frac{-2+\sqrt{19}}{3}]$; quindi di ha

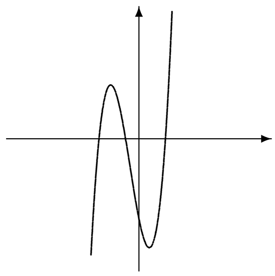
$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, \frac{-2-\sqrt{19}}{3}], [\frac{-2+\sqrt{19}}{3}, +\infty[\}\,,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{[\frac{-2-\sqrt{19}}{3}, \frac{-2+\sqrt{19}}{3}]\}, \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset\,.$$

(d) Sia $x \in \mathbf{R}$; si ha $f''(x) = 6x + 4$.
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = -\frac{2}{3}$, $f''(x) > 0$ se e solo se $x > -\frac{2}{3}$, $f''(x) < 0$ se e solo se $x < -\frac{2}{3}$; quindi f è strettamente convessa su $[-\frac{2}{3}, +\infty[$, strettamente concava su $]-\infty, -\frac{2}{3}]$; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{[-\frac{2}{3}, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\infty, -\frac{2}{3}]\} \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset \,.$$

Si ha $\frac{-2-\sqrt{19}}{3} \approx -2.12$ $f(\frac{-2-\sqrt{19}}{3}) \approx 4.06$, $\frac{-2+\sqrt{19}}{3} \approx .79$, $f(\frac{-2+\sqrt{19}}{3}) \approx -8.21$.
Si ottiene il seguente grafico.



3. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = x - \frac{1}{x} \,.$$

Si chiede:

(a) Determinare il dominio di f;

(b) Calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) Determinare l'insieme degli intervalli (non vuoti e non ridotti ad un punto) massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) Determinare l'insieme degli intervalli (non vuoti e non ridotti ad un punto) massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}^*$.

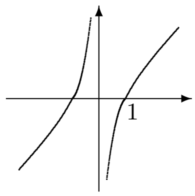
(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Sia $x \in \mathbf{R}^*$; si ha $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$; quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$; quindi si ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, 0[,]0, +\infty[\}, \qquad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset \qquad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset \,.$$

(d) Sia $x \in \mathbf{R}^*$; si ha $f''(x) = -2x^{-3}$; si ha quindi $f''(x) > 0$ per $x < 0$, $f''(x) < 0$ per $x > 0$; quindi f è strettamente convessa su $]-\infty, 0[$, strettamente concava su $]0, +\infty[$; qundi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]-\infty, 0[,]0, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]0, +\infty[\} \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset \ .$$



4. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 6 \ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) Determinare il dominio di f;

(b) determinare gli zeri di f;

(c) studiare il segno di f;

(d) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(e) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(f) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}$.

(b) Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, cioè se e solo se $x^2 = 2$ o $x^2 = 3$, cioè se e solo se $x = \pm\sqrt{2}$ o $x = \pm\sqrt{3}$. Quindi gli zeri di f sono $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

(c) Si ha $f(x) > 0$ se e solo se $x^2 < 2$ o $x^2 > 3$, cioè se e solo se $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ o $x < -\sqrt{3}$ o $x > \sqrt{3}$. Si ha quindi $f(x) < 0$ se e solo se $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$ o $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

(d) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(e) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$; si ha
$f'(x) = 4x^3 - 10x$.
Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $4x^3 - 10x = 0$, cioè se e solo se $x(4x^2 - 10) = 0$, cioè se e solo se $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $-\sqrt{\frac{5}{2}} < x < 0$ o $x > \sqrt{\frac{5}{2}}$. Si ha $f(x) < 0$ se e solo se $x < -\sqrt{\frac{5}{2}}$ o $0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Quindi f è strettamente crescente su $[-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0]$ e su $[\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty[$; f è strettamente decrescente su $]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}]$ e su $[0, \sqrt{\frac{5}{2}}]$.
Si ha quindi

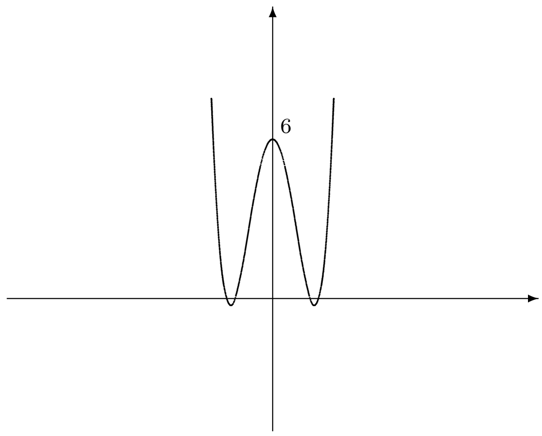
$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ [-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0],\ [\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty[\right\},\ \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \left\{]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}],\ [0, \sqrt{\frac{5}{2}}] \right\}.$$

(f) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$; si ha $f''(x) = 12x^2 - 10$.
Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{\frac{5}{6}}$ o $x > \sqrt{\frac{5}{6}}$ e $f''(x) < 0$ se e solo se $-\sqrt{\frac{5}{6}} < x < \sqrt{\frac{5}{6}}$.
Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}]$ e su $[\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty[$ strettamente concava su $[-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}]$.
Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}], [\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty[\right\},\ \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset,\ \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}] \right\}.$$

Si ha: $f(0) = 6$, $\sqrt{\frac{5}{6}} \approx .91$, $f(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}) = \frac{91}{36} \approx 2.53$, $\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.58$, $f(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}) = -\frac{1}{4} = -.25$.



5. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = \frac{2 + x^2}{1 - x^2}.$$

Si chiede:

(a) Determinare il dominio di f;

(b) Calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R} - \{1, -1\}$.

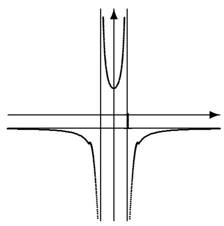
(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x\to-1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

(c) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$; si ha $f'(x) = \frac{2x(1-x^2)-(-2x)(2+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+4x+2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{6x}{(1-x^2)^2}$.
Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, $f'(x) < 0$ se e solo se $x < 0$; quindi f è strettamente crescente su $[0, 1[$ e su $]1, +\infty[$ e strettamente decrescente su $] - \infty, -1[$ e su $] - 1, 0]$; quindi di ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[0, 1[,]1, +\infty[\}, \qquad \mathcal{M}(\searrow) = \{] - \infty, -1[,] - 1, 0]\} ,$$
$$\mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset .$$

(d) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$; si ha $f''(x) = 6\frac{(1-x^2)^2-2(1-x^2)(-2x)x}{(1-x^2)^4} = 6\frac{(1-x^2)(1-x^2+4x^2)}{(1-x^2)^4} = 6\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$. si ha quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 1 > 0$, $f''(x) < 0$ se e solo se $x < -1$ o $x > 1$; quindi f è strettamente convessa su $] - 1, 1[$, strettamente concava su $] - \infty, -1]$ e su $]1, +\infty[$; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{] - 1, 1[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{] - \infty, -1[,]1, +\infty[\} \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset .$$



6. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 5}{x}$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente)

(d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}^*$.

(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$; si ha $f'(x) = 2x - 5x^{-2} = \frac{2x^3-5}{x^2}$.
Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, $f'(x) > 0$ se e solo se $x > \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$; quindi f è strettamente crescente su $[\sqrt[3]{\frac{5}{2}}, +\infty[$, f è strettamente decrescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, \sqrt[3]{\frac{5}{2}}]$; quindi di ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[\sqrt[3]{\frac{5}{2}}, +\infty[\}, \qquad \mathcal{M}(\searrow) = \{]-\infty, -0[,]0, \sqrt[3]{\frac{5}{2}}]\} ,$$

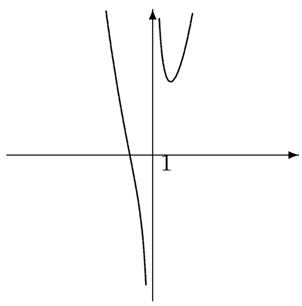
$$\mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset .$$

(d) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$; si ha $f''(x) = 2 + 10x^{-3}2 + \frac{1}{x^3} = \frac{2x^3+10}{x^3}$.
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt[3]{5}$, $f''(x) > 0$ se e solo se $x < -\sqrt[3]{5}$ o $x > 0$, $f''(x) < 0$ se e solo se $-\sqrt[3]{5} < x < 0$; quindi f è strettamente convessa su $]-\infty, -\sqrt[3]{5}]$ e su $]0, +\infty[$, strettamente concava su $[-\sqrt[3]{5}, 0[$; qundi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]-\infty, -\sqrt[3]{5}],]0, +\infty[\}, \qquad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\sqrt[3]{5}, 0[\} ,$$

$$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset .$$

Si ha $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \approx 1.36$ $f(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}) \approx 5.53$, $-\sqrt[3]{5} \approx 1.71$, $f(-\sqrt[3]{5}) = 0$. Si ottiene il seguente grafico.



7. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti o i valori di f nei punti frontiera del dominio;

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) studiare la derivabilità di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;

(e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Il dominio di f è dato dalle x tali che $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases}$ cioè tali che $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$; si ha quindi $\mathrm{dom}(f) = [0,1[\cup]1,+\infty[$.

(b) Si ha $f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty$.

(c) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$, $x \neq 0$; si ha
$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}-1}{2(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} < 0.$
Quindi f è strettamente crescente su $[0,1[$ e su $]1,+\infty[$.
Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \emptyset,\ \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset,\ \mathcal{M}(\searrow) = \{[0,1[,]1,+\infty[\}\ .$$

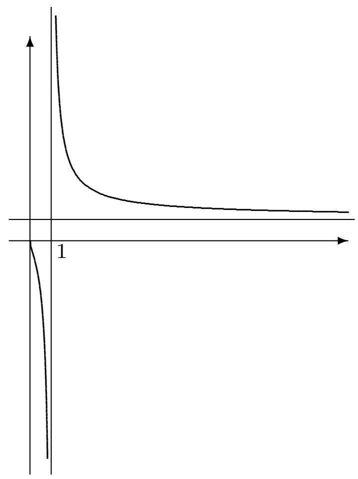
(d) Si ha
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = -\infty.$
Quindi f è derivabile rispetto ad $\overline{\mathbf{R}}$ in 0 e si ha $f'(0) = -\infty$.

(e) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$, $x \neq 0$; si ha
$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^2+\sqrt{x}2(\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x(\sqrt{x}-1)^4} =$
$\frac{1}{2}\frac{\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}-1)^4} =$
$\frac{1}{2}\frac{\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}+1}{x(\sqrt{x}-1)^3} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}-1+2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3} = \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3}.$
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $3\sqrt{x}-1 = 0$, cioè se e solo se $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$, cioè se e solo se $x = \frac{1}{9}$. Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $0 < x < \frac{1}{9}$ o $x > 1$. Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $\frac{1}{9} < x < 1$.

Quindi f è strettamente convessa su $[0, \frac{1}{9}]$ e su $]1, +\infty[$, f è strettamente concava su $[\frac{1}{9}, 1[$.
Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{[0, \frac{1}{9}],]1, +\infty[\right\},\ \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset,\ \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{[\frac{1}{9}, 1[\right\} .$$

Si ha: $\frac{1}{9} \approx .11$, $f(\frac{1}{9}) = -\frac{1}{2} = -.5$.



8.6 Polinomio di Taylor

1. **Esercizio.** Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 di punto iniziale 0 della seguente funzione
$$f(x) = e^x \sin x .$$

   Risoluzione. Si ha
$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$,
$f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x x$;
$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x$;
quindi si ha $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 2$; si ha quindi
$T(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{f'''(0)}{6}h^3 = h + h^2 + \frac{1}{3}h^3$.

2. **Esercizio.** Determinare il polinomio di Taylor di $f(x) = \sin x$ di ordine 4 e di punto iniziale $\frac{\pi}{2}$.

   Risoluzione. Si ha $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$; quindi si ha $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; quindi, indicando con $T(h)$ il polinomio di Taylor cercato, si ha
$T(h) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)h + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)h^2 + \frac{1}{6}f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)h^3 + \frac{1}{24} + f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$
$1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4$.

3. **Esercizio.** A partire dalla definizione, determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 di punto iniziale 0 della funzione

$$f(x) = e^x + \sin x \; ;$$

verificare che tale polinomio soddisfa la proprietà di appossimabilità espressa dal teorema sulle proprietà del polinomio di Taylor.

Risoluzione. Si ha
$f'(x) = e^x + \cos x$, $f''(x) = e^x - \sin x$;
quindi si ha $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 1$; quindi, indicando con $T(h)$ il polinomio di Taylor, si ha
$T(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 = 1 + 2h + \frac{1}{2}h^2$.

Il teorema sul polinomio di Taylor, applicato a questo caso, afferma che $f(h) - T(h) \lll_{h\to 0} h^2$. Applicando il teorema di de Hospital, si ha infatti
$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-T(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h+\sin h-1-2h-\frac{1}{2}h^2}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h+\cos h-2-h}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-\sin h-1}{2} = 0$.

Capitolo 9

Funzioni elementari reali

9.1 Funzione esponenziale reale

1. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; dire quanto vale $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

   Risoluzione. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f(x) = e^x$; quindi si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. **Esercizio.** Determinare gli $a \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \exp((2a+1)x) = +\infty \ .$$

   Risoluzione. Il limite è uguale a $+\infty$ se e solo se $2a+1>0$, cioè se e solo se $a > -\frac{1}{2}$.

3. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2+1} \log(1-\frac{1}{x})$;

   (b) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \log \frac{1+x^2}{3+x^2}$;

   (c) $\lim_{x\to+\infty} x \log \frac{2-x}{3-x}$;

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2(1-\cos x)-6x(x-\sin x)}{\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4)}$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $\frac{x^3}{x^2+1}\log(1-\frac{1}{x}) \sim_{x\to+\infty} x(-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} \longrightarrow_{x\to+\infty} 0$.
   Quindi il limite è 0.

   (b) Si ha
   $x^2 \log \frac{1+x^2}{3+x^2} = x^2 \log(1+\frac{1+x^2}{3+x^2}-1) = x^2\log(1+\frac{1+x^2-3-x^2}{3+x^2}) =$
   $x^2\log(1+\frac{-2}{3+x^2}) \sim_{x\to+\infty} x^2(\frac{-2}{3+x^2}) = x^2\frac{-2}{x^2} \sim_{x\to+\infty} -2$.
   Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log\frac{1+x^2}{3+x^2} = -2 \ .$$

(c) Si ha
$x\log\frac{2-x}{3-x} = x\log(1+\frac{2-x}{3-x}-1) = x\log(1+\frac{2-x-3+x}{3-x}) =$
$x\log(1+\frac{-1}{2-x}) \sim_{x\to+\infty} x(\frac{-1}{2-x}) = x\frac{-1}{x} \sim_{x\to+\infty} -1.$
Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{2-x}{3-x} = -1\ .$$

(d) Si ha
$\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4) \sim_{x\to 0} x^6.$
Si ha
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4),$
$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4),$
$2x^2(1-\cos x) = x^4 - \frac{1}{12}x^6 + \mathrm{o}(x^6),$
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{o}(x^5),$
$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{o}(x^5),$
$6x(x-\sin x) = x^4 - \frac{1}{20}x^6 + \mathrm{o}(x^6),$
$2x^2(1-\cos x) - 6x(x-\sin x) = -\frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{20}x^6 + \mathrm{o}(x^6) = \frac{-5+3}{60}x^6 + \mathrm{o}(x^6) =$
$-\frac{1}{30}x^6 + \mathrm{o}(x^6) \sim_{x\to 0} -\frac{1}{30}x^6.$
Si ha quindi
$\frac{2x^2(1-\cos x)-6x(x-\sin x)}{\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4)} \sim_{x\to 0} -\frac{1}{30}.$
Si ha quindi
$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2(1-\cos x)-6x(x-\sin x)}{\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4)} = -\frac{1}{30}.$

4. **Esercizio.** Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log\frac{n^2+3}{n^2+1}\ .$$

Risoluzione. Si ha
$\log\frac{n^2+3}{n^2+1} = \log(1+\frac{n^2+3}{n^2+1}-1) = \log(1+\frac{2}{n^2+1}) \sim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2+1} \sim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}.$
Quindi la serie è convergente.

9.2 Potenze di esponente reale

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x}{x^2+1})^{\frac{x^2+1}{x}};$

(b) $\lim_{x\to 0+}(\frac{x^2+1}{x})^{\frac{x+1}{x}};$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x;$

(d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^x.$

Risoluzione.

(a) Si ha $(\frac{x}{x^2+1})^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\frac{x^2+1}{x}\log\frac{x}{x^2+1}}$.
Si ha $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x}\log\frac{x}{x^2+1}) = -\infty$.
Quindi il limite è 0.

(b) Si ha $(\frac{x^2+1}{x})^{\frac{x+1}{x}} = e^{\frac{x+1}{x}\log\frac{x^2+1}{x}}$.
Si ha $\lim_{x\to 0+}(\frac{x+1}{x}\log\frac{x^2+1}{x}) = +\infty$.
Quindi il limite è $+\infty$.

(c) Si ha
$\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\log\frac{1}{x}}$.
Si ha
$\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{1}{x} = -\infty$.
Quindi si ha
$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x = 0$.

(d) Si ha $\left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^x = e^{\log\frac{3x+2}{2x+3}}$.
Si ha
$\lim_{x\to-\infty} x\log\frac{3x+2}{2x+3} = -\infty$.
Quindi si ha $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^x = 0$.

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{x^2+1}{x}}$;

(b) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+1}{x-1})^x$;

(c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2+x+1}$.

Risoluzione.

(a) Si ha $(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\frac{x^2+1}{x}\log\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.
Si ha
$(\frac{x^2+1}{x}\log\frac{x^2+1}{x^2-1}) \sim_{x\to+\infty} x\log(1+\frac{x^2+1}{x^2-1}-1) =$
$x\log(1+\frac{2}{x^2-1}) \sim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2-1} \sim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} \longrightarrow_{x\to+\infty} 0$.
Quindi il limite è 1.

(b) Per x appartenente al dominio della funzione, si ha $(\frac{x+1}{x-1})^x = e^{x\log\frac{x+1}{x-1}}$.
Si ha
$x\log\frac{x+1}{x-1} = x\log(1+\frac{x+1}{x-1}-1) =$
$x\log(1+\frac{2}{x-1}1) \sim_{x\to+\infty} x\frac{2}{x-1} \sim_{x\to+\infty} 2$.
Quindi si ha
$\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x+1}{x-1} = 2$.
Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\log\frac{x+1}{x-1}} = e^2 .$$

(c) Si ha
$\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2+x+1} = e^{(x^2+x+1)\log\frac{x^2+3}{x^2-2}}$.
Si ha
$(x^2+x+1)\log\frac{x^2+3}{x^2-2} = (x^2+x+1)\log(1+\frac{x^2+3}{x^2-2}-1) =$
$(x^2+x+1)\log(1+\frac{5}{x^2-2}-1) \sim_{x\to+\infty} x^2\frac{5}{x^2-2} \sim_{x\to+\infty} 5$.
Quindi si ha
$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2+x+1} = e^5$.

3. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$;

(b) $\lim_{x\to 0} x^{\log(1+x)}$;

(c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^x$.

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)-\sin x^3}{\operatorname{ch} x-1}$.

Risoluzione.

(a) Si ha $(\sin x)^x = e^{x\log\sin x}$; si ha $\lim_{x\to 0} x\log\sin x = \lim_{x\to 0} x\log x = 0$; quindi si ha $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1$.

(b) Per x appartenente al dominio della funzione, si ha $x^{\log(1+x)} = e^{\log(1+x)\log x}$.
Si ha
$\log(1+x)\log x \sim_{x\to 0} x\log x \longrightarrow_{x\to 0} 0$.
Quindi si ha
$$\lim_{x\to 0} x^{\log(1+x)} = e^0 = 1\ .$$

(c) Si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}\ .$$

Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-1\right) =$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x}} =$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} = +\infty\ .$$

Quindi si ha
$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\log\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}} = +\infty.$$

(d) Si ha $\log(1+x^3) \sim_{x\to 0} x^3$, $\sin x^3 \sim_{x\to 0} x^3$; quindi si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)-\sin x^3}{\operatorname{ch} x - 1} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{O}(x^3)}{\frac{x^2}{2}} = 0$.

4. **Esercizio.** Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\,.$$

Risoluzione. Si ha $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

9.3 Funzioni esponenziali di base a

1. **Esercizio.** Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore in $\overline{\mathbf{R}}$ della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x\,.$$

Risoluzione. Si ha $f(\mathbf{R}) =]0, +\infty[$; quindi si ha $\sup(f) = +\infty$, $\inf f = 0$.

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1000000}-2^x}{x^{1000000}+2^x}$;

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5^x}{x^3+2^x}$;

(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3^x}{\log x - 3^x}$;

(d) $\lim_{x\to-\infty}(x^4-x^2)2^x$.

Risoluzione.

(a) Si ha $\frac{x^{100000}-2^x}{x^{100000}+2^x} \sim_{x\to+\infty} \frac{-2^x}{2^x} = -1$.
Quindi il limite è -1.

(b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5^x}{x^3+2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5^x}{2^x} = -\infty$.

(c) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3^x}{\log x-3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{-3^x} = -1$.

(d) Si ha $\lim_{x\to-\infty} \left(x^4-x^2\right) 2^x \lim_{x\to-\infty} x^4 2^x = 0$.

3. **Esercizio.** Dare un esempio di una funzione f (non dipendente da n) tale che

$$(\forall n \in \mathbf{N}^*)\, x^n \lll_{x\to+\infty} f(x) \lll_{x\to+\infty} 2^x;;$$

motivare la risposta.

Risoluzione. Basta prendere $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ si ha infatti $x^n \lll_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x$ in quanto ogni potenza di esponente strettamente positivo è trascurabile per $x \to +\infty$ rispetto ad un esponenziale di base strettamente maggiore di 1 e si ha $\left(\frac{3}{2}\right)^x \lll_{x\to+\infty} 2^x$ in quanto $\frac{3}{2} < 1$.

4. **Esercizio.** Dare un esempio di una funzione f (non dipendente da a) tale che

$$(\forall a \in]1, +\infty[)\, x^5 \lll_{x\to+\infty} f(x) \lll_{x\to+\infty} a^x \ ;$$

motivare la risposta.

Risoluzione. Basta prendere $f(x) = x^6$. Si ha infatti $x^5 \lll_{x\to+\infty} x^6$ in quanto $5 < 6$; per ogni $a > 1$ si ha poi $x^6 \lll_{x\to+\infty} a^x$ in quanto ogni potenza di esponente strettamente positivo è trascurabile per $x \to +\infty$ rispetto ad un esponenziale di base strettamente maggiore di 1.

9.4 Funzioni circolari

1. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; dire quanto vale $f(\frac{\pi}{2})$.

   Risoluzione. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f(x) = \sin x$; quindi si ha $f(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

2. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$; che cosa si può dire sulla convergenza di $f(x)$ per $x \to +\infty$?

   Risoluzione. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f(x) = \cos x$; quindi non esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. **Esercizio,** Determinare $\cos^2 \alpha$ sapendo che $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

   Risoluzione. Si ha
   $\cos^2 \alpha == \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}$.

4. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limit:

   (a) $\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x - \sin x}$;

   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x + x}{\sqrt{x} - \sin x}$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{\frac{1}{6}x^3} = \lim_{x\to 0+} 6\frac{1}{x} = +\infty$.

   (b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x + x}{\sqrt{x}-\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}} = +\infty$.

5. **Esercizio.** Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore in $\overline{\mathbf{R}}$ della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \operatorname{Arctg} x \ .$$

   Risoluzione. Si ha $f(\mathbf{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; quindi si ha $\sup(f) = \frac{\pi}{2}$, $\inf f = -\frac{\pi}{2}$.

9.5 Funzioni elementari reali

1. **Esercizio.** Determinare il dominio naturale della seguente funzione

$$f(x) = \mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ .$$

Risoluzione. Il dominio naturale di f è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \leq 1 \end{cases} .$$

Il sistema è equivalente a
$\begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \leq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{x-1}{x+1} \leq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{x-1}{x+1} - 1 \leq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{-2}{x+1} \leq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{1}{x+1} \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ x > -1 \end{cases}$,
cioè a $x \geq 1$.

Quindi si ha $\mathrm{dom}(f) = [1, +\infty[$.

9.6 Massimi e minimi di funzioni

1. **Esercizio.** Dire se la seguente funzione ammette massimo e minimo e in caso affermativo determinarli:

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \mathrm{Arcsin}\, x - x\ .$$

Risoluzione. Poichè f è continua e definita su un compatto, f ammette massimo e minimo.

Il massimo ed il minimo di f sono raggiunti nei punti di $]0,1[$ ove si annulla f' o su $\{0,1\}$.

Sia $x \in]0,1[$; si ha
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$;
la relazione $f'(x) = 0$ è equivalente a
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = 0$, cioè a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$, cioè a $1 = \sqrt{1-x^2}$, cioè a $1 = 1 - x^2$, cioè a $x = 0$;
essendo $x \in]0,1[$ si ha $f'(x) \neq 0$.

Quindi il massimo ed il minimo di f sono raggiunti su $\{0,1\}$.

Si ha
$f(0) = 0$, $f(1) = \frac{\pi}{2} - 1$.

Quindi si ha $\max(f) = \frac{\pi}{2} - 1$, $\min(f) = 0$.

2. **Esercizio.** Sia
$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sin x + 2\cos x \; ;$$
   (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
   (b) in caso affermativo, determinarli (risultato semplificato).

   Risoluzione.

   (a) Poichè f è continua e definita su un compatto, f ammette massimo e minimo.
   (b) Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo di f.
   Sia $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; si ha
$$f'(x) = \cos x - 2\sin x \; ;$$
   Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\cos x - 2\sin x = 0$, cioè se e solo se $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, cioè, essendo $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, se e solo se $x = \operatorname{Arctg}\frac{1}{2}$.
   Si ha quindi
$$E \subset \left\{\operatorname{Arctg}\frac{1}{2},\, 0,\, \frac{\pi}{2}\right\} \; .$$
   Si ha $f(0) = 2$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.
   Si ha $f(\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}) = \sin \operatorname{Arctg}\frac{1}{2} + 2\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}$.
   Essendo $0 < \operatorname{Arctg}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, si ha
   $\sin \operatorname{Arctg}\frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg}\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
   e $\cos \operatorname{Arctg}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
   Si ha quindi $f(\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{5} = \sqrt{5}$.
   Quindi si ha $\max(f) = \sqrt{5}$, $\min(f) = 1$.

3. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sin\frac{1}{x^2}$;
   (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
   (b) in caso affermativo determinarli.

   Risoluzione. Posto $g : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longrightarrow \frac{1}{x^2}$ e $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $y \longrightarrow \sin y$, si ha $f = h \circ g$. Quindi si ha $f(\mathbf{R}^*) = h(g(\mathbf{R}^*)) = h(]0, +\infty[) = [-1, 1]$. Quindi f ammette massimo e minimo e si ha $\max(f) = 1$ e $\min(f) = -1$.

4. **Esercizio.** Sia
$$A = \{2^x; x \in]-\infty, 0]\} \; ;$$
   dire se A ammette massimo e se A ammette minimo; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

   Risoluzione. Posto
$$f :]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2^x \; ,$$
   si ha $A = f(]-\infty, 0])$. Quindi si ha $A =]0, 1]$. Quindi A ammette massimo e si ha $\max(A) = 1$; A non ammette minimo; si ha $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = 0$.

9.7 Equazioni reali

1. **Esercizio.** Assegnate le funzioni

   (a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longrightarrow x + e^x$,

   (b) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longrightarrow e^x + \sin x$,

   dire se l'equazione di incognita x
   $$f(x) = 0$$
   ammette almeno una soluzione; in tal caso determinare $a, b \in \mathbf{R}$, con $a < b$ tali che nell'intervallo $]a, b[$ vi sia almeno una soluzione dell'equazione.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $f(0) = 1 > 0$ e $f(-1) = -1 + e^{-1} < 0$; per il teorema degli zeri di una funzione continua, esiste $x \in]-1, 0[$ tale che $f(x) = 0$.

   (b) Si ha $f(0) = 1 > 0$ e $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 < 0$; per il teorema degli zeri di una funzione continua, esiste $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ tale che $f(x) = 0$.

9.8 Limiti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}$;

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2 \operatorname{tg} x}$;

   (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{2x-\cos x}$;

   (d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x+x}{\sin x+2x}$;

   (e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x+\operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x-x}$;

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sh} x}{\log(1+x)(\operatorname{ch} x-1)}$;

   (g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x+\operatorname{ch} x}{e^x+\operatorname{Arctg} x}$;

   (h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[1000]{x}-\log x}{\sqrt[1000]{x}+\log x}$;

   (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x-2+2\cos x}{\operatorname{Arctg} x(x-\sin x)}$;

   (j) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x+2\cos x-2}{\log^2(1+\sin^2 x)}$;

   (k) $\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x-e^\pi}$;

   (l) $\lim_{x\to-\infty} (|x|^{\frac{5}{2}} + x^3) \operatorname{Arctg} \frac{x^2-x^3}{x^2+5}$;

   (m) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt{x}+\sin x^2+x^2e^{-x}}{\log(x^2+1)+\cos x}$;

   (n) $\lim_{x\to 0} \frac{x+e^{2x}-e^{3x}}{3\log\cos x}$.

Risoluzione.

(a) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$ in quanto la funzione $\sin^2 x$ è limitata e la funzione x tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

(b) Si ha $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2 \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}$

(c) Si ha
$\frac{x+\sin x}{2x-\cos x} \sim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$..
Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{2x-\cos x} = \frac{1}{2} \,.$$

(d) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x+x}{\sin x+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

(e) Si ha
$\frac{\log x+\operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x-x} \sim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{-x} = -\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{x} \sim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\frac{e^x}{x}$.
Si ha quindi
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x+\operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x-x} = \lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2}\frac{e^x}{x}) = -\infty$.

(f) Si ha
$\frac{x-\operatorname{sh} x}{\log(1+x)(\operatorname{ch} x-1)} \sim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x(\frac{x^2}{2})} = -\frac{1}{3}$..
Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sh} x}{\log(1+x)(\operatorname{ch} x-)} = -\frac{1}{3} \,.$$

(g) Si ha
$\frac{\log x+\operatorname{ch} x}{e^x+\operatorname{Arctg} x} \sim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{e^x} = \frac{\frac{1}{2}e^x}{e^x} = \frac{1}{2}$.
Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x+\operatorname{ch} x}{e^x-\operatorname{Arctg} x} = \frac{1}{2} \,.$$

(h) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[1000]{x}-\log x}{\sqrt[1000]{x}+\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{1000}}-\log x}{x^{\frac{1}{1000}}+\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{1000}}}{x^{\frac{1}{1000}}} = 1 \,.$$

(i) Si ha
$\operatorname{Arctg} x(x-\sin x) \sim_{x\to 0} x\frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{6}x^4$,
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\sin^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$2\cos x = 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$\sin^2 x - 2 - 2\cos x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 - 2 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4) = -\frac{1}{4}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0} -\frac{1}{4}x^4$,
$\frac{\sin^2 x-2+2\cos x}{\operatorname{Arctg} x(x-\sin x)} \sim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{6}x^4} = -\frac{3}{2}$.

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - 2 + 2\cos x}{\operatorname{Arctg} x(x - \sin x)} = -\frac{5}{2} \ .$$

(j) Si ha
$\log^2(1+\sin^2 x) \sim_{x\to 0} (\sin^2 x)^2 \sim_{x\to 0} x^4$.
Si ha
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$x\sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$2\cos x = 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$x\sin x + 2\cos x - 2 = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 - 2 + \mathrm{o}(x^4) =$
$-\frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0} -\frac{1}{12}x^4$.
Quindi si ha
$\frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{\log^2(1+\sin^2 x)} \sim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4}{x^4} = -\frac{1}{12}$.
Quindi si ha
$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{\log^2(1+\sin^2 x)} = -\frac{1}{12}$.

(k) Risolviamo l'esercizio in due modi.

i. Primo modo.
Poniamo $y = \pi - x$; si ha $x = y + \pi$; si ha $\lim_{x\to\pi}(x-\pi) = 0$; si ha quindi

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x - e^\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg}(y+\pi)}{e^{y+\pi} - e^\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{e^y e^\pi - e^\pi} =$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{e^\pi(e^y - 1)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^\pi y} = \frac{1}{e^\pi} = e^{-\pi} \ .$$

ii. Secondo modo.
Il limite è della forma $\frac{0}{0}$. Per il teorema di De l'Hospital si ha

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x - e^\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x)}{e^x} = \frac{1}{e^\pi} = e^{-\pi} \ .$$

(l) Si ha
$|x|^{\frac{5}{2}} + x^3 \sim_{x\to-\infty} x^3$.
Si ha
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x^3}{x^2+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$.
Si ha quindi
$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctg} \frac{x^2-x^3}{x^2+5} = \frac{\pi}{2}$.
Si ha quindi $\operatorname{Arctg} \frac{x^2-x^3}{x^2+5} \sim_{x\to-\infty} \frac{\pi}{2}$.
Si ha quindi $\lim_{x\to-\infty}(|x|^{\frac{5}{2}} + x^3) \operatorname{Arctg} \frac{x^2-x^3}{x^2+5} = \lim_{x\to-\infty} x^3 \frac{\pi}{2} = -\infty$.

(m) Si ha
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt{x} + \sin x^2 + x^2 e^{-x}}{\log(x^2+1) + \cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt{x}}{\log(x^2+1)} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt{x}}{\log x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\log\sqrt{x}}{2\log x} = \frac{1}{4}$.

(n) Si ha
$3 \log \cos x = 3 \log(1 + \cos x - 1) \sim_{x \to 0} 3(\cos x - 1) \sim_{x \to 0}$
$3(-\frac{x^2}{2}) = -\frac{3}{2} x^2$.
Per $y \to 0$ si ha
$e^y = 1 + y + \frac{1}{2} y^2 + \mathrm{o}(y^2)$.
Si ha quindi
$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \mathrm{o}(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)$
e
$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{1}{2}(3x)^2 + \mathrm{o}(x^2) = 1 + 3x + \frac{9}{2} x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
Si ha quindi
$x + e^{2x} - e^{3x} = x + 1 + 2x + 2x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 1 - 3x - \frac{9}{2} x^2 =$
$-\frac{5}{2} x^2 + \mathrm{o}(x^2) \sim_{x \to 0} -\frac{5}{2} x^2$.
Si ha quindi
$\frac{x + e^{2x} - e^{3x}}{3 \log \cos x} \sim_{x \to 0} \frac{-\frac{5}{2} x^2}{-\frac{3}{2} x^2} = \frac{5}{3}$.
Si ha quindi
$\lim_{x \to 0} \frac{x + e^{2x} - e^{3x}}{3 \log \cos x} = \frac{5}{3}$

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n} \right)^n .$$

Risoluzione. Si ha
$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+3n} \right)^n = \lim_{n \to \infty} e^{n \log \frac{n^2-1}{n^2+3n}}$.
Si ha
$\lim_{n \to \infty} n \log \frac{n^2-1}{n^2+3n} = \lim_{n \to \infty} n \log \left(1 + \frac{n^2-1}{n^2+3n} - 1 \right) =$
$\lim_{n \to \infty} n \log \left(1 + \frac{-1-3n}{n^2+3n} \right) = \lim_{n \to \infty} n \frac{-1-3n}{n^2+3n} = \lim_{n \to \infty} n \frac{-3n}{n^2} = -3$.
Si ha quindi
$\lim_{n \to \infty} e^{n \log \frac{n^2-1}{n^2+3n}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$.

3. **Esercizio.** Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare, in funzione di α, il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{2x(e^x - 1) - 2 \operatorname{Arctg} x^2 - x^3}{x^\alpha} .$$

Risoluzione. Per $x \to 0+$, si ha
$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \mathrm{o}(x^3)$; quindi
$e^x - 1 = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \mathrm{o}(x^3)$; quindi
$2x(e^x - 1) = 2x^2 + x^3 + \frac{1}{3} x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

Per $y \to 0+$, si ha
$\operatorname{Arctg} y = y + \mathrm{o}(y^2)$; quindi per $x \to 0+$ si ha
$\operatorname{Arctg} x^2 = x^2 + \mathrm{o}(x^4)$; quindi $2 \operatorname{Arctg} x^2 = 2x^2 + \mathrm{o}(x^4)$.

Quindi per $x \to 0+$ si ha
$2x(e^x - 1) - 2\operatorname{Arctg} x^2 - x^3 = 2x^2 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 \mathrm{o}(x^4) - 2x^2 - x^3 =$
$\frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0+} \frac{1}{3}x^4$.

Si ha quindi
$\lim_{x\to 0+} \frac{2x(e^x-1)-2\operatorname{Arctg} x^2 - x^3}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^\alpha} =$
$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{3}x^{4-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{per } \alpha = 4 \\ 0 & \text{per } \alpha < 4 \\ +\infty & \text{per } \alpha > 4 \end{cases}$.

4. **Esercizio.** Dire se esiste il seguente limite (cioè se la funzione è convergente per $x \to 0$) e, in caso affermativo, determinarlo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|} .$$

Risoluzione. Si ha
$\sin |x| \sim_{x\to 0} |x|$.

Per $y \to 0$ si ha
$e^y = 1 + y + \mathrm{o}(y)$.

Si ha quindi
$e^{2x} = 1 + 2x + \mathrm{o}(x)$.

Si ha
$\cos x = 1 + \mathrm{o}(x)$.

Si ha quindi
$e^{2x} - \cos x = 1 + 2x + \mathrm{o}(x) - 1 = 2x + \mathrm{o}(x) \sim_{x\to 0} 2x$.

Si ha quindi
$\frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|} \sim_{x\to 0} \frac{2x}{|x|}$.

Le due funzioni sono equivalenti anche per $x \to 0+$ e per $x \to 0-$

Si ha quindi
$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x\to 0+, x>0} \frac{2x}{x} = 2$
e
$\lim_{x\to 0-} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|} = \lim_{x\to 0-} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x\to 0-, x<0} \frac{2x}{-x} = -2$.

Essendo il limite destro diverso dal limite sinistro, la funzione non è convergente per $x \to 0$.

9.9 Serie

1. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n - n}{n^2}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n + \operatorname{Arctg} n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}-\sin\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\operatorname{sh}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^n}{e^{n^2}}$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+3n}{(n+1)^2+3}e^{\frac{1}{n}}$;

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+(-1)^n+n}{n^3+n\log^2 n}$;

(i) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log^n n}$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n}\right)$.

Risoluzione.

(a) Si ha
$\frac{\sin n-n}{n^2}\sim_{n\to\infty}\frac{-n}{n^2}=-\frac{1}{n}$.
Quindi la serie assegnata è divergente negativamente.

(b) Si ha $\frac{n-\sqrt{n}}{n+\operatorname{Arctg} n}\sim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$; quindi la serie è divergente positivamente.

(c) Si ha $\sqrt{\frac{1}{n}}-\sin\sqrt{\frac{1}{n}}\sim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(\sqrt{\frac{1}{n}})^3=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$; quindi la serie è convergente.

(d) Si ha $\frac{1}{n}\sqrt{\sin\frac{1}{n}}\sim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$; quindi la serie è convergente.

(e) Si ha $\sqrt{\operatorname{sh}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}\sim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.
Quindi la serie è convergente.

(f) Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\log n)^n}{e^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\log n}{e^n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{e^n}=0\ .$$

Quindi per il criterio della radice, la serie è convergente.

(g) Si ha
$\frac{(-1)^n+3n}{(n+1)^2+3}e^{\frac{1}{n}}\sim_{n\to\infty}\frac{3n}{(n+1)^2}\cdot 1=\frac{3n}{n^2}=\frac{3}{n}$.
Quindi la serie è divergente positivamente.

(h) Si ha
$\frac{n^2+(-1)^n+n}{n^3+n\log^2 n}\sim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}$.
Quindi la serie è divergente positivamente.

(i) Si ha
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\log^n n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log^n n}=0$.
Quindi per il criterio della radice la serie è convergente.

(j) Per $x \to 0$, si ha
$e^x = 1 + x + \mathrm{o}(x)$
e
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
Si ha quindi $e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$
e
$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$.
Si ha quindi
$e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}) - 1 + \frac{1}{n^2} = \frac{3}{2}\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}) \sim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\frac{1}{n^2}$.
Essendo $2 > 1$, la serie è convergente.

2. **Esercizio.** Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + \log n}{n^2 + 3\log n} \,.$$

Suggerimento. Non essendo la serie a termini positivi, non si può usare il criterio del confronto; ci si può ricondurre in altra maniera ad una serie nota.]

Risoluzione. Si ha

$$\frac{(-1)^n n + \log n}{n^2 + 3\log n} = (-1)^n\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n n + \log n}{n^2 + 3\log n} - (-1)^n\frac{1}{n} =$$

$$(-1)^n\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n n^2 + n\log n - (-1)^n n^2 - 3(-1)^n\log n}{n(n^2 + 3\log n)} =$$

$$(-1)^n\frac{1}{n} + \frac{n\log n - 3(-1)^n\log n}{n(n^2 + 3\log n)} \,.$$

Si ha

$$\left|\frac{n\log n - 3(-1)^n\log n}{n(n^2 + 3\log n)}\right| \sim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{n^3} = \frac{\log n}{n^2} \lll_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \,.$$

Quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\log n - 3(-1)^n\log n}{n(n^2 + 3\log n)}$$

è assolutamente convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ è convergente per il criterio di Leibniz; quindi la serie assegnata è convergente.

9.10 Derivabilità e derivate

1. **Esercizio.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

   (a) $f(x) = x^3 \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$;

   (b) $f(x) = x^{\cos x}$;

   (c) $f(x) = \frac{\log \operatorname{Arctg}(5x)}{\sin \sqrt{\log x}}$,

   (d) $f(x) = \log \cos \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{x}}$;

   (e) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

   (f) $f(x) = \operatorname{Arctg} \sqrt{\operatorname{sh} x}$;

   (g) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{Arctg} \log^2(2^x + \operatorname{sh} x)}$;

   (h) $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{Arctg} x}$;

   (i) $f(x) = 2^x \log x \operatorname{ch} x$;

   (j) $f(x) = \sin \log(x^3 + 1)$;

   (k) $f(x) = \log_5(x^2 \operatorname{tg}^3 x)$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha
$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} + x^3 \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2}(-\frac{1}{x^2}) \ .$$

   (b) Si ha $f(x) = e^{\cos x \log x}$; quindi si ha
$$f'(x) = e^{\cos x \log x}(-\sin x \log x + \cos x \frac{1}{x}) \ .$$

   (c) Si ha
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\operatorname{Arctg}(5x)} \frac{1}{1+(5x)^2} 5 \sin \sqrt{\log x} - \log \operatorname{Arctg}(5x) \cos \sqrt{\log x} \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \frac{1}{x}}{\sin^2 \sqrt{\log x}} \ .$$

   (d) Si ha
$$f'(x) = \frac{1}{\cos \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{x}}}(-\sin \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{x}}) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}(-\frac{1}{x^2}) \ .$$

   (e) Si ha $f(x) = e^{\frac{1}{x} \log x}$; quindi si ha
$$f'(x) = e^{\frac{1}{x} \log x} \frac{\frac{1}{x}x - \log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \log x}{x^2} \ .$$

(f) Si ha
$$f'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sh} x}\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sh} x}}\operatorname{ch} x \ .$$

(g) Si ha
$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(\operatorname{Arctg}\log^2(2^x+\operatorname{sh} x))^2}}\frac{1}{1+\log^4(2^x+\operatorname{sh} x)}2\log(2^x+\operatorname{sh} x)\frac{1}{2^x+\operatorname{sh} x}(2^x\log 2+\operatorname{ch} x).$

(h) Si ha $f(x) = e^{\operatorname{Arctg} x \log \sin x}$; quindi si ha
$f'(x) = e^{\operatorname{Arctg} x \log \sin x}\left(\frac{1}{1+x^2}\log\sin x + \operatorname{Arctg} x \frac{1}{\sin x}\cos x\right) =$
$(\sin x)^{\operatorname{Arctg} x}\left(\frac{\log \sin x}{1+x^2} + \operatorname{Arctg} x \frac{\cos x}{\sin x}\right).$

(i) Si ha
$f'(x) = 2^x \log 2 \log x \operatorname{ch} x + 2^x \frac{1}{x}\operatorname{ch} x + 2^x \log x \operatorname{sh} x.$

(j) Si ha $f'(x) = \cos\log(x^3+1)\frac{1}{x^3+1}3x^2.$

(k) Si ha
$f'(x) = \frac{1}{x^2\operatorname{tg}^3 x}\frac{1}{\log 5}\left(2x\operatorname{tg}^3 x + x^2 3\operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x}\right).$

2. **Esercizio.** Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni f reali di variabile reale definite naturalmente; determinare l'insieme degli $x \in \operatorname{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e in tali x calcolare la derivata rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

(a) $f(x) = 2^x \operatorname{Arctg}\sqrt{x}$;

(b) $f(x) = 3^x \operatorname{Arcsin}(\log x + 1)$;

(c) $f(x) = \sqrt[6]{\operatorname{Arctg} x^2}$;

(d) $f(x) = \sin(x^2\sqrt{\cos x})$;

(e) $f(x) = \cos(x^2\sqrt{\cos(5x)})$;

(f) $f(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Risoluzione.

(a) Si ha $\operatorname{dom}(f) = [0, +\infty[$.
Per $x > 0$ si ha
$$f'(x) = 2^x \log 2 \operatorname{Arctg}\sqrt{x} + 2^x\frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}} \ .$$
Si ha $\lim_{x\to 0, x>0} f'(x) = +\infty$; quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0 e $f'(0) = +\infty$

(b) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $\begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \log x + 1 \leq 1 \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq \log x \leq 0 \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} x > 0 \\ e^{-2} \leq x \leq 1 \end{cases}$, cioè tali che $e^{-2} \leq x \leq 1$; si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f) = [e^{-2}, 1] .$$

Per $x \in]e^{-2}, 1[$ si ha

$$f'(x) = 3^x \log 3 \operatorname{Arcsin}(\log x + 1) + 3^x \frac{1}{\sqrt{1 - (\log x + 1)^2}} \frac{1}{x} .$$

Si ha $\lim_{x \to e^{-2}} f'(x) = +\infty$; quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in e^{-2} e $f'(e^{-2}) = +\infty$.
Si ha $\lim_{x \to 1} f'(x) = +\infty$; quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 1 e $f'(1) = +\infty$.

(c) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}$.
Per $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$; f è derivabile in x e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{6 \sqrt[6]{\operatorname{Arctg}^5 x^2}} \frac{1}{1 + x^4} 2x = \frac{x}{3(1 + x^4) \sqrt[6]{\operatorname{Arctg}^5 x^2}} .$$

Consideriamo la derivabilità di f in 0; si ha

$$\lim_{x \to 0, x \neq 0} f'(x) = \lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{x}{3(1 + x^4) \sqrt[6]{\operatorname{Arctg}^5 x^2}} = \lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{x}{3x^{\frac{5}{3}}} =$$

$$\lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = +\infty .$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0 e $f'(0) = +\infty$.

(d) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $\cos x \geq 0$, quindi dagli $x \in \mathbf{R}$ per i quali esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \frac{\pi}{2} + 2k\pi] .$$

Si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{k \in Z} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right] .$$

Sia $k \in \mathbf{Z}$ e sia $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; la funzione f è derivabile in x e si ha

$$f'(x) = \cos(x^2 \sqrt{\cos x}) \left(2x\sqrt{\cos x} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} (-\sin x) \right) =$$

$$\cos(x^2\sqrt{\cos x})\left(2x\sqrt{\cos x}-x^2\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right) .$$

Sia $k \in \mathbf{Z}$ e sia $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
Si ha
$\lim_{x\to a} \cos(x^2\sqrt{\cos x}) = \cos 0 = 1$,
$\lim_{x\to a} 2x\sqrt{\cos x} = 0$,
$\lim_{x\to a} -x^2\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = -\infty$.
Si ha quindi $\lim_{x\to a} f'(x) = -\infty$.
Quindi f è derivabile in a rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e si ha $f'(a) = -\infty$.
Sia $k \in \mathbf{Z}$ e sia $a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
Si ha
$\lim_{x\to a} \cos(x^2\sqrt{\cos x}) = \cos 0 = 1$,
$\lim_{x\to a} 2x\sqrt{\cos x} = 0$,
$\lim_{x\to a} -x^2\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = +\infty$.
Si ha quindi $\lim_{x\to a} f'(x) = +\infty$.
Quindi f è derivabile in a rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e si ha $f'(a) = +\infty$.

(e) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $\cos(5x) \geq 0$, quindi dagli $x \in \mathbf{R}$ per i quali esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 5x\frac{\pi}{2} + 2k\pi] ,$$

cioè tali che

$$-\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \leq x\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}] .$$

Si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{k\in Z}\left[-\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}\right] .$$

Sia $k \in \mathbf{Z}$ e sia $-\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} < x < \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$; la funzione f è derivabile in x e si ha

$$f'(x) = -\sin(x^2\sqrt{\cos(5x)})\left(2x\sqrt{\cos(5x)} + x^2\frac{1}{2\sqrt{\cos(5x)}}(-\sin(5x))5\right) =$$

$$\sin(x^2\sqrt{\cos(5x)})\left(\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)}\right) .$$

Sia $k \in \mathbf{Z}$ e sia $a = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$.
Si ha
$\sin(5a) = \sin\left(\frac{pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$,
$\cos(5a) = \cos\left(\frac{pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$.

Si ha quindi
$\sin(x^2\sqrt{\cos(5x)}) \sim_{x\to a} x^2\sqrt{\cos(5x)} \sim_{x\to a} a^2\sqrt{\cos(5x)}$.
Si ha $\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \sim_{x\to a} \frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} \sim_{x\to a} \frac{5}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}}$.
Quindi si ha
$\sin(x^2\sqrt{\cos(5x)})\left(\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)}\right) \sim_{x\to a}$
$a^2\sqrt{\cos(5x)}\ \frac{5}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}} = \frac{5}{2}a^4$.
Si ha quindi
$\lim_{x\to a}\sin(x^2\sqrt{\cos(5x)})\left(\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)}\right) =$
$\frac{5}{2}a^4 = \frac{5}{3}\left(\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}\right)^4$.
Quindi f è derivabile in a e si ha

$$f'(a) = \frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}\right)^4 .$$

Sia $k \in \mathbf{Z}$ e sia $a = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$.
Si ha
$\sin(5a) = \sin\left(-\frac{pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$,
$\cos(5a) = \cos\left(\frac{pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$.
Si ha quindi
$\sin(x^2\sqrt{\cos(5x)}) \sim_{x\to a} x^2\sqrt{\cos(5x)} \sim_{x\to a} a^2\sqrt{\cos(5x)}$.
Si ha $\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \sim_{x\to a} \frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} \sim_{x\to a} -\frac{5}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}}$.
Quindi si ha
$\sin(x^2\sqrt{\cos(5x)})\left(\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)}\right) \sim_{x\to a}$
$a^2\sqrt{\cos(5x)}\ \left(-\frac{5}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}}\right) = -\frac{5}{2}a^4$.
Si ha quindi
$\lim_{x\to a}\sin(x^2\sqrt{\cos(5x)})\left(\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)}\right) =$
$-\frac{5}{2}a^4 = -\frac{5}{3}\left(\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}\right)^4$.
Quindi f è derivabile in a e si ha

$$f'(a) = -\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}\right)^4 .$$

(f) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $-1 \leq \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 1$. cioè tali che
$\begin{cases} -x^2 - 1 \leq x^2 - 1 \\ x^2 - 1 \leq x^2 + 1 \end{cases}$, cioè tali che

$\begin{cases} -x^2 \leq x^2 \\ -1 \leq 1 \end{cases}$, cioè tali che
$-1 \leq 1$; si ha quindi $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}$.
Si ha $\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$ se e solo se $x^2 - 1 = x^2 + 1$, cioè se e solo se $-1 = 1$; quindi mai.
Si ha $\frac{x^2-1}{x^2+1} = -1$ se e solo se $x^2 - 1 = -x^2 - 1$, cioè se e solo se $-x^2 = x^2$; cioè se e solo se $2x^2 = 0$, cioè se e solo se $x = 0$.
Supponiamo $x \neq 0$; allora f è derivabile in x e si ha
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}} \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+2x^2+1-(x^4-2x^2+1)}} \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2}(x^2+1)} = \frac{4x}{2|x|(x^2+1)} = \frac{4x}{2x \operatorname{sgn} x(x^2+1)} = \frac{2}{\operatorname{sgn} x(x^2+1)} = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1}$.
Si ha
$\lim_{x \to 0+, n \neq 0} f'(x) = \lim_{x \to 0+, x>0} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1} = \lim_{x \to 0+, x>0} \frac{2}{x^2+1} = 2$.
Quindi f è derivabile da destra in 0 e si ha $f'_+(0) = 2$.
Si ha
$\lim_{x \to 0-, n \neq 0} f'(x) = \lim_{x \to 0-, x<0} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1} = \lim_{x \to 0+, x<0} -\frac{2}{x^2+1} = -2$.
Quindi f è derivabile da sinistra in 0 e si ha $f'_-(0) = -2$.
Quindi f non è derivabile in 0.

3. **Esercizio.** Calcolare la derivata della seguente funzione

$$f(x) = (\operatorname{Arctg} \sqrt[3]{x}) \operatorname{tg}^2 x$$

in un punto $x \in \mathrm{dom}(f)$, $x \neq 0$.

Risoluzione. Per $x \in \mathrm{dom}(f)$, $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt[3]{x})^2} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{tg}^2 x + (\operatorname{Arctg} \sqrt[3]{x}) 2(\operatorname{tg} x) \frac{1}{\cos^2 x} .$$

4. Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(2 - \frac{3}{2}|x|\right)$$

(a) determinare il dominio naturale di f;

(b) determinare la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(-1, f(-1))$.

Risoluzione.

(a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $-1 \leq 2 - \frac{3}{3}|x| \leq x$, cioè tali che
$\begin{cases} -1 \leq 2 - \frac{3}{2}|x| \\ 2 - \frac{3}{2}|x| \leq 1 \end{cases}$, cioè tali che

$\begin{cases} \frac{3}{2}|x| \leq 3 \\ \frac{3}{2}|x| \geq 1 \end{cases}$, cioè tali che
$\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x| \geq \frac{2}{3} \end{cases}$, cioè tali che
$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \leq -\frac{2}{3} \text{ o } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$, cioè tali che
$-2 \leq x \leq -\frac{2}{3}$ o a$\frac{2}{3} \leq x \leq 2$.
Si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f) = [-2, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 2] .$$

(b) Si ha
$f(-1) = \text{Arcsin}\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \text{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.
Per $x \in]-2, -\frac{2}{3}[$, si ha $f(x) = \text{Arcsin}\left(2 + \frac{3}{2}x\right)$; quindi si ha
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(1+\frac{3}{2}x\right)^2}}\,\frac{3}{2}$.
Si ha quindi$f'(1) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1=\frac{1}{4}}} = \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.
L'equazione della retta tangente al grafico di f in $(-1, f(-1))$ è quindi

$$y - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,(x+1) .$$

5. Sia $a \in \mathbf{R}$; determinare a in modo che la funzione

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} a + ex & \text{per } x \leq -1 \\ (x+1)e^{|x|} & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

sia continua; per tale valore di a, determinare l'insieme degli $x \in \mathbf{R}$ tali che f derivabile in x.

Risoluzione. Per il carattere locale della continuità, f è continua su $\mathbf{R}-\{-1\}$.

Si ha
$\lim_{x\to -1-, x\neq -1} f(x) = \lim_{x\to -1-, x<-1} a + ex = a - e$.

Si ha
$f(-1) = a - e$.

Si ha
$\lim_{x\to -1+, x\neq -1} f(x) = \lim_{x\to -1-, x>-1} (x+1)e^{|x|} = 0$.

Quindi f è continua in -1 se e solo se $a - e = 0$, cioè se e solo se $a = e$.

Supponiamo dunque $a = e$. Si ha

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} e + ex & \text{per } x \leq -1 \\ (x+1)e^{|x|} & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

La funzione $|x|$ è derivabile su $\mathbf{R}-\{0\}$. Quindi per il carattere locale della derivabilità, f è derivabile su $\mathbf{R}-\{-1, 0\}$.

Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x) = \begin{cases} e + ex & \text{per } x \leq -1 \\ (1+x)e^{-x} & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ (1+x)e^{x} & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad .$$

Per il carattere locale della derivata per $x < -1$ si ha
$f'(x) = e$.

Per il carattere locale della derivata per $-1 < x < 0$ si ha
$f'(x) = e^{-x} + (1+x)e^{-x}(-1) = e^{-x}(1-1-x) = -xe^{-x}$.

Per il carattere locale della derivata per $x > 0$ si ha
$f'(x) = e^{x} + (1+x)e^{x} = e^{x}(1+1-x) = (2+x)e^{x}$.

Si ha
$\lim_{x\to -1-, x\neq -1} f'(x) = \lim_{x\to -1-, x<-1} e = e$.

Quindi f è derivabile da sinistra in -1 e si ha $f'_{-}(-1) = e$.

Si ha
$\lim_{x\to -1+, x\neq -1} f'(x) = \lim_{x\to -1-, -1<x<0} -xe^{-x} = e$.

Quindi f è derivabile da destra in -1 e si ha $f'_{+}(-1) = e$.

Essendo $f'_{+}(-1) = f'_{+}(-1)$, f è derivabile in -1.

Si ha
$\lim_{x\to 0-, x\neq 0} f'(x) = \lim_{x\to 0-, -1<x<0} -xe^{-x} = 0$.

Quindi f è derivabile da sinistra in 0 e si ha $f'_{-}(0) = 0$.

Si ha
$\lim_{x\to 0+, x\neq 0} f'(x) = \lim_{x\to 0-, x>0}(2+x)e^{x} = 2$.

Quindi f è derivabile da destra in 0 e si ha $f'_{+}(0) = 2$.

Essendo $f'_{+}(0) \neq f'_{+}(01)$, f non è derivabile in -1.

L'insieme degli $x \in \mathbf{R}$ tali che f è derivabile in x è quindi $\mathbf{R} - \{0\}$.

9.11 Studio di funzione

1. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = x - \operatorname{Arctg} x \ .$$

Si chiede:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) dire se f ammette asintoti obliqui e, in caso affermativo, determinarli;

(d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}$.

(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\operatorname{Arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} -\operatorname{Arctg} x = -\frac{\pi}{2}$; quindi f ammette asintoto per $x \to +\infty$ e la retta di equazione $y = x - \frac{\pi}{2}$ è l'asintoto.

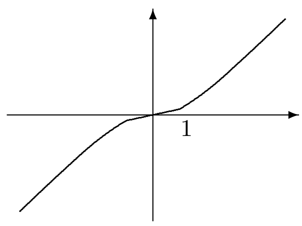
Analogamente si vede che f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e che la retta di equazione $y = x + \frac{\pi}{2}$ è l'asintoto.

(d) Sia $x \in \mathbf{R}$; si ha $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$; si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x \neq 0$ e quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, 0]$ e su $[0, +\infty[$; quindi f è strettamente crescente su tutto $\mathbf{R}$; quindi di ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{\mathbf{R}\}, \qquad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset \qquad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset \,.$$

(e) Sia $x \in \mathbf{R}$; si ha $f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$; si ha quindi $f''(x) > 0$ per $x > 0$, $f''(x) < 0$ per $x < 0$; quindi f è strettamente convessa su $[0, +\infty[$, strettamente concava su $]-\infty, 0]$; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{[0, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\infty, 0]\} \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset \,.$$



2. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = \log \frac{x-1}{x+1} \,.$$

Si chiede:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} x \neq -1 \\ x < -1 \text{ o } x > 1 \end{cases}$, cioè tali che $x < -1$ o $x > 1$. Si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\ .$$

(b) Si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$.

(c) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$; si ha

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-1} \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1} > 0\ .$$

Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, -1[$ e su $]1, +\infty[$. Si ha quindi

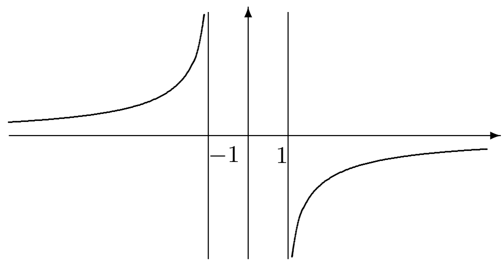
$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, -1[\,,]1, +\infty[\}\ , \qquad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset \qquad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset\ .$$

(d) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$; si ha

$$f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}\ .$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, quindi mai; si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < 0$, quindi se e solo se $x < -1$; si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x > 0$, quindi se e solo se $x > 1$. Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty, -1[$, strettamente concava su $]1, +\infty[$. Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]-\infty, -1[\}\ , \qquad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset \qquad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]1, +\infty[\}\ .$$



3. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{|x-1|-1}}\ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) Determinare il dominio di f;

(b) Calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) Studiare la derivabilità di f in 1;

(e) Determinato il prolungamento continuo di $f|]0,2[$ a $[0,2]$, se ne studi la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0 e 2;

(f) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $|x-1|-1 \neq 0$, cioè tali che $|x-1| \neq 1$, cioè tali che $x-1 \neq 1$ e $x-1 \neq -1$, cioè tali che $x \neq 2$ e $x \neq 0$. Si ha quindi
$$\mathrm{dom}(f) =]-\infty, 0[\cup]0,2[\cup]2,+\infty[\ .$$

(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. $\lim_{x\to 2-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = +\infty$.

(c) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$.
Si ha
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}} & \text{per } x \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x < 1 \end{cases} \ .$$
Per $x > 1$ si ha
$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}}(-\frac{1}{(x-2)^2}) < 0\ .$$
Quindi f è strettamente decrescente su $[1,2[$ e su $]2,+\infty[$.
Per $x < 1$ si ha
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}) > 0\ .$$
Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty,0[$ e su $]0,1]$.
Si ha quindi
$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty,0[\,,]0,1]\}\,, \qquad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset\,,$$
$$\mathcal{M}(\searrow) = \{[1,2[\,,]2,+\infty[\}\ .$$

(d) Si ha $\lim_{x\to1+,x>1} f'(x) = -e^{-1}$; quindi f è derivabile da destra in 1 e si ha $f'_+(1) = -e^{-1}$.
Si ha $\lim_{x\to1-,x<1} f'(x) = e^{-1}$; quindi f è derivabile da sinistra in 1 e si ha $f'_-(1) = e^{-1}$.
Poichè $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, f non è derivabile in 1.

(e) Il prolungamento continuo di $f|]0,2[$ a $[0,2]$ è la funzione

$$g:[0,2]\longrightarrow \mathbf{R}, x\longrightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x\in]0,2[\\ 0 & \text{per } x\in\{0,2\} \end{cases} .$$

Si ha
$\lim_{x\to 0, x\in]0,2[} g'(x)=\lim_{x\to 0,x>0} f'(x)=$
$\lim_{x\to 0,x>0} e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}=\lim_{y\to -\infty} e^y y^2=0.$
Quindi g è derivabile in 0 e si ha $g'(0)=0$.
Si ha
$\lim_{x\to 2, x\in]0,2[} g'(x)=\lim_{x\to 2,x<2} f'(x)=$
$\lim_{x\to 2x<2} e^{\frac{1}{x-2}}(-\frac{1}{(x-2)^2})=\lim_{y\to -\infty}(-e^y y^2)=0.$
Quindi g è derivabile in 2 e si ha $g'(2)=0$.

(f) Sia $x\in \mathrm{dom}(f)$.
Per $x>1$ si ha

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x-2}}(-\frac{1}{(x-2)^2})^2+e^{\frac{1}{x-2}}\frac{2(x-2)}{(x-2)^4}=$$

$$e^{\frac{1}{x-2}}\frac{1+2x-4}{(x-2)^4}=e^{\frac{1}{x-2}}\frac{2x-3}{(x-2)^4} .$$

Si ha $f''(x)=0$ se e solo se $x=\frac{3}{2}$; si ha $f''(x)>0$ se e solo se $x>\frac{3}{2}$; si ha $f''(x)<0$ se e solo se $x<\frac{3}{2}$. Quindi f è strettamente convessa su $[\frac{3}{2},2[$ e su $]2,+\infty[$, strettamente concava su $[1,\frac{3}{2}]$.
Per $x<1$ si ha

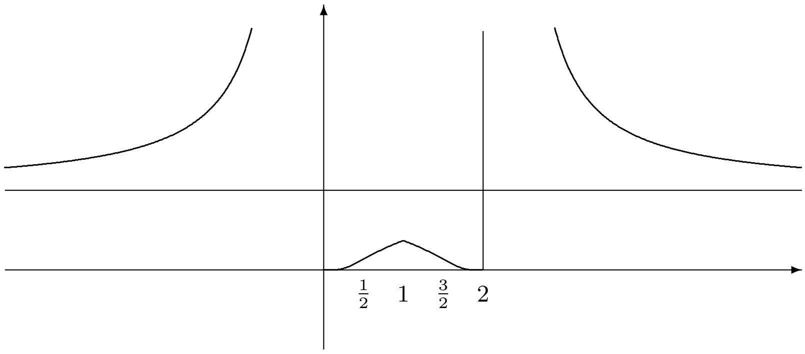
$$f''(x)=e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^4}+e^{-\frac{1}{x}}\frac{2x}{x^4}=e^{-\frac{1}{x}}\frac{1-2x}{x^4} .$$

Si ha $f''(x)=0$ se e solo se $x=\frac{1}{2}$; si ha $f''(x)>0$ se e solo se $x<\frac{1}{2}$; si ha $f''(x)<0$ se e solo se $x>\frac{1}{2}$. Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty,0[$ e su $]0,\frac{1}{2}]$, strettamente concava su $[\frac{1}{2},1]$.
Poichè f è strettamente concava su $[\frac{1}{2},1]$ e su $[1,\frac{3}{2}]$ e poichè $f'_-(1)\leq f'_+(1)$, f è strettamente concava su $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$.
Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow)=\{]-\infty,0[\,,]0,\frac{1}{2}]\,,[\frac{3}{2},2[\,,]2,+\infty[\} ,$$

$$\mathcal{C}(\updownarrow)=\emptyset \qquad \mathcal{C}(\downarrow)=\{[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]\} .$$

Per tracciare il grafico di f teniamo conto che $f(1)=e^{-1}\approx .37$, $\frac{1}{2}=.5$, $\frac{3}{2}=1.5$, $f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})=e^{-2}\approx .14$. Si ha



4. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{x-1}\, e^{-x} \ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti o i valori di f nei punti frontiera del dominio;

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) studiare la derivabilità di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 1;

(e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = [1, +\infty[$.

(b) Si ha $f(1) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$.

(c) Sia $x \in]1, +\infty[$; si ha
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\, e^{-x} + \sqrt{x-1}e^{-x}(-1) = e^{-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}\right) = e^{-x}\frac{1-2(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = e^{-x}\frac{1-2x+2}{2\sqrt{x-1}} = e^{-x}\frac{3-2x}{2\sqrt{x-1}}$.
Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $3 - 2x = 0$, cioè se e solo se $2x = 3$, cioè se e solo se $x = \frac{3}{2}$. Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $3 - 2x > 0$, cioè se e solo se $2x < 3$, cioè se e solo se $x < \frac{3}{2}$. Si ha $f(x) < 0$ se e solo se $x > \frac{3}{2}$.
Quindi f è strettamente crescente su $[1, \frac{3}{2}]$, strettamente decrescente su $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{[1, \frac{3}{2}]\right\},\ \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset,\ \mathcal{M}(\searrow) = \left\{[\frac{3}{2}, +\infty[\right\}\ .$$

(d) Si ha
$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}e^{-x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$

Quindi f è derivabile rispetto ad $\overline{\mathbf{R}}$ in 1 e si ha $f'(1) = +\infty$.

(e) Sia $x \in]1, +\infty[$; si ha
$f''(x) = -\frac{e^{-x}}{2}\frac{3-2x}{\sqrt{x-1}} + \frac{e^{-x}}{2}\frac{-\sqrt{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(3-2x)}{x-1} =$
$\frac{e^{-x}}{2}\left(-\frac{3-2x}{\sqrt{x-1}} + \frac{-4(x-1)-3+2x}{2(x-1)\sqrt{x-1}}\right) =$
$\frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{x-1}} + \frac{-4x+4-3+2x}{2(x-1)\sqrt{x-1}}\right) =$
$\frac{e^{-x}}{2}\frac{2(x-1)(2x-3)-2x+1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} =$
$\frac{e^{-x}}{2}\frac{4x^2-6x-4x+6-2x+1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} =$
$\frac{e^{-x}}{2}\frac{4x^2-12x+7}{2(x-1)\sqrt{x-1}}.$

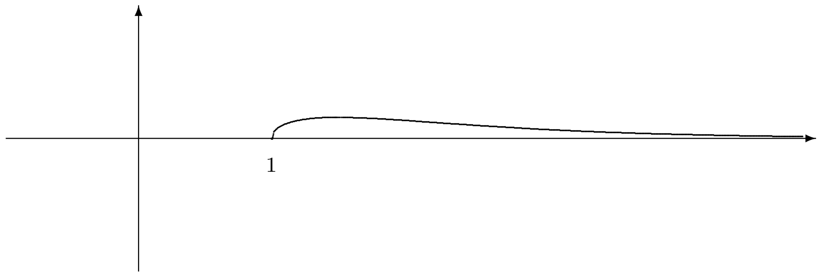
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $4x^2 - 12x + 7 = 0$, cioè se e solo se
$x = \frac{6\pm\sqrt{36-28}}{4} == \frac{6\pm\sqrt{8}}{4} == \frac{3\pm\sqrt{2}}{2}$,
cioè, essendo $x > 1$, se e solo se $x = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $4x^2 - 12x + 7 > 0$, cioè e e solo se $x < \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ o $x > \frac{3+\sqrt{2}}{2}$, cioè se e solo se $x > \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $1 < x < \frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

Quindi f è strettamente convessa su $[\frac{3+\sqrt{2}}{2}, +\infty[$, strettamente concava su $[1, \frac{3+\sqrt{2}}{2}]$.

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{[\frac{3+\sqrt{2}}{2}, +\infty[\right\},\ \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset,\ \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{[1, \frac{3+\sqrt{2}}{2}]\right\}\ .$$

Per disegnare il grafico osserviamo che $\frac{3}{2} = 1.5$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \approx .15$, $\frac{3+\sqrt{2}}{2} \approx 2.21$, $f(\frac{3+\sqrt{2}}{2} \approx .12$.



5. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \log|x| - x^2 + 1 ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo; in caso affermativo determinarli;

(e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}^*$.

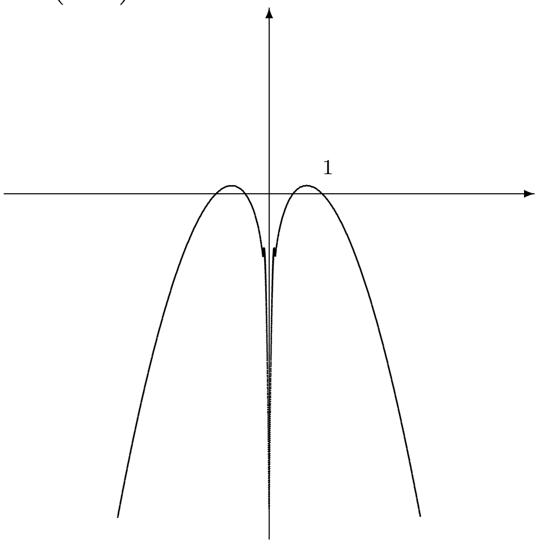
(b) Si ha $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(c) Sia $x \in \mathbf{R}^*$; si ha $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$.
Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\frac{1}{x} - 2x = 0$, cioè se e solo se $\frac{1-2x^2}{x} = 0$, cioè se e solo se $1 - 2x^2 = 0$, cioè se e solo se $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si ha $1 - 2x^2 > 0$ se e solo se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $f'(x) < 0$ se e solo se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ o $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ e su $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$; f è strettamente decrescente su $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[$ e su $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. Si ha quindi
$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}],]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]\}$, $\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$,
$\mathcal{M}(\searrow) = \{[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[, [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[\}$.

(d) Si ha $f(\mathbf{R}^*) =]-\infty, \frac{1}{2}(1-\log 2)]$. Quindi f ammette massimo e si ha $\max(f) = \frac{1}{2}(1-\log 2)$; f non ammette minimo.

(e) Sia $x \in \mathbf{R}^*$; si ha $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0$.
Quindi f è strettamente concava su $]-\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$. Si ha quindi $\mathcal{C}(\uparrow) = \emptyset]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]\}$, $\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset$, $\mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\infty, 0[,]0, +\infty[\}$.

Si ha $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx .71$, $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} * 1 - \log 2) \approx .15$.



6. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^4 \log^3 x\ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) determinato il prolungamento continuo di f a $[0, +\infty[$, studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;

(e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) =]0, +\infty[$.

(b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(c) Sia $x \in]0,+\infty[$; si ha
$f'(x) = 4x^3\log^3 x + 3x^4\log^2 x\frac{1}{x} = 4x^3\log^3 x + 3x^3\log^2 x =$
$x^3\log^2 x(4\log x + 3)$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$ o $4\log x + 3 = 0$, cioè se e solo se $\log x = 0$ o $\log x = -\frac{3}{4}$, cioè se e solo se $x = 1$ o $x = e^{-\frac{3}{4}}$. Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $e^{-\frac{3}{4}} < x < 1$ o $x > 1$. Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $0 < x < e^{-\frac{3}{4}}$.

Quindi f è strettamente crescente su $[e^{-\frac{3}{4}}, 1] esu [1,+\infty[$ e quindi su $[e^{-\frac{3}{4}},+\infty[$; f è strettamente decrescente su $]0, e^{-\frac{3}{4}}]$. Si ha quindi
$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[e^{-\frac{3}{4}},+\infty[\}$, $\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$,
$\mathcal{M}(\searrow) = \{]0, e^{-\frac{3}{4}}]\}$.

(d) Il prolungamento continuo di f a $[0,+\infty[$ è la funzione
$$g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x^4\log^3 x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}.$$

Si ha
$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(4x^3\log^3 x + 3x^3\log^2 x) = 0$.

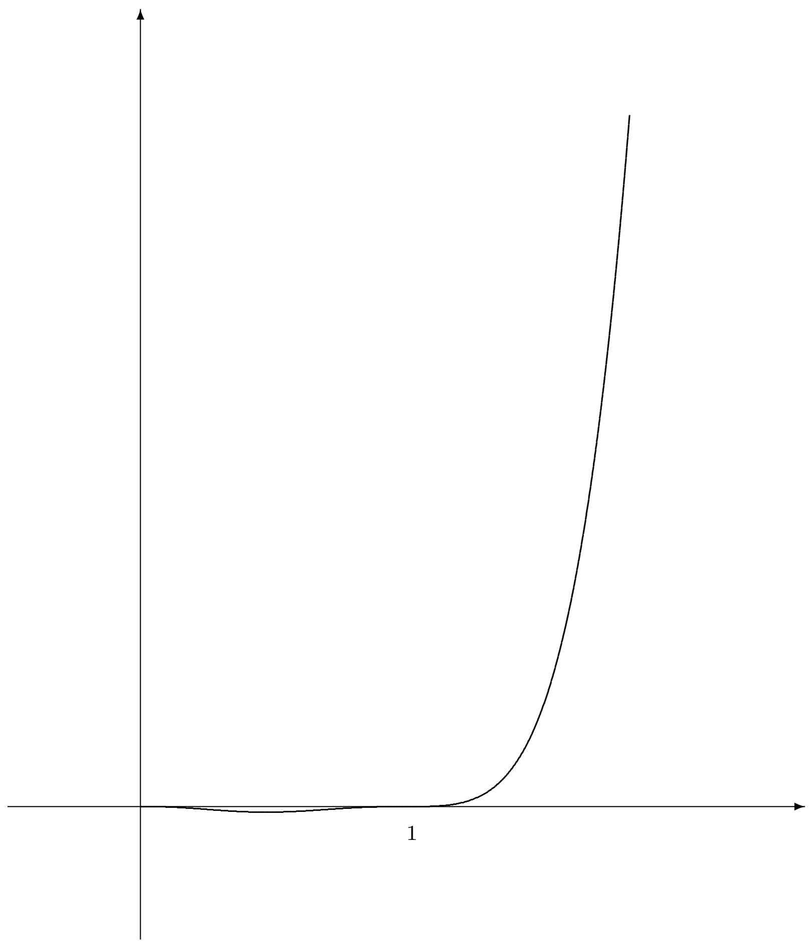
Quindi g è derivabile in 0 e si ha $g'(0) = 0$.

(e) Sia $x \in]0,+\infty[$; si ha
$f''(x) = 12x^2\log^3 x + 12x^3\log^2 x\frac{1}{x} + 9x^2\log^2 x + 6x^3\log x\frac{1}{x} =$
$12x^2\log^3 x + 12x^2\log^2 x + 9x^2\log^2 x + 6x^2\log x =$
$3x^2\log x(4\log^2 x + 7\log x + 2)$.

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$ o $4\log^2 x + 7\log x + 2 = 0$, cioè se e solo se $\log x = 0$ o $\log x = \frac{-7\pm\sqrt{17}}{8}$, cioè se e solo se $x = 1$ o $x = e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}$ o $x = e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}$. Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}} < x < e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}$ o $x > 1$. Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $0 < x < e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}$ o $e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}} < x < 1$.

Quindi f è strettamente convessa su $[e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}, e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}]$ e su $[1,+\infty[$; f è strettamente concava su $]0, e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}]$ e su $[e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}, 1]$. Si ha quindi
$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{\left[e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}, e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}\right], [1,+\infty[\right\}$,
$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset$,
$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{\left]0, e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}\right], \left[e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}, 1\right]\right\}$.

Si ha $f(0) = 1$, $e^{-\frac{3}{4}} \approx .47$, $f\left(e^{-\frac{3}{4}}\right) = e^{-3}\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}e^{-3} \approx -.02$, $e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}} \approx .25$, $f\left(e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}\right) \approx -.01$, $e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}} \approx .70$, $f\left(e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}\right) \approx -.01$.



7. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (2x^2 - 1)e^{|2x+1|} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;
(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
(c) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
(d) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in $-\frac{1}{2}$;
(e) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}$.

(b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Si ha
$$f(x) = \begin{cases} (2x^2-1)e^{2x+1} & \text{per } x \geq -\frac{1}{2} \\ (2x^2-1)e^{-2x-1} & \text{per } x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Supponiamo $x > -\frac{1}{2}$. Si ha
$f'(x) = 4xe^{2x+1} + (2x^2-1)e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}(2x^2+2x-1)$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2x^2+2x-1 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$ se e solo se $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2+2x-1 > 0$, cioè se e solo se $x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ o $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$, se e solo se $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $-\frac{1}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Si ha quindi f strettamente crescente su $[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$ e F strettamente decrescente su $[-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$.

Supponiamo $x < -\frac{1}{2}$. Si ha
$f'(x) = 4xe^{-2x-1} + (2x^2-1)e^{-2x-1} \cdot (-2) = -2e^{-2x-1}(2x^2-2x-1)$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2x^2-2x-1 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$ mai.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2+2x-1 < 0$, cioè se e solo se $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$ mai.

Si ha $f'(x) < 0$ per ogni $x < -\frac{1}{2}$.

Quindi f è strettamente decrescente su $]-\infty, -\frac{1}{2}]$.

Essendo f strettamente decrescente su $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ e su $[-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$, f è strettamente decrescente su $]-\infty, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$.

Si ha quindi
$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty[\right\}, \quad \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{M}(\searrow) = \left\{] = \infty, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]\right\}$.

(d) Si ha
$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+, x>-\frac{1}{2}} f'(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}+, x>-\frac{1}{2}} 2e^{2x+1}(x^2+2x-1) = -3$.

Quindi f è derivabile da destra in $-\frac{1}{2}$ e $f'_+(-\frac{1}{2}) = -3$.

Si ha
$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-, x<-\frac{1}{2}} f'(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}+, x>-\frac{1}{2}} -2e^{-2x-1}(x^2-2x-1) = -1$.

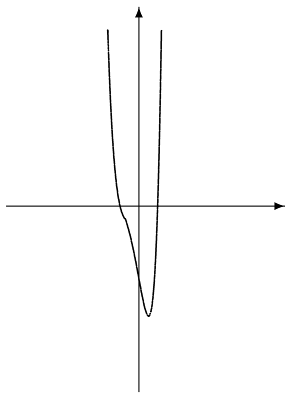
Quindi f è derivabile da sinistra in $-\frac{1}{2}$ e $f'_-(-\frac{1}{2}) = -1$.

Essendo $f'_+(-\frac{1}{2}) \neq f'_-(-\frac{1}{2})$, f non è derivabile in $-\frac{1}{2}$.

(e) Supponiamo $x > -\frac{1}{2}$. Si ha
$f''(x) = 2((4x+2)e^{2x+1} + (2x^2+2x-1)e^{2x+1} \cdot 2) =$
$4e^{2x+1}(2x+1+2x^2+2x-1) = 4e^{2x+1}(2x^2+4x) = 8e^{2x+1}(x^2+2x)$.

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2 + 2x = 0$, cioè se e solo se $x = 0$ o $x = -2$, cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$ se e solo se $x = 0$.
Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2 + 2x > 0$, cioè se e solo se $x < -2$ o $x > 0$, cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$, se e solo se $x > 0$.
Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $-\frac{1}{2} < x < 0$.
Si ha quindi f strettamente convessa su $[0, +\infty[$ e F strettamente concava su $[-\frac{1}{2}, 0]$.
Supponiamo $x < -\frac{1}{2}$. Si ha
$f''(x) = -2((4x - 2)e^{-2x-1} + (2x^2 - 2x - 1)e^{-2x-1} \cdot (-2)) =$
$4e^{-2x-1}(-2x+1+2x^2-2x-1) = 4e^{-2x-1}(2x^2-4x) = 8e^{-2x-1}(x^2-2x)$.
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2 - 2x = 0$, cioè se e solo se $x = 0$ o $x = 2$, cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$ mai.
Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2 - 2x > 0$, cioè se e solo se $x < 0$ o $x > -2$, cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$, sempre.
Si ha $f''(x) < 0$ mai.
Quindi f ̀strettamente convessa su $]-\infty, -\frac{1}{2}]$
Si ha quindi
$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{]-\infty, -\frac{-1}{2}], [0, +\infty[\right\}, \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{[-\frac{1}{2}, 0]\right\}$.

Si ha $e \approx 2.72$, $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0.37$, $f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}) \approx -4.14$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$.



8. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;
(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
(c) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;

(d) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

(e) determinare il prolungamento continuo di $f|]-2,+\infty[$ in -2 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in -2;

(f) studiare la convessitàdi f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f. Per disegnare il grafico di f si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $f(0) \approx 0.61$, $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \approx -4.30$, $f(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}) \approx 8.19$, $\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \approx -0.70$, $f(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}) \approx 0.79$, $-\frac{11}{7} \approx -1.57$, $f(-\frac{11}{7}) \approx 0.25$.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$.

(b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-2+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-2-} f(x) = +\infty$,

(c) Si ha $f(x) \sim_{x\to+\infty} -x$; si ha
$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty}((1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} + x)$.
Per $y \to 0$ si ha
$e^y = 1 + y + \mathrm{o}(y)$.
Quindi per $x \to +\infty$ si ha
$e^{-\frac{1}{2+x}} = 1 - \frac{1}{2+x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})$.
Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left((1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} + x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left((-x+1)\left(1 - \frac{1}{2+x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})\right) + x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x + \frac{x}{2+x} + \mathrm{o}(1) + 1 + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2+x} + \mathrm{o}(1) + 1\right) = 2 \; .$$

Quindi f ammette asintoto per $x \to +\infty$ e l'asintoto è la retta

$$y = -x + 2 \; .$$

Procedendo nello stesso modo, si vede che f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e che l'asintoto è la retta

$$y = -x + 2 \; .$$

(d) Per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$f'(x) = -e^{-\frac{1}{2+x}} + (1-x)e^{-\frac{1}{2+x}}\frac{1}{(2+x)^2} = e^{-\frac{1}{2+x}}\left(\frac{1-x}{(2+x)^2} - 1\right) =$$

$$-e^{-\frac{1}{2+x}}\frac{x^2+5x+3}{(2+x)^2} \; .$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 + 5x + 3 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.
Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2 + 5x + 3 < 0$, cioè se e solo se $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.
Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ o $x > \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.
Si ha quindi f è strettamente crescente su $[\frac{-5-\sqrt{13}}{2}, -2[$ e su $]-2, \frac{-5+\sqrt{13}}{2}]$; f è strettamente decrescente su $]-\infty, \frac{-5-\sqrt{13}}{2}]$ e su $[\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, +\infty[$.
Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ [\frac{-5-\sqrt{13}}{2}, -2[\ ,\ ]-2, \frac{-5+\sqrt{13}}{2}] \right\} ,$$

$$\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset \, .$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \left\{]-\infty, \frac{-5-\sqrt{13}}{2}]\ ,\ [\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, +\infty[\right\} .$$

(e) Il prolungamento continuo di $f|]-2,+\infty[$ in -2 è la funzione

$$g : [-2,+\infty[:\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in]-2,+\infty \\ 0 & \text{per } x = -2 \end{cases} .$$

Si ha

$$\lim_{x\to-2, x\neq-2} g'(x) = \lim_{x\to-2, x\neq-2} \left(-e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2+5x+3}{(2+x)^2} \right) =$$

$$\lim_{x\to-2, x\neq-2} \left(\left(-e^{-\frac{1}{2+x}} \left(-\frac{1}{2-x} \right)^2 \right) (x^2+5x+3) \right) .$$

Si ha

$$\lim_{x\to-2, x\neq-2} \left(-e^{-\frac{1}{2+x}} \left(-\frac{1}{2-x} \right)^2 \right) = \lim_{y\to-\infty} \left(-e^y \, y^2 \right) = 0$$

e

$$\lim_{x\to-2, x\neq-2} (x^2+5x+3) = -3 \, .$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to-2, x\neq-2} g'(x) = 0(-3) = 0 \, .$$

Quindi g è derivabile in -2 e $g'(-2) = 0$.

(f) Per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha
$f''(x) =$
$-\left(e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{1}{(2+x)^2} \frac{x^2+5x+3}{(2+x)^2} + e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{(2x+5)(2+x)^2-2(2+x)(x^2+5x+3)}{(2+x)^4}\right) =$
$-\, e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2+5x+3+(2x+5)(4+4x+x^2)-(4+2x)(x^2+5x+3)}{(2+x)^4} =$
$-\, e^{-\frac{1}{2+x}} \cdot \frac{x^2+5x+3+8x+8x^2+2x^3+20+20x+5x^2-4x^2-20x-12-2x^3-10x^2-6x}{(2+x)^4}$
$= -e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{7x+11}{(2+x)^4}.$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $7x + 11 = 0$, cioè se e solo se $x = -\frac{11}{6}$.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $7x + 11 < 0$, cioè se e solo se $x < -\frac{11}{7}$.

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x > -\frac{11}{7}$.

Quindi f strettamente convessa su $]-\infty.-2[$ e su $]-2,-\frac{11}{7}]$, f è strettamente concava su $[-\frac{11}{7},+\infty[$.

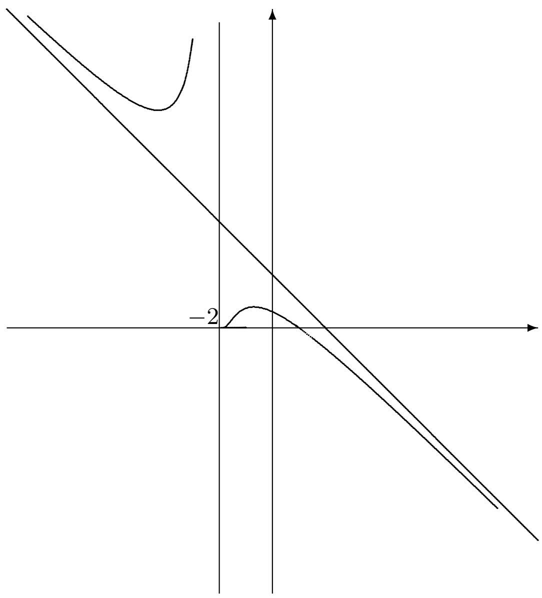
Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{]-\infty,-2[,\ ]-1,-\frac{11}{7}] \right\},$$

$$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset\ ,$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [-\frac{11}{7},+\infty[\right\}\ .$$

Si ha $f(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$, $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \approx -4.30$, $\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \approx 0.70$,
$f(\frac{-5-\sqrt{3}}{2}) = \frac{7+\sqrt{13}}{2} e^{-\frac{2}{1+\sqrt{13}}} \approx 8.19$,
$f(\frac{-5+\sqrt{3}}{2}) = \frac{7-\sqrt{13}}{2} e^{-\frac{2}{1-\sqrt{13}}} \approx 0.79$,
$\frac{-11}{7} \approx -1.57$, $f(\frac{-11}{7}) = \frac{18}{7} e^{-\frac{7}{3}} \approx 0.25$.



9. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1-x)e^{\frac{x}{x+1}} \ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;

(d) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

(e) determinare il prolungamento continuo di $f|]-1,+\infty[$ in -1 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in -1;

(f) studiare la convessitàdi f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f. Per disegnare il grafico di f si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $f(-3) \approx 17.93$, $\frac{3}{5} = 0.6$, $f(-\frac{3}{5}) \approx 0.36$.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$.

(b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-1-} f(x) = +\infty$,

(c) Si ha $f(x) \sim_{x\to+\infty} -ex$; si ha
$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+ex) = \lim_{x\to+\infty}((1-x)e^{\frac{x}{x+1}}+ex) =$
$\lim_{x\to+\infty}((1-x)e^{\frac{x}{x+1}-1+1}+ex) = \lim_{x\to+\infty}((1-x)\,e\,e^{-\frac{1}{x+1}-1+1}+ex)$.
Per $y \to 0$ si ha
$e^y = 1+y+\mathrm{o}(y)$.
Quindi per $x \to +\infty$ si ha
$e^{-\frac{1}{x+1}} = 1-\frac{1}{x+1}+\mathrm{o}(\frac{1}{x})$.
Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left((1-x)\,e\,e^{-\frac{1}{x+1}-1+1}+ex\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left((-x+1)\,e\left(1-\frac{1}{x+1}+\mathrm{o}(\frac{1}{x})\right)+x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-ex+\frac{ex}{x+1}+\mathrm{o}(1)+e+ex\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e\frac{ex}{x+1}+\mathrm{o}(1)\right) = 2e\ .$$

Quindi f ammette asintoto per $x \to +\infty$ e l'asintoto è la retta

$$y = -ex+2e\ .$$

Procedendo nello stesso modo, si vede che f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e che l'asintoto è la retta

$$y = -ex+2e\ .$$

(d) Per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$f'(x) = -e^{\frac{x}{x+1}}+(1-x)e^{\frac{x}{x+1}}\frac{1}{(x+1)^2} = e^{\frac{x}{x+1}}\left(-1+\frac{1-x}{(x+1)^2}\right) =$$

$$-e^{\frac{1}{2+x}}\,\frac{x^2+3x}{(x+1)^2}\ .$$

Si ha $f'(x)=0$ se e solo se $x^2+3x=0$, cioè se e solo se $x=0$ o $x=-3$.
Si ha $f'(x)>0$ se e solo se $x^2+3x<0$, cioè se e solo se $-3<x<0$.
Si ha $f'(x)<0$ se e solo se $x<-3$ o $x>0$.
Si ha quindi f è strettamente crescente su $[-3,-1[$ e su $]-1,0]$; f è strettamente decrescente su $]-\infty,-3]$ e su $[0,+\infty[$.
Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[-3,-1[\ ,\ ]-1,0]\}\ ,$$

$$\mathcal{M}(\to) = \emptyset\ .$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{]-\infty,-3]\ ,\ [0,+\infty[\}\ .$$

(e) Il prolungamento continuo di $f|]-1,+\infty[$ in -1 è la funzione

$$g:[-1,+\infty[:\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in]-1,+\infty \\ 0 & \text{per } x=-1 \end{cases} .$$

Si ha

$$\lim_{x\to -1, x\neq -1} g'(x) = \lim_{x\to -1, x\neq -1} \left(-e^{\frac{x}{x+1}} \frac{x^2+3x}{(x+1)^2}\right) =$$

$$\lim_{x\to -1, x\neq -1} \left(\left(-e^{\frac{x}{x+1}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^2\right) \frac{(x+1)^2}{x^2} \frac{x^2+3x}{(x+1)^2}\right) =$$

$$\lim_{x\to -1, x\neq -1} \left(\left(-e^{\frac{x}{x+1}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^2\right) \frac{x^2+3x}{x^2}\right) .$$

Si ha

$$\lim_{x\to -1, x\neq -1} \left(-e^{-\frac{x}{x+1}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^2\right) = \lim_{y\to -\infty} \left(-e^{y}\, y^2\right) = 0$$

e

$$\lim_{x\to -1, x\neq -1} \frac{x^2+3x}{x^2} = -2 .$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to -2, x\neq -2} g'(x) = 0(-2) = 0 .$$

Quindi g è derivabile in -1 e $g'(-1)=0$.

(f) Per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$f''(x) = -\left(e^{\frac{x}{x+1}} \frac{1}{(x+1)^2} \frac{x^2+3x}{(x+1)^2} + \right.$$

$$\left. e^{\frac{x}{x+1}} \frac{(2x+3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+3x)}{(x+1)^4}\right) =$$

$$-e^{\frac{x}{x+1}} \frac{x^2+3x+(2x+3)(x^2+2x+1)-(2x+2)(x^2+3x)}{(x+1)^4} =$$

$$-e^{-\frac{x}{x+1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{x^2+3x+2x^3+4x^2+2x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-2x^2-6x}{(x+1)^4}$$

$$= -e^{-\frac{x}{x+1}} \frac{5x+3}{(x+1)^4} .$$

Si ha $f''(x)=0$ se e solo se $5x+3=0$, cioè se e solo se $x=-\frac{3}{5}$.
Si ha $f'(x)>0$ se e solo se $5x+3<0$, cioè se e solo se $x<-\frac{3}{5}$.

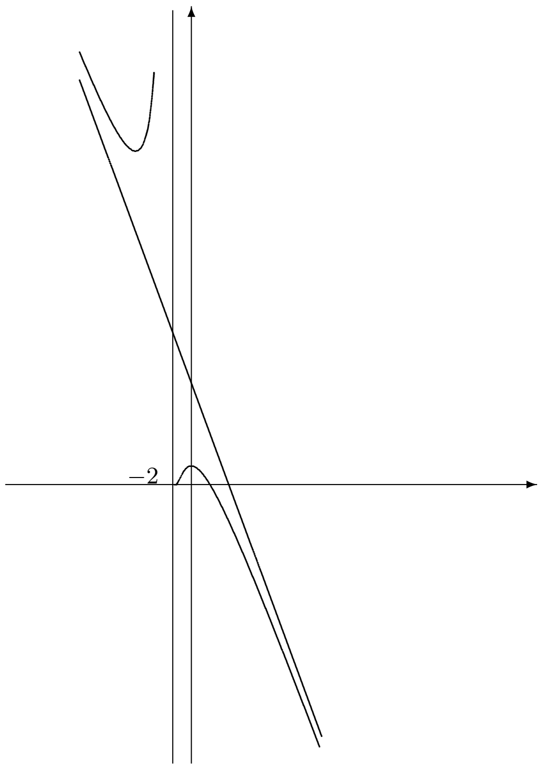
Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x > -\frac{3}{5}$.
Quindi f strettamente convessa su $]-\infty.-1[$ e su $]-1,-\frac{3}{5}]$, f è strettamente concava su $[-\frac{3}{5},+\infty[$.
Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{]-\infty,-1[,\ ]-1,-\frac{3}{5}] \right\},$$

$$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset\ ,$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [-\frac{3}{5},+\infty[\right\}\ .$$

Si ha $f(-3) = 4e^{\frac{3}{2}} \approx 17.93$, $f(0) = 1$, $\frac{3}{5} = 0.6$, $f(-\frac{3}{5}) = \frac{8}{5}e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.36$.



Capitolo 10

Argomento di un numero complesso

10.1 Argomento di un numero complesso

1. **Esercizio.** Trovare un argomento di ciascuno dei seguenti numeri complessi

   (a) $-1-\sqrt{3}i$,

   (b) $-\sqrt{3}-i$,

   esprimendolo senza l'uso di funzioni trascendenti.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $|-1-\sqrt{3}i| = 2$.
   Si ha $-1-\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; il numero reale θ è un argomento di $-1-\sqrt{3}i$ se e solo se $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ e $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; quindi se e solo se $\theta = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.
   Si può quindi scegliere $\theta = -\frac{2}{3}\pi$.

   (b) Si ha $|-\sqrt{3}-i| = 2$.
   Si ha $-\sqrt{3}-i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)\right)$.
   Quindi si ha $-\frac{5}{6}\pi \in \arg(-\sqrt{3}-i)$.

2. **Esercizio.** Trovare un numero complesso z tale che 2 sia un argomento di z.
   Risoluzione. Si può prendere $z = e^{2i}$.

10.2 Radici complesse

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse, esprimendo le soluzioni senza l'uso di funzioni trascendenti:

(a) $z^3 = -27i$;

(b) $z^3 = -27$;

(c) $z^6 = -64i$;

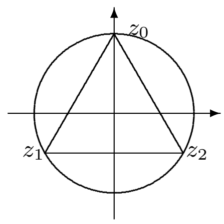
(d) $z^2 = \sqrt{3} + i$;

(e) $z^4 = 20i$;

(f) $z^2 = -\sqrt{3} + i$.

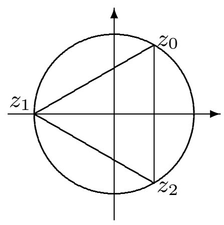
Risoluzione.

(a) Si ha $|-27i| = 27$, $\frac{3}{2}\pi \in \arg(-27i)$. Si ha $\sqrt[3]{27} = 3$ e $\frac{1}{3}\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$.



Si ha quindi
$z_0 = 3i$,
$z_1 = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$,
$z_2 = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$.

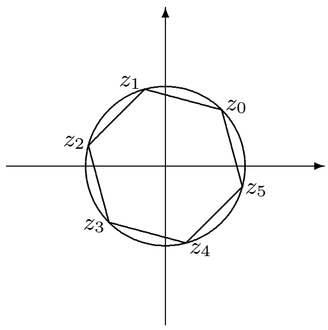
(b) Si ha $|-27| = 27$, $\pi \in \arg(-27)$. Si ha $\sqrt[3]{27} = 3$.



Si ha quindi
$z_0 = 3(\frac{1}{2} + \sqrt{3}2i) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$,
$z_1 = -3$,
$z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$.

(c) Si ha $|-64i| = 64$, $\frac{3}{2}\pi \in \arg(-64i)$. Si ha $\sqrt[6]{64} = 2$ e $\frac{1}{6}\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi$.
Si ha quindi

$$z = 2e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{6})i} = 2e^{(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3})i}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 .$$



Si ha quindi
$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,$
$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2})) =$
$2(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} + i(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4})) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}).$
$z_2 = 2(\cos(\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{3})) =$
$2(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2})) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} + i(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4})) =$
$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + i(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}).$
$z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,$
$z_4 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + i(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}).$
$z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}).$

(d) Si ha $|\sqrt{3} + i| =]\sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$
Si ha $\sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$
Se $t \in \mathbf{R}$, si ha $t \in \arg(\sqrt{3}_i)$ se e solo se

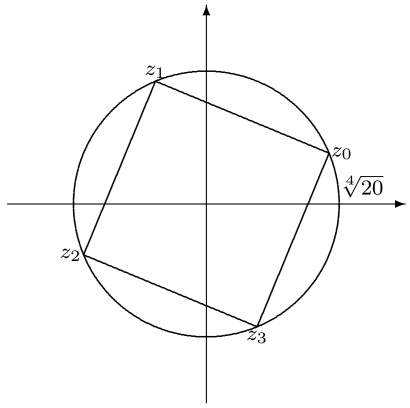
$$\begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Si può scegliere $t = \frac{\pi}{6}$.
Si ha quindi
$z = \pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\right)\right) = \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}\right) =$
$\pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right) \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}\right) =$
$\pm\left(\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})2}{4}} + i\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})2}{4}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right).$
L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\left\{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}},\ -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right\} .$$

(e) Si ha $|20i| = 20$ e $\frac{\pi}{2} \in \arg(20i)$.

Si ha $z_k = \sqrt[4]{20}e^{i(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2})} = \sqrt[4]{20}(\cos(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}))$, per un $k=0,1,2,3$.



Si ha
$z_0 = \sqrt[4]{20}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}) = \sqrt[4]{20}(\cos(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4})) =$
$\sqrt[4]{20}(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{2}}) = \sqrt[4]{20}(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}2}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}) =$
$\sqrt[4]{20}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.
$z_1 = \sqrt[4]{20}(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})$;
$z_2 = \sqrt[4]{20}(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$;
$z_3 = \sqrt[4]{20}(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})$;

(f) Si ha $|-\sqrt{3}+i| = 2$.
Si ha $-\sqrt{3}+i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.
Se $t\in\mathbf{R}$ si ha $t\in\arg(-\sqrt{3}+i)$ se e solo se
$\begin{cases}\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin t = \frac{1}{2}\end{cases}$; si ha quindi $\frac{5}{6}\pi\in\arg(-\sqrt{3}+i)$.
Si ha quindi

$$z = \pm\sqrt{2}\left(\cos(\frac{5}{6}\pi)+i\sin(\frac{5}{6}\pi)\right) =$$

$$\pm\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12})\right) = \pm\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12})\right) =$$

$$\pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}\right) =$$

$$\pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\right) =$$

$$\pm\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right) .$$

2. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse:

   (a) $z^3 = -1-\sqrt{3}i$;

   (b) $z^5 = -\sqrt{3}-i$;

   (c) $z^3 = 7-3i$;

   (d) $z^3 = 5-4i$;

   (e) $z^4 = -5+3i$;

   (f) $z^2 = -5+7i$;

   (g) $z^2 = e^i$;

   (h) $z^3 + iz = 0$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha $|-1-\sqrt{3}i| = 2$ e $-\frac{2}{3}\pi \in \arg(-1-\sqrt{3}i)$; quindi si ha $z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{-\frac{2}{3}+2k\pi}{3}}$ per un $k = 0,1,2$.

   (b) Si ha $|-\sqrt{3}-i| = 2$; si ha $-\sqrt{3}-i = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)$; il numero reale t è un argomento di $-\sqrt{3}-i$ se e solo se $\begin{cases}\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin t = -\frac{1}{2}\end{cases}$; si può scegliere $t = \frac{7}{6}\pi$; quindi si ha $z = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\frac{7}{6}\pi+2k\pi}{5}}$, per un $k = 0,1,2,3,4$.

   (c) Si ha $|7-3i| = \sqrt{58}$ e $-\operatorname{Arctg}\frac{3}{7} \in \arg(7-3i)$; quindi si ha

$$z = \sqrt[6]{58}e^{\frac{-i\operatorname{Arctg}\frac{3}{7}+2k\pi}{3}} , \quad k = 0,1,2 .$$

   (d) Si ha $|5-4i| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ e $-\operatorname{Arctg}\frac{4}{5} \in \arg(5-4i)$; quindi si ha $z = \sqrt[3]{\sqrt{41}}e^{\frac{-\operatorname{Arctg}\frac{4}{5}+2k\pi}{3}i} = \sqrt[6]{41}e^{\frac{-\operatorname{Arctg}\frac{4}{5}+2k\pi}{3}i}$, per un $k = 0,1,2$.

   (e) Si ha $|-5+3i| = \sqrt{34}$ e $-\operatorname{Arctg}\frac{3}{5}+\pi \in \arg(5+3i)$; quindi si ha

$$z = \sqrt[8]{34}e^{i\frac{-\operatorname{Arctg}\frac{3}{5}+\pi+2k\pi}{4}} \text{, per un } k = 0,1,2,3 .$$

   (f) Si ha $|-5+7i| = \sqrt{74}$, $-\operatorname{Arctg}\frac{7}{5}+\pi \in \arg(-5+7i)$; quindi si ha

$$z = \pm\sqrt[4]{74}e^{\frac{-\operatorname{Arctg}\frac{7}{5}+\pi}{2}i} .$$

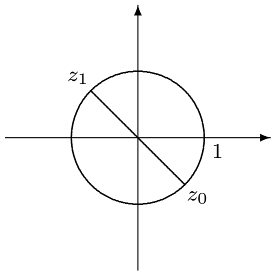
(g) Si ha $|e^i| = 1$ e $1 \in \arg(1)$; quindi si ha

$$z = \pm e^{\frac{1}{2}i} = \pm(\cos\frac{1}{2} + i\sin\frac{1}{2}) \ .$$

(h) Si ha $z^3 + iz = 0$ se e solo se $z(z^2+i) = 0$, cioè se e solo se $z = 0$ o $z^2+i{=}0$, cioè se e solo se $z = 0$ o $z^2 = -i$.

Una soluzione è $z = 0$; le altre sono le soluzioni di $z^2 = -i$.

Si ha $|-i| = 1$ e $-\frac{1}{2}\pi \in \arg(-i)$.



Quindi le soluzioni di $z^2 = -i$ sono

$z = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)$.

Le soluzioni dell'equazione data sono quindi 0, $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$.

3. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

(a) $z^2 - 3z - 4i = 0$;

(b) $z^2 - 5z - 1 = 0$;

(c) $z^2 - 2iz + 4 = 0$.

Risoluzione.

(a) Il polinomio $p(z) = z^2 - 3z - 4i$ ha discriminante Δ tale che $\frac{\Delta}{4} = 1 + 4i$.

Troviamo le radici quadrate di $1 + 4i$.

Si ha $|1 - 4i| = \sqrt{17}$ e $\operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{17}} \in \arg(1 + 4i)$.

Le radici di $1 + 4i$ sono quindi

$\pm\sqrt[4]{17}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) =$

$\pm\sqrt[4]{17}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{17}}}{2}}\right) =$

$\pm\sqrt[4]{17}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{17}}}{2}}\right) = \pm\sqrt[4]{17}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}}}\right) =$

$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}\right)$.

Si ha quindi $z = 1 \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \right)$.
Le soluzioni dell'equazione sono quindi
$z = 1 + \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$
e
$z = 1 - \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$.

(b) Il polinomio $p(z) = z^2 - 5z - i$ ha discriminante $\Delta = 25 + 4i$.
Troviamo le radici quadrate di $25 + 4i$.
Si ha $|1 - 4i| = \sqrt{641}$ e $\operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}} \in \arg(25 + 4i)$.
Le radici di $25 + 4i$ sono quindi
$\pm\sqrt[4]{641} \left(\cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}} \right) + i \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}} \right) \right) =$
$\pm \sqrt[4]{641} \left(\sqrt{\frac{1+\cos \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} \right) =$
$\pm \sqrt[4]{641} \left(\sqrt{\frac{1+\frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} \right) = \pm\sqrt[4]{17} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{641}+25}{2\sqrt{641}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{641}-25}{2\sqrt{641}}} \right) =$
$\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{641}+25}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{641}-25}{2}} \right)$.
Si ha quindi $z = \frac{1}{2} \left(5 \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{641}+25}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{641}-25}{2}} \right) \right)$.
Le soluzioni dell'equazione sono quindi
$z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{641}+25}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{641}-25}{2}}$
e
$z = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{641}+25}{2}} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{641}-25}{2}}$

(c) Il polinomio $p(z) = z^2 - 2iz + 4$ ha discriminante Δ tale che $\frac{\Delta}{4} = -1 - 4 = -5$.
Le radici quadrate di -5 sono $\pm\sqrt{5}i$.
Si ha quindi $z = i \pm \sqrt{5}i$.
Le soluzioni dell'equazione sono quindi
$z = (1 + \sqrt{5}i)$ e $z = (1 - \sqrt{5})i$.

10.3 Logaritmi complessi

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse:

   (a) $e^z = 2 - 7i$;

   (b) $e^z = -3$;

   (c) $e^z = 5e^{-3i}$.

   Risoluzione.

(a) Si ha $|2-7i| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$ e $-\operatorname{Arctg}\frac{7}{2} \in \arg(2-7i))$; quindi si ha $z = \log\sqrt{53} + i(-\operatorname{Arctg}\frac{7}{2} + 2k\pi)$ per un $k \in \mathbf{Z}$.

(b) Si ha $|-3| = 3$ e $\pi \in \arg(-3))$; quindi si ha $z = \log 3 + i(\pi + 2k\pi) = \log 3 + (1+2k)\pi i$ per un $k \in \mathbf{Z}$.

(c) Si ha $|5e^{-3i}| = 5$ e $= 3 \in \arg(5e^{-3i}))$; quindi si ha $z = \log 5 + i(-3 + 2k\pi)$ per un $k \in \mathbf{Z}$.

2. **Esercizio.** Risolvere la seguente equazione complessa:

$$\sin z = 2\ .$$

Risoluzione. L'equazione è equivalente a
$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2$, cioè a
$e^{iz} - e^{-iz} = 4i$, cioè a
$e^{iz} - 4i - e^{-iz} = 0$, cioè a
$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$.

Poniamo $w = e^{iz}$; l'equazione diventa
$w^2 - 4iw - 1 = 0$.

Il discriminante Δ del polinomio $w^2 - 4w - 1$ è tale che $\frac{\Delta}{4} = -5$.

Le radici quadrate di -5 sono $\pm\sqrt{5}i$. Le soluzione dell'equazione $w^2-4iw-1=0$ sono quindi $w = 2i \pm \sqrt{5}i = (2\pm\sqrt{5})i$.

Supponiamo $w = (2+\sqrt{5})i$; si ha
$e^{iz} = (2+\sqrt{5})i$.

Si ha $|(2+\sqrt{5})i = 2+\sqrt{5}$ e $\frac{\pi}{2} \in \arg((2+\sqrt{5})i)$; si ha quindi
$iz = \log(2+\sqrt{5}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, per un $k \in \mathbf{Z}$;
quindi
$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(2+\sqrt{5})i$, per un $k \in \mathbf{Z}$.

Supponiamo $w = (2-\sqrt{5})i$; si ha
$e^{iz} = (2-\sqrt{5})i$.

Si ha $|(2-\sqrt{5})i = \sqrt{5}-2$ e $-\frac{\pi}{2} \in \arg((2-\sqrt{5})i)$; si ha quindi
$iz = \log(\sqrt{5}-2) + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, per un $k \in \mathbf{Z}$;
quindi
$z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(\sqrt{5}-2)i$, per un $k \in \mathbf{Z}$.

L'insieme delle soluzione dell'equazione è quindi

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(2+\sqrt{5})i;\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(\sqrt{5}-2)i\ ; k \in \mathbf{Z}\right\}\ .$$

Capitolo 11

Primitive ed integrali

11.1 Integrali di base

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\int_0^1 \left(\frac{3}{\sqrt{x^2+1}} + 2\operatorname{sh} x + 4\cdot 3^x - \frac{3}{\cos^2 x}\right)\, dx$;

   (b) $\int_2^3 \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + 2\operatorname{ch} x + 4\cdot 5^x - \frac{3}{1+x}\right)\, dx$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha
   $\int_0^1 \left(\frac{3}{\sqrt{x^2+1}} + 2\operatorname{sh} x + 4\cdot 3^x - \frac{3}{\cos^2 x}\right)\, dx =$
   $\left[3\operatorname{Argsh} x + 2\operatorname{ch} x + 4\frac{3^x}{\log 3} - 3\operatorname{tg} x\right]_0^1 =$
   $3\operatorname{Argsh} 1 + 2\operatorname{ch} 1 + \frac{12}{\log 3} - 3\operatorname{th} 1 - 2 - \frac{4}{\log 3} =$
   $3\operatorname{Argsh} 1 + 2\operatorname{ch} 1 + \frac{8}{\log 3} - 3\operatorname{th} 1 - 2.$

   (b) Si ha
   $\int_2^3 \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + 2\operatorname{ch} x + 4\cdot 5^x - \frac{3}{1+x}\right)\, dx =$
   $\left[3\operatorname{Argch} x + 2\operatorname{sh} x + 4\frac{5^x}{\log 5} - 3\log|x+1|\right]_2^3 =$
   $3\operatorname{Argch} 3 + 2\operatorname{sh} 3 + \frac{500}{\log 5} - 3\log 4 - 3\operatorname{Argch} 2 - 2\operatorname{sh} 2 - \frac{100}{\log 5} + 3\log 3 =$
   $3\operatorname{Argch} 3 - 3\operatorname{Argch} 2 + 2\operatorname{sh} 3 - 2\operatorname{sh} 2 + 3\log\frac{3}{4} + \frac{400}{\log 5}.$

2. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x+2 & \text{per } x \leq 2 \\ x^2 & \text{per } x > 2 \end{cases} ;$$

   (a) disegnare il grafico di f;

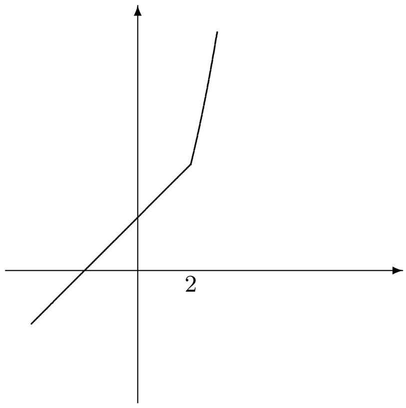
   (b) dimostrare che f è continua;

(c) determinare l'insieme dei punti dove f è derivabile;

(d) calcolare $\int_0^5 f(x)\,dx$.

Risoluzione.

(a)



(b) Per il carattere locale della continuità f è continua su $]=\infty[2\cup]2,+\infty[$.
Si ha
$\lim_{x\to 2-,x\neq 2} f(x) = \lim_{x\to 2-,x\neq 2}(x+2) = 4$.
Si ha
$\lim_{x\to 2+,x\neq 2} f(x) = \lim_{x\to 2+,x\neq 2} x^2 = 4$.
Si ha
$f(2) = 4$.
Quindi f è continua in 2.
Quindi f è continua su $\mathbf{R}$.

(c) Per il carattere locale della derivabilità f è derivabile su $]=\infty[2\cup]2,+\infty[$.
Si ha
$\lim_{x\to 2-,x\neq 2} f'(x) = \lim_{x\to 2-,x\neq 2} 1 = 1$.
Quindi f è derivabile da sinistra in 2 e si ha $f'_-(2) = 1$.
Si ha
$\lim_{x\to 2+,x\neq 2} f'(x) = \lim_{x\to 2+,x\neq 2} 2x = 2$.
Quindi f è derivabile da destra in 2 e si ha $f'_+(2) = 2$.
Essendo $f'_(2) \neq f'_+(2)$, f non è derivabile in 2. $]=\infty[2\cup]2,+\infty[$.

(d) Si ha
$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx = \int_0^2 (x+2)\,dx + \int_2^4 x^2\,dx =$
$\left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2 + 4 + \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{74}{3}$.

11.2 Integrali per decomposizione

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\, dx \ .$$

Risoluzione.

Si ha
$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}\, dx =$
$\int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-(x-1)}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\, dx =$
$\frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(3^{\frac{3}{2}} - 1 - 2^{\frac{3}{2}}) = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1}{3}.$

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(3x)\cos x\, dx \ .$$

Risoluzione. Vale la formula Werner

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) \ .$$

Si ha quindi
$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(3x)\cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}2} \frac{1}{2}(\sin(4x)+\sin(2x))\, dx =$
$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}1\right) =$
$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{2}}{2}.$

11.3 Integrali immediati

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dx;$

   (b) $\int_0^1 x^2\sqrt{3x^3+2}\, dx;$

   (c) $\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}\, dx;$

   (d) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\, dx;$

   (e) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx;$

   (f) $\int_0^1 x\sin x^2\, dx;$

   (g) $\int_0^1 x^2\sin x^3\, dx;$

(h) $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$;

(i) $\int_0^1 \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$;

(j) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+\mathrm{tg}^2\, x}{\mathrm{tg}\, x}\,dx$;

(k) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

(l) $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$.

Risoluzione.

(a) Si ha
$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

(b) Si ha
$\int_0^1 x^2\sqrt{3x^3+2}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^1 (3x^3+2)^{\frac{1}{2}}(9x^2)\,dx = \frac{1}{9}\left[\frac{(3x^3+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{27}(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{27}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$.

(c) Si ha
$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}\,dx = \int_0^1 (x^2+x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+1)\,dx = \left[\frac{(x^2+x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2\left[\sqrt{x^2+x+3}\right]_0^1 = 2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

(d) Si ha
$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 (x^2+2)^{-\frac{1}{2}}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \sqrt{11}-\sqrt{2}$.

(e) Si ha
$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = -\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})\,dx = \left[e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -(e^{\frac{1}{2}}-e) = e-\sqrt{e}$.

(f) Si ha
$\int_0^1 x\sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\sin x^2)(2x)\,dx = \frac{1}{2}[-\cos x^2]_0^1 = \frac{1}{2}(\cos 0 - \cos 1) = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$.

(g) Si ha
$\int_0^1 x^2\sin x^3\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (\sin x^3)(3x^2)\,dx = \frac{1}{3}[-\cos x^3]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 1$.

(h) Si ha
$\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}[e^{-x^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

(i) Si ha
$\int_0^1 \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+\sin^2 x}(2\sin x\cos x)\,dx = \frac{1}{2}[\log(1+\sin^2 x)]_0^1 = \frac{1}{2}\log(1+\sin^2 1)$.

(j) Si ha
$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+\mathrm{tg}^2\, x}{\mathrm{tg}\, x}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}(1+\mathrm{tg}^2\, x)\,dx = [\log \mathrm{tg}\, x]_{\frac{1}{2}}^1 = \log \mathrm{tg}\, 1 - \log \mathrm{tg}\, \frac{1}{2} = \log \frac{tg1}{\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}}$.

(k) Si ha
$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2.$

(l) Si ha
$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{1+(x^4)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+(x^4)^2}4x^3\,dx = \frac{1}{4}\left[\operatorname{Arctg} x^4\right]_0^1 =$
$\frac{1}{4}\operatorname{Arctg} 1 = \frac{1}{4}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$

11.4 Funzione integrale

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x} t\sqrt{1+t}\,dt}{e^{x^2}-1} .$$

Risoluzione. Il limite è della forma $\frac{0}{0}$; per il teorema di De l'Hospital si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x} t\sqrt{1+t}\,dt}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sqrt{1+2x}\cdot 2}{e^{x^2}2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+2x}}{e^{x^2}} = 2 .$$

11.5 Integrazione per sostituzione

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{x(\log x+2)}\,dx .$$

Risoluzione. Si ha

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{x(\log x+2)}\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{\log x+2}\,\frac{1}{x}\,dx .$$

Integriamo
per sostituzione calcolando $\int_u^v f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ attraverso $\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(y)\,dy$; come funzione $\varphi(x)$ consideriamo la funzione $\log x$; poniamo dunque $y = \log x$; per $x = \frac{1}{e}$ si ha $y = -1$; per $x = e$, si ha $y = 1$; si ha quindi

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{\log x+2}\,\frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{|y|}{y+2}\,dy =$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{|y|}{y+2}\,dy + \int_0^1 \frac{|y|}{y+2}\,dy =$$

$$\int_{-1}^{0} -\frac{y}{y+2}\,dy + \int_0^1 \frac{y}{y+2}\,dy =$$

$$-\int_{-1}^{0} \frac{y+2-2}{y+2}\, dy + \int_{0}^{1} \frac{y+2-2}{y+2}\, dy =$$

$$-\int_{-1}^{0} \left(1 = \frac{2}{y+2}\right) dy + \int_{0}^{1} \left(1 = \frac{2}{y+2}\right) dy =$$

$$-\left[y - 2\log(y+2)\right]_{-1}^{0} + \left[y - 2\log(y+2)\right]_{0}^{1} =$$

$$-(-2\log 2 + 1) + 2 - 2\log 4 + 2\log 2 = 2\log 2 - 1 + 2 - 4\log 2 + 2\log 2 = 1\ .$$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\, dx$;

   (b) $\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$;

   (c) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$;

   (d) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx$.

   Risoluzione.

   (a) Poniamo $\sqrt{x+1} = t$; si ha $x+1 = t$, $x = t^2 - 1$, $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 0$ si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha $t = \sqrt{2}$; si ha quindi
   $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\, dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{t^2-1+2} 2t\, dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2+1}\, dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\, dt =$
   $2\int_1^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{t^2+1})\, dt = 2[t - \operatorname{Arctg} t]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - \operatorname{Arctg}\sqrt{2} - 1 + \frac{\pi}{4})$.

   (b) Poniamo $\sqrt{x} = t$; si ha $x = t^2$; si ha $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 1$ si ha $t = 1$; per $x = 2$ si ha $t = \sqrt{2}$.
   Si ha quindi
   $\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+t} 2t\, dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{1+t})\, dt = 2[t - \log(1+t)]_1^{\sqrt{2}} =$
   $2(\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2}) - 1 + \log 2)$.

   (c) Poniamo $\sqrt{x} = t$; si ha $x = t^2$ e $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 0$ si ha $t = 0$; per $x = 2$ si ha $t = \sqrt{2}$; quindi si ha
   $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t+1} 2t\, dt = 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^3}{t+1}\, dt$.
   Attraverso la divisione $t^3 : (t+1)$ si trova $t^3 = (t+1)(t^2 - t + 1) - 1$; quindi si ha
   $\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$.
   Si ha quindi $2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^3}{t+1}\, dt = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$
   $2\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \log(1+t)\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 - 2 + 2\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2}) =$
   $\frac{4}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 - \log *1 + \sqrt{2}) = \frac{10}{3}\sqrt{2} - 2 - \log(1+\sqrt{2})$.

   (d) Poniamo $e^x = t$; si ha $x = \log t$; si ha $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$; per $x = 0$ si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha $t = e$.

Si ha quindi
$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)}\,dt$.
Siano $A, B \in \mathbf{R}$ tali che
$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$,
per ogni $t \in \mathbf{R} - \{0, -1\}$. Si ha
$1 = A(t+1) + Bt$,
per ogni $t \in \mathbf{R}$. Dando a t il valore 0 si trova $A = 1$; dando a t il valore -1 si trova $-1 = B$, cioè $B = -1$. Quindi si ha
$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.
Quindi si ha
$\int_1^e \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int_1^e (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1})\,dt = [\log t - \log(t+1)]_1^e = 1 - \log(e+1) + \log 2$.

3. **Esercizio.** Sia $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow t^2$; sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continua; calcolare $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, sapendo che $f(\varphi(t)) = t$, per ogni $t \in \mathbf{R}$.

   Risoluzione. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha $\varphi'(t) = 2t$; quindi si ha
   $\int_0^4 f(x)\,dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} f(x)\,dx = \int_0^2 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_0^2 t2t\,dt = 2\int_0^2 t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 =$
   $\frac{2}{3}8 = \frac{16}{3}$.

11.6 Integrazione per parti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$;

   (b) $\int_0^1 x\sin(2x)\,dx$;

   (c) $\int_1^2 x\log x\,dx$;

   (d) $\int_0^1 x \operatorname{Arctg} x\,dx$;

   (e) $\int_0^1 \operatorname{Arctg}(2x)\,dx$;

   (f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}(2x)\,dx$;

   (g) $\int_0^1 (x+2)^3\cos(2x+1)\,dx$;

   (h) $\int_1^2 \log\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)\,dx$;

   (i) $\int_0^1 \log\frac{1+x}{3+x}\,dx$;

   (j) $\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \operatorname{Arctg}(2x)\,dx$;

   (k) $\int_0^1 \operatorname{Argsh}(2x)\,dx$.

   Risoluzione.

(a) Si ha
$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}$.

(b) Si ha
$\int_0^1 x\sin(2x)\,dx = \left[x\left(-\cos(2x)\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 -\cos(2x)\frac{1}{2}\,dx =$
$\left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^1 =$
$\left[-\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\cos 2 + \frac{1}{4}\sin 2$.

(c) Si ha
$\int_1^2 x\log x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx =$
$\left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\log 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\log 2 - \frac{3}{4}$.

(d) Si ha
$\int_0^1 x\,\mathrm{Arctg}\,x\,dx = [\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{Arctg}\,x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$
$[\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{Arctg}\,x]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2})\,dx = [\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{Arctg}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctg}\,x]_0^1 =$
$\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctg}\,1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctg}\,1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

(e) Si ha
$\int_0^1 \mathrm{Arctg}(2x)\,dx = [x\,\mathrm{Arctg}(2x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}\,dx =$
$[x\,\mathrm{Arctg}(2x)]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{8x}{1+4x^2}\,dx =$
$[x\,\mathrm{Arctg}(2x)]_0^1 - \frac{1}{4}\left[\log(1+4x^2)\right]_0^1 =$
$\mathrm{Arctg}\,2 - \frac{1}{4}\log 5$.

(f) Si ha
$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{Arcsin}(2x)\,dx = [x\,\mathrm{Arcsin}(2x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$
$[x\,\mathrm{Arcsin}(2x)]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x)^{-\frac{1}{2}}(-8x)\,dx =$
$[x\,\mathrm{Arcsin}(2x)]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\left[\frac{(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[x\,\mathrm{Arcsin}(2x) + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} =$
$\frac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}\,1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

(g) Si ha

$$\int_0^1 (x+2)^3\cos(2x+1)\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}\sin(2x+1)(x+2)^3\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\sin(2x+1)3(x+2)^2\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}(x+2)^3\sin(2x+1)\right]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 (x+2)^2\sin(2x+1)\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}(x+2)^3\sin(2x+1)\right]_0^1 -$$

$$\frac{3}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+1)(x+2)^2\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}\cos(2x+1)2(x+2)\,dx\right) =$$

$$\left[\frac{1}{2}(x+2)^3\sin(2x+1)+\frac{3}{4}(x+2)^2\right]_0^1-\frac{3}{2}\int_0^1(x+2)\cos(2x+1)\,dx=$$

$$\left[\frac{1}{2}(x+2)^3\sin(2x+1)+\frac{3}{4}(x+2)^2\right]_0^1-$$

$$\frac{3}{2}\left(\left[\frac{1}{2}\sin(2x+1)(x+2)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}\sin(2x+1)\,dx\right)=$$

$$\left[\frac{1}{2}(x+2)^3\sin(2x+1)+\frac{3}{4}(x+2)^2-\frac{3}{4}(x+2)\sin(2x+1)\right]_0^1-$$

$$+\frac{3}{4}\int_0^1\sin(2x+1)\,dx=$$

$$\left[\frac{1}{2}(x+2)^3\sin(2x+1)+\frac{3}{4}(x+2)^2\right.$$

$$\left.-\frac{3}{4}(x+2)\sin(2x+1)-\frac{3}{8}\cos(2x+1)\right]_0^1=$$

$$\frac{27}{2}\sin 3+\frac{27}{4}\cos 3-\frac{9}{4}\sin 3-\frac{3}{8}\cos 3-4\sin 1-3\cos 1+\frac{3}{2}\sin 1+\frac{3}{8}\cos 1=$$

$$\frac{45}{4}\sin 3+\frac{51}{8}\cos 3-\frac{5}{2}\sin 1-\frac{21}{8}\cos 1\ .$$

(h) Si ha

$$\int_1^2\log\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\,dx=\int_1^2\log\frac{1+x^2}{x^2}\,dx=$$

$$\left[x\log\frac{1+x^2}{x^2}\right]_1^2-\int_1^2 x\frac{x^2}{1+x^2}\,\frac{2xx^2-2x(1+x^2}{x^4}\,dx=$$

$$\left[x\log\frac{1+x^2}{x^2}\right]_1^2-\int_1^2\frac{2x^3-2x-2x^3}{x(1+x^2)}\,dx=$$

$$\left[x\log\frac{1+x^2}{x^2}\right]_1^2+2\int_1^2\frac{1}{1+x^2}\,dx=\left[x\log\frac{1+x^2}{x^2}+2\,\mathrm{Arctg}\,x\right]_1^2=$$

$$2\log\frac{5}{4}+2\,\mathrm{Arctg}\,2-\log 2-2\,\mathrm{Arctg}\,1=2\,\mathrm{Arctg}\,2+\log\frac{25}{32}-\frac{\pi}{2}\ .$$

(i) Tendendo conto dei calcoli che seguiranno, integriamo per parti scegliendo come primitiva di 1 la funzione $x+1$; si ha

$$\int_0^1\log\frac{1+x}{3+x}\,dx=$$

$$\left[(x+1)\log\frac{1+x}{3+x}\right]_0^1-\int_0^1(x+1)\frac{3+x}{1+x}\,\frac{3+x-(1+x)}{(3+x)^2}\,dx=$$

$$\left[(x+1)\log\frac{1+x}{3+x}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{3+x}\,dx =$$

$$\left[(x+1)\log\frac{1+x}{3+x} - 2\log(3+x)\right]_0^1 =$$

$$2\log\frac{1}{2} - 2\log 4 - \log\frac{1}{3} + 2\log 3 = -6\log 2 + 3\log 3 = 3\log\frac{3}{4}\ .$$

(j) Si ha
$\int_0^{\frac{1}{2}} x^3\,\mathrm{Arctg}(2x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\,\mathrm{Arctg}(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}x^4\frac{1}{1+(2x)^2}2\,dx =$
$\left[\frac{1}{4}x^4\,\mathrm{Arctg}(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 1}{1+4x^2}\,dx.$
Eseguendo la divisione $x^4 : (4x^2+1)$ si trova $x^4 = (4x^2+1)(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{16}) + \frac{1}{16}$.
Si ha quindi
$\frac{x^4 1}{1+4x^2} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{16}) + \frac{\frac{1}{16}}{1+4x^2}.$
Si ha quindi
$\left[\frac{1}{4}x^4\,\mathrm{Arctg}(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 1}{1+4x^2}\,dx =$
$\left[\frac{1}{4}x^4\,\mathrm{Arctg}(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{16}) + \frac{1}{16}\frac{1}{1+4x^2}\right)\,dx =$
$\left[\frac{1}{4}x^4\,\mathrm{Arctg}(2x) - \frac{1}{8}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{32}x\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{32}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+(2x)^2}2\,dx\frac{1}{2} =$
$\left[\frac{1}{4}x^4\,\mathrm{Arctg}(2x) - \frac{1}{8}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{32}x\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{32}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+(2x)^2}2\,dx\frac{1}{2} =$
$\left[\frac{1}{4}x^4\,\mathrm{Arctg}(2x) - \frac{1}{8}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{32}x - \frac{1}{64}\,\mathrm{Arctg}(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} =$
$\frac{1}{4}\frac{1}{16}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{24}\frac{1}{8} + \frac{1}{32}\frac{1}{2} - \frac{1}{64}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{64} - \frac{1}{192} = \frac{2}{192} = \frac{1}{96}.$

(k) Si ha $\int_0^1 \mathrm{Argsh}(2x)\,dx =$
$[x\,\mathrm{Argsh}(2x)]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx =$
$[x\,\mathrm{Argsh}(2x)]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 (1+4x^2)^{-\frac{1}{2}}8x\,dx =$
$[x\,\mathrm{Argsh}(2x)]_0^1 - \frac{1}{4}\left[\frac{(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 =$
$\left[x\,\mathrm{Argsh}(2x) - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}\right]_0^1 =$
$\mathrm{Argsh}\,1 - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}.$

11.7 Integrazione delle funzioni razionali

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\,dx;$

   (b) $\int_0^1 \frac{1}{3x^2+1}\,dx;$

   (c) $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}\,dx;$

(d) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx$;

(e) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$;

(f) $\int_1^2 \frac{x+4}{x^4+x^2}\,dx$;

(g) $\int_1^2 \frac{x+3}{x^4+x^3}\,dx$;

(h) $\int_1^2 \frac{1}{x^3+2x^2}\,dx$;

(i) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}\,dx$.

Risoluzione.

(a) Si ha
$\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Si ha
$\int_0^1 \frac{1}{3x^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1}\sqrt{3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctg}(\sqrt{3}x)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\,\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}$.

(c) Eseguendo la divisione $x^2 : (x+1)$ si trova $x^2 = (x+1)(x-1)+1$. Quindi si ha $\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$. Quindi si ha
$\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^2 (x-1+\frac{1}{x+1})\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1|\right]_0^2 = 2-2+\log 3 = \log 3$.

(d) Si ha
$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1-\frac{2}{x+1}$.
Quindi si ha $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx = \int_0^1 (1-\frac{2}{x+1})\,dx = [x-2\log(x+1)]_0^1 = 1-2\log 2$.

(e) Si ha $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$.
Quindi esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che
$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$;
quindi si ha $1 = A(x-1)+B(x-2)$.
Per $x=1$ si trova $1=-B$; quindi $B=-1$. Per $x=2$ si trova $1=A$. Quindi si ha
$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$.
Si ha quindi
$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\,dx = [\log|x-2|-\log|x-1|]_{-1}^0 = \log 2 - \log 3 + \log 2 = 2\log 2 - \log 3$.

(f) Si ha $x^4+x^2 = x^2(x^2+1)$.
Quindi esistono $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ tali che
$\frac{x+4}{x^4+x^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$.
Si ha $x+4 = Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2$.
Per $x=0$ si trova $4=B$; quindi $B=4$.

Quindi
$x+4 = Ax(x^2+1)+4(x^2+1)+(Cx+D)x^2$, quindi
$-4x^2+x = Ax(x^2+1)+(Cx+D)x^2$, quindi
$(-4x+1)x = Ax(x^2+1)+(Cx+D)x^2$, quindi
$-4x+1 = A(x^2+1)+(Cx+D)x$.
Per $x=0$ si trova $1=A$; quindi $A=1$.
Quindi
$-4x+1 = x^2+1+(Cx+D)x$, quindi
$-x^2-4x = (Cx+D)x$, quindi
$(-x-4)x = (Cx+D)x$, quindi
$-x-4 = Cx+D$, quindi
$C=-1$, $D=-4$.
Quindi si ha
$\frac{x+4}{x^4+x^2} = \frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{x+4}{x^2+1}$.
Si ha quindi
$\int_1^2 \frac{x+4}{x^4+x^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{x+4}{x^2+1}\right)dx =$
$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}-4\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$
$\left[\log x-\frac{4}{x}-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-4\operatorname{Arctg} x\right]_1^2 =$
$\log 2-2-\frac{1}{2}\log 5-4\operatorname{Arctg} 2+4+\frac{1}{2}\log 2+4\operatorname{Arctg} 1 =$
$\frac{3}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log 5+2-4\operatorname{Arctg} 2+\pi = \frac{1}{2}\log\frac{8}{5}+2-4\operatorname{Arctg} 2+\pi$.

(g) Si ha $x^4+x^3 = x^3(x+1)$.
Quindi esistono $A,B,C,D\in\mathbf{R}$ tali che
$\frac{x+3}{x^4+x^3} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1}$.
Si ha $x+3 = Ax^2(x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)+Dx^3$.
Per $x=0$ si trova $3=C$; quindi $C=3$.
Quindi
$x+3 = Ax^2(x+1)+Bx(x+1)+3(x+1)+Dx^3$, quindi
$-2x = Ax^2(x+1)+Bx(x+1)+Dx^3$, quindi
$-2 = Ax(x+1)+B(x+1)+Dx^2$.
Per $x=0$ si trova $-2=B$; quindi $B=-2$.
Quindi
$-2 = Ax(x+1)-2(x+1)+Dx^2$, quindi
$2x = Ax(x+1)+Dx^2$, quindi
$2 = A(x+1)+Dx$.
Per $x=0$ si trova $2=A$; quindi $A=2$.
Per $x=1$ si trova $2=-D$; quindi $D=-2$.
Quindi si ha
$\frac{x+3}{x^4+x^3} = \frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x+1}$.
Si ha quindi
$\int_1^2 \frac{x+3}{x^4+x^3}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x+1}\right)dx =$
$\left[2\log x+\frac{2}{x}-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}+2\log(x+1)\right]_1^2 =$

$2\log 2 + 1 - \frac{3}{8} - 2\log 3 - 2 + \frac{3}{2} + 2\log 2 =$
$\frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 5 + 2 - 4\operatorname{Arctg} 2 + \pi = 4\log 2 - 2\log 3 + \frac{1}{8} = 2\log\frac{4}{3} + \frac{1}{8}$.

(h) Si ha $x^3 + 2x^2 = x^2(x+2)$.
Quindi esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che
$\frac{1}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$.
Si ha $1 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2$, per ogni $x \in \mathbf{R}$.
Per $x = 0$ si trova $1 = 2B$; quindi $B = \frac{1}{2}$.
Per $x = -2$ si trova $1 = 4B$; quindi $C = \frac{1}{4}$.
Quindi
$1 = Ax(x+2) + \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{4}x^2$, quindi
$4 = 4Ax^2(x+1) + 2x + 4 + x^2$, quindi
$-x^2 - 2x = 4Ax(x+2)$; quindi
. $-x(x+2) = 4Ax(x+2)$; quindi
. $-1 = 4A$; $A = -\frac{1}{4}$.
Quindi si ha
$\frac{1}{x^3+2x^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x} - +\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+2}$.
Si ha quindi
$\int_1^2 \frac{1}{x^3+2x^2}\,dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{x} - +\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+2}\right)\,dx =$
$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(x+2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\log\frac{x+2}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^2 =$
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\log 2 - -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 3 + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{3}{2}$.

(i) Si ha
$\frac{x^2+1}{x^2+3x+2}\,dx = \frac{x^2+3x+2-3x-2+1}{x^2+3x+2}\,dx = 1 - \frac{3x+1}{x^2+3x+2}\,dx$.
Si ha
$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$.
Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che
$\frac{3x+1}{x^2+3x+2}\,dx = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$.
Si ha
$3x + 1 = A(x+2) + B(x+1)$.
Per $x = -1$ si ha $-2 = A$; quindi $A = -2$.
Per $x = -2$ si ha $-5 = -B$; quindi $B = 5$.
Si ha quindi $\frac{3x+1}{x^2+3x+2}\,dx = -\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x+2}$.
Si ha quindi $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x+2}\right)\,dx =$
$[x + 2\log(x+1) - 5\log(x+2)]_0^1 = 1 + 2\log 2 - 5\log 3 + 5\log 2 =$
$1 - 5\log 3 + 7\log 2$.

11.8 Integrazione di alcune funzioni irrazionali

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

(a) $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx$;

(b) $\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$;

(c) $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$;

(d) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$;

(e) $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x^2+3x+1)\sqrt{2x+1}}\,dx$;

(f) $\int_0^4 \frac{2x-x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$;

Risoluzione.

(a) Poniamo $\sqrt{x-1}=t$. Si ha $x-1=t^2$; quindi $x=1+t^2$; quindi $\frac{dx}{dt}=2t$. Per $x=2$ si ha $t=1$; per $x=3$ si ha $t=\sqrt{2}$.
Si ha quindi
$\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(1+t^2)^2}{t} 2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(1+2t^2+t^4\right)\,dt =$
$2\left[t+\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\left(\sqrt{2}+\frac{2}{3}2\sqrt{2}+\frac{1}{5}4\sqrt{2}-1-\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right) =$
$2\left(\frac{47}{15}\sqrt{2}-\frac{28}{15}\right) = \frac{94}{15}\sqrt{2}-\frac{56}{15}$.

(b) Poniamo $\sqrt[4]{x}=t$. Si ha $x=t^4$; quindi $\frac{dx}{dt}=4t^3$. Per $x=1$ si ha $t=1$; per $x=16$ si ha $t=2$.
Si ha quindi
$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t}4t^3\,dt = 4\int_1^2 \frac{t^2}{t+1}\,dt.$
Eseguendo la divisione $t^2 : (t+1)$ si trova
$t^2=(t-1)(t+1)+1$.
Si ha quindi
$\frac{t^2}{t+1} = t-1+\frac{1}{t+1}$.
Si ha quindi $4\int_1^2 \frac{t^2}{t+1}\,dt = 4\int_1^2 \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\,dt =$
$4\left[\frac{1}{2}t^2-t+\log(t+1)\right]+1^2 =$
$4\left(2-2+\log 3-\frac{1}{2}+1-\log 2\right) =$
$4\left(\frac{1}{2}+\log\frac{3}{2}\right) = 2+4\log 32.$

(c) Poniamo $\sqrt[6]{x}=t$. Si ha $x=t^6$; quindi $\frac{dx}{dt}=6t^5$. Per $x=1$ si ha $t=1$; per $x=64$ si ha $t=2$.
Si ha quindi
$\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t^3+t^2}6t^5\,dt = 6\int_1^2 \frac{t^3}{t+1}\,dt.$
Eseguendo la divisione $t^3 : (t+1)$ si trova
$t^3=(t^2-t+1)(t+1)-1$.
Si ha quindi
$\frac{t^3}{t+1} = t^2-t+1-\frac{1}{t+1}$.
Si ha quindi $6\int_1^2 \frac{t^3}{t+1}\,dt = 6\int_1^2 \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\,dt =$
$6\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\log(t+1)\right]+1^2 =$
$6\left(\frac{8}{3}-2+2-\log 3-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+\log 2\right) =$
$6\left(\frac{11}{6}+\log\frac{2}{3}\right) = 11+6\log 23.$

(d) Poniamo $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = t$. Risulta $\frac{x}{x+1} = t^2$; quindi $x = xt^2 + t^2$; quindi $x(1-t^2) = t^2$; quindi $x = \frac{t^2}{1-t^2}$.
Si ha quindi
$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t(1-t^2)+2tt^2}{(1-t^2)^2} = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \ .$$
Per $x = 0$ si ha $t = 0$; per $x = 1$ si ha $t = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
Si ha quindi
$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} t \frac{2t}{(1-t^2)^2}\, dt = 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\, dt$.
Si ha $(t^2-1)^2 = (t-1)^2(t+1)^2$.
Esistono A, B, C, D tali che
$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} \ .$$
Si ha
$t^2 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t-1)^2(t+1) + D(t-1)^2$.
Per $t = 1$ si ha $1 = 4B$; quindi $B = \frac{1}{4}$.
Per $t = -1$ si ha $1 = 4D$; quindi $D = \frac{1}{4}$.
Si ha quindi
$t^2 = A(t-1)(t+1)^2 + \frac{1}{4}(t+1)^2 + C(t-1)^2(t+1) + \frac{1}{4}(t-1)^2$; quindi
$4t^2 = 4A(t-1)(t+1)^2 + t^2 + 2t + 1 + 4C(t-1)^2(t+1) + t^2 - 2t + 1$; quindi
$2(t^2-1) = 4A(t-1)(t+1)^2 + 4C(t-1)^2(t+1)$; quindi
$2 = 4A(t+1) + 4C(t-1)$; quindi
$1 = 2A(t+1) + 2C(t-1) =$.
Per $t = 1$ si ha $1 = 4A$; quindi $A = \frac{1}{4}$.
Per $t = -1$ si ha $1 = -4C$; quindi $C = -\frac{1}{4}$.
Si ha quindi
$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(t+1)^2} \ .$$
Si ha quindi
$2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\, dt = 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{4}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(t+1)^2}\right) dt =$
$\frac{1}{2}\left[\log|t-1| - \frac{1}{t-1} - \log|t+1| - \frac{1}{t+1}\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} =$
$\frac{1}{2}\left(\log|\sqrt{\frac{1}{2}} - 1| - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}-1} - \log|\sqrt{\frac{1}{2}} + 1| - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}+1} + \frac{1}{-1} + 1\right) =$
$\frac{1}{2}\left(\log\left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| - \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} - \log\left|\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) =$
$\frac{1}{2}\left(\log\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right| - \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}-2}{1-2}\right) = \frac{1}{2}\left(\log(1-\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\right) =$
$\log(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2}$.

(e) Poniamo $\sqrt{2x+1}-t$.

Si ha $2x+1=t^2$; quindi $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$.

Si ha $\frac{dx}{dt}=t$.

Per $x=0$, si ha $t=1$; per $x=\frac{3}{2}$, si ha $t=2$.

Si ha quindi

$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x^2+3x+1)\sqrt{2x+1}}\,dx=\int_1^2 \frac{1}{\left(2\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2+3\frac{t^2-1}{2}+1\right)t}t\,dt=$

$\int_1^2 \frac{1}{\frac{t^4-2t^2+1}{2}+\frac{3t^2-3}{2}+1}\,dt=\int_1^2 \frac{2}{t^4-2t^2+1+3t^2-3+2}\,dt=2\int_1^2 \frac{2}{t^4+t^2}\,dt.$

Si ha $t^4+t^2=t^2(t^2+1)$.

Esistono $A,B,C,B\in\mathbf{R}$ tali che

$\frac{1}{t^2(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$.

Si ha

$1=At(t^2+1)+B(t^2+1)+(Ct+D)t^2$, per ogni $t\in\mathbf{R}$.

Per $t=0$, si ha $1=B$; cioè $B=1$.

Si ha quindi

$1=At(t^2+1)+t^2+1+(Ct+D)t^2$; quindi

. $-t^2=At(t^2+1)+(Ct+D)t^2$; quindi

. $-t=A(t^2+1)+(Ct+D)t$, per ogni $t\in\mathbf{R}$.

Per $t=0$, si ha $0=A$; cioè $A=0$.

Si ha quindi

$-t=(Ct+D)t$; quindi

. $-1=Ct+D$; quindi

$C=0$, $D=-1$.

Si ha quindi

$\frac{1}{t^2(t^2+1)}=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}$.

Si ha quindi

$2\int_1^2 \frac{2}{t^4+t^2}\,dt=2\int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left[-\frac{1}{t}-\operatorname{Arctg} t\right]_1^2 t=$

$2\left(-\frac{1}{2}-\operatorname{Arctg}2+1+\operatorname{Arctg}1\right)=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\operatorname{Arctg}2\right)=\frac{\pi}{2}+1-2\operatorname{Arctg}2.$

(f) Poniamo $\sqrt{x}=t$.

Si ha $x=t^2$.

Si ha $\frac{dx}{dt}=2t$.

Per $x=0$, si ha $t=0$; per $x=4$, si ha $t=2$.

Si ha quindi

$\int_0^4 \frac{2x-x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx=\int_1^2 \frac{2t^2-t^3}{t+1}2t\,dt=2\int_1^2 \frac{-t^4+2t^2}{t+1}\,dt.$

Eseguendo la divisione $(-t^4+2t^2):(t+1)$ si trova

$-t^4+t^2=(t+1)(-t^3+3t^2-3t+3)$.

Si ha quindi

$$\frac{-t^4+t^2}{t+1}=-t^3+3t^2-3t+3-\frac{3}{t+1}\,.$$

Si ha quindi

$$2\int_0^2 \frac{-t^4+t^2}{t+1}\,dt = 2\int_0^2 \left(-t^3+3t^2-3t+3-\frac{3}{t+1}\right)dt =$$

$$2\left[-\frac{1}{4}t^4+t^3-\frac{3}{2}t^2+3t-3\log(t+1)\right]_0^2 = 2\left(-4+8-6+6-3\log 3\right) =$$

$$2\left(4-3\log 3\right) = 8-6\log 3\ .$$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\int_0^1 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$;

   (b) $\int_1^{2\,\mathrm{sh}\,1} \sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\,dx$;

   (c) $\int_2^{2\,\mathrm{ch}\,1} \sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\,dx$;

   Risoluzione.

   (a) Poniamo $x = 2\sin t$; si ha $\frac{dx}{dt} = 2\cos t$. Per $x = 0$ possiamo scegliere $t = 0$; per $x = 1$ possiamo scegliere $t = \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}$.
   Si ha quindi
   $\int_0^1 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\frac{4\sin^2 t}{4}}\,2\cos t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt =$
   $2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} |\cos t|\cos t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt =$
   $2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos(2t))\,dt = \left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$
   $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

   (b) Poniamo $x = 2\,\mathrm{sh}\,t$; si ha $\frac{dx}{dt} = 2\,\mathrm{ch}\,t$. Per $x = 0$ possiamo scegliere $t = 0$; per $x = 2\,\mathrm{sh}\,1$ possiamo scegliere $t = 1$.
   Si ha quindi
   $\int_0^{2\,\mathrm{sh}\,1} \sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{4\,\mathrm{sh}^2 t}{4}}\,2\,\mathrm{ch}\,t\,dt = 2\int_0^1 \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}\,\mathrm{ch}\,t\,dt =$
   $2\int_0^1 \sqrt{\mathrm{ch}^2 t}\,\mathrm{ch}\,t\,dt = 2\int_0^1 \mathrm{ch}^2 t\,dt = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(2t)+1}{2} = \int_0^1 (\mathrm{ch}(2t)+1)\,dt =$
   $\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(2t)+t\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2+1$.

   (c) Poniamo $x = 2\,\mathrm{ch}\,t$; si ha $\frac{dx}{dt} = 2\,\mathrm{sh}\,t$. Per $x = 2$ si ha $2 = 2\,\mathrm{ch}\,t$; quindi $\mathrm{ch}\,t-1$; possiamo quindi scegliere $t = 0$; per $x = 2\,\mathrm{ch}\,1$ si ha $2\,\mathrm{ch}\,t = 2\,\mathrm{ch}\,2$; quindi $\mathrm{ch}\,t = \mathrm{ch}\,2$; possiamo scegliere $t = 1$.
   Si ha quindi
   $\int_2^{2\,\mathrm{ch}\,1} \sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{4\,\mathrm{ch}^2 t}{4}-1}\,2\,\mathrm{sh}\,t\,dt = 2\int_0^1 \sqrt{\mathrm{ch}^2 t-1}\,\mathrm{sh}\,t\,dt =$
   $2\int_0^1 \sqrt{\mathrm{sh}^2 t}\,\mathrm{sh}\,t\,dt = 2\int_0^1 |\,\mathrm{sh}\,t|\,\mathrm{sh}\,t\,dt = 2\int_0^1 \mathrm{sh}^2 t\,dt = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(2t)-1}{2} =$
   $\int_0^1 (\mathrm{ch}(2t)-1)\,dt = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(2t)-t\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2-1$.

11.9 Integrazione di alcune funzioni trascendenti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\int_0^1 \frac{3-e^x}{1+e^{2x}}\,dx$;

   (b) $\int_0^1 \frac{5+e^x}{12-7e^x+e^{2x}}\,dx$;

   (c) $\int_0^1 \frac{1}{1+2^x}\,dx$;

   (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$;

   (e) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x+2}\,dx$;

   (f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{2+\cos(2x)}\,dx$.

   Risoluzione.

   (a) Poniamo $e^x = t$. Risulta $x = \log t$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$; per $x = 0$, si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha $t = e$.
   Si ha quindi
   $\int_0^1 \frac{3-e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^e \frac{3-t}{1+t^2}\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{3-t}{t(1+t^2)}\,dt$.
   Esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che
   $\frac{3-t}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$.
   Si ha
   $3 - t = A(t^2 + 1) + (Bt + C)t$;
   per $t = 0$ si ha $3 = A$; quindi $A = 3$.
   Si ha quindi
   $3 - t = 3(t^2 + 1) + (Bt + C)t$, cioè
   $-3t^2 - t = (Bt + C)t$, cioè
   $(-3t - 1)t = (Bt + C)t$, cioè
   $-3t - 1 = Bt + C$;
   si ha quindi $B = -3$ e $C = -1$.
   Si ha quindi
   $\frac{3-t}{t(1+t^2)} = \frac{3}{t} - \frac{3t+1}{t^2+1}$.
   Si ha quindi
   $\int_1^e \frac{3-t}{t(1+t^2)}\,dt = \int_1^e \left(\frac{3}{t} - \frac{3t+1}{t^2+1}\right)dt = \int_1^e \left(\frac{3}{t} - \frac{3t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$
   $\int_1^e \left(\frac{3}{t} - \frac{3}{2}\frac{1}{t^2+1}(2t) - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \left[3\log t - \frac{3}{2}\log(t^2+1) - \operatorname{Arctg} t\right]_1^e =$
   $3 - \frac{3}{2}\log(e^2+1) - \operatorname{Arctg} e + \frac{3}{2}\log 2 + \operatorname{Arctg} 1 = 3 + \frac{3}{2}\log\frac{2}{e^2+1} - \operatorname{Arctg} e + \frac{\pi}{4}$.

   (b) Poniamo $e^x = t$. Risulta $x = \log t$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$; per $x = 0$, si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha $t = e$.
   Si ha quindi
   $\int_0^1 \frac{5+e^x}{12-7e^x+e^{2x}}\,dx = \int_1^e \frac{5+t}{12-7t+t^2}\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{t+5}{t(t^2-7t+12)}\,dt$.
   Si ha $t^2 - 7t + 12 = (t-3)(t-4)$.

Si ha quindi
$\frac{t+5}{t(t^2-7t+12)} = \frac{t+5}{t(t-3)(t-4)}$.
Esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che
$\frac{t+5}{t(t-3)(t-4)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-4}$.
Si ha
$t + 5 = A(t-3)(t-4) + Bt(t-4) + Ct(t-3)$.
Per $t = 0$ si ha $5 = 12A$; quindi $A = \frac{5}{12}$.
Per $t = 3$ si ha $8 = -3B$; quindi $B = -\frac{8}{3}$.
Per $t = 4$ si ha $9 = 4C$; quindi $C = -\frac{9}{4}$.
Si ha quindi
$\frac{5+t}{t(t-3)(t-4)} = \frac{5}{12}\frac{1}{t} - \frac{8}{3}\frac{1}{t-3} + \frac{9}{4}\frac{1}{t-4}$.
Si ha quindi
$\int_1^e \frac{t+5}{t(t^2-7t+12)}\, dt = \int_1^e \left(\frac{5}{12}\frac{1}{t} - \frac{8}{3}\frac{1}{t-3} + \frac{9}{4}\frac{1}{t-4}\right) dt =$
$\left[\frac{5}{12}\log|t| - \frac{8}{3}\log|t-3| + \frac{9}{4}\log|t-4|\right]_1^e =$
$\frac{5}{12} - \frac{8}{3}\log(3-e) + \frac{9}{4}\log(4-e) + \frac{8}{3}\log 2 - \frac{9}{4}\log 2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3}\log\frac{2}{3-e} + \frac{9}{4}\log\frac{4-e}{3}$.

(c) Poniamo $2^x = t$.
Si ha $x = \log_2 t$.
Si ha $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\log 2}\frac{1}{t}$.
Per $x = 0$, si ha $t = 1$; per $x = 1$, si ha $t = 2$.
Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2^x}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{1+t}\frac{1}{\log 2}\frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{\log 2}\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\, dt\ .$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}\ .$$

Si ha

$$1 = A(t+1) + Bt\ ,$$

per ogni $t \in \mathbf{R}$.
Per $t = 0$ si ha $1 = A$; quindi $A = 1$. Per $t = 1$ si ha $1 = -B$; quindi $B = -1$.
Si ha quindi

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\ .$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{\log 2}\int_0^2 \frac{1}{t(t+1)}\, dt = \frac{1}{\log 2}\int_0^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$\frac{1}{\log 2}\left[\log t - \log(t+1)\right]_1^2 = \frac{1}{\log 2}\left(\log 2 - \log 3 + \log 2\right) =$$

$$\frac{1}{\log 2}\left(2\log 2 - \log 3\right) = 2 - \frac{\log 3}{\log 2}\ .$$

(d) Poniamo $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.
Si ha $x = 2\operatorname{Arctg} t$.
Si ha $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$.
Per $x = 0$, si ha $t = 0$; per $x = \frac{\pi}{2}$, si ha $t = 1$.
Si ha $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{1-t^2}1+t^2}\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$-2\int_0^1 \frac{1}{t^2-2t-1}\,dt\ .$$

Si ha $t^2 - 2t - 1 = 0$ se e solo se $t = 1 \pm \sqrt{2}$; si ha quindi $t^2 - 2t - 1 = (t-(1+\sqrt{2}))(t-(1-\sqrt{2}))$.
Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{(t-(1+\sqrt{2}))(t-(1-\sqrt{2}))} = \frac{A}{t-(1+\sqrt{2})} + \frac{B}{t-(1-\sqrt{2})}\ .$$

Si ha

$$1 = A(t-(1-\sqrt{2})) + B(t-(1+\sqrt{2}))\ ,$$

per ogni $t \in \mathbf{R}$.
Per $t = 1-\sqrt{2}$ si ha $1 = B(1-\sqrt{2}-1-\sqrt{2}$; quindi $1 = -2\sqrt{2}B$; quindi $B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Per $t = 1+\sqrt{2}$ si ha $1 = A(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}$; quindi $1 = 2\sqrt{2}A$; quindi $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
Si ha quindi

$$\frac{1}{(t-(1+\sqrt{2}))(t-(1-\sqrt{2}))} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{t-(1+\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{t-(1-\sqrt{2})}\ .$$

Si ha quindi

$$-2\int_0^1 \frac{1}{t^2-2t-1}\,dt =$$

$$-2\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{t-1-\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{t-1+\sqrt{2})}\right)dt =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\log|t-1-\sqrt{2}|-\log|t-1+\sqrt{2}|\right]_0^1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\log\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right|\right]_0^1=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left|\frac{-1-\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2=\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)\ .$$

(e) Poniamo $\operatorname{tg} x = t$.
Si ha $x = \operatorname{Arctg} t$.
Si ha $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$.
Si ha $\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{1}{t^2+1}$.
Per $x = 0$, si ha $t = 0$; per $x = 1$, si ha $t = \operatorname{tg} 1$.
Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x+2}\,dx=\int_0^{\operatorname{tg}1}\frac{t}{\frac{1}{t^2+1}+2}\frac{1}{t^2+1}\,dt=\int_0^{\operatorname{tg}1}\frac{t}{1+2t^2+2}\,dt=$$

$$\int_0^{\operatorname{tg}1}\frac{t}{2t^2+3}\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{tg}1}\frac{4t}{2t^2+3}\,dt=\frac{1}{4}\left[\log(2t^2+3\right]_0^{\operatorname{tg}1}=$$

$$\frac{1}{4}(\log(2\operatorname{tg}^2 1+3)-\log 3)=\frac{1}{4}\log\left(\frac{2}{3}\operatorname{tg}^2 1+1\right)\ .$$

(f) Poniamo $\operatorname{tg} x = t$.
Si ha $x = \operatorname{Arctg} t$.
Si ha $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$.
Per $x = 0$, si ha $t = 0$; per $x = \frac{\pi}{4}$, si ha $t = 1$.
Per le formule parametriche si ha $\cos(2x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
Si ha quindi
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{2+\cos(2x)}\,dx = \int_0^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)}\,dt.$
Esistono $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ tali che
$\frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+3} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$.
Si ha
$1 - t^2 = (At + B)(t^2 + 1) + (Ct + D)(t^2 + 3)$.
Si ha quindi
$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=-1 \\ A+3C=0 \\ B+3D=1 \end{cases}.$
Si ha quindi
$A = 0$, $C = 0$, $D = 1$, $B = -2$.
Si ha quindi
$\frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+3}$.

Si ha quindi
$\int_0^1 \frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+3}\, dt =$
$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt - \frac{2}{3}\left(\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dt\right)\sqrt{3} =$
$\left[\operatorname{Arctg} t - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{6} = \pi\left(\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{9}\right).$

11.10 Integrali di vario tipo

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\int_1^2 x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx;$

   (b) $\int_1^2 \log\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\, dx;$
   (Si può utilizzare la formula
   $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\, dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c\,,$
   dove $p^2 - 4q < 0$.)

   (c) $\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{1+\log x}}{x \log x}\, dx.$

   (d) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x \cos x|}{\sin x + 2}\, dx;$

   (e) $\int_0^{\frac{1}{2}\log 6} \frac{e^{4x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}\, dx.$

   Risoluzione.

   (a) Si ha
   $\int_1^2 x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx = \int_1^2 x \log \frac{x+1}{x}\, dx =$
   $\left[\frac{1}{2}x^2 \log \frac{x+1}{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \frac{x}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\, dx =$
   $\left[\frac{1}{2}x^2 \log \frac{x+1}{x}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x}{x+1}\, dx =$
   $\left[\frac{1}{2}x^2 \log \frac{x+1}{x}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1}\, dx =$
   $\left[\frac{1}{2}x^2 \log \frac{x+1}{x}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\, dx =$
   $\left[\frac{1}{2}x^2 \log \frac{x+1}{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log(x+1)\right]_1^2 = 2\log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 =$
   $2\log 3 - 2\log 2 - \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\log 3 - 2\log 2 + \frac{1}{2} = \log\frac{\sqrt{27}}{4} + \frac{1}{2} = \log\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}.$

   (b) Si ha
   $\int_1^2 \log\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\, dx = \int_1^2 \, dx =$
   $\left[x \log \frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 x \frac{x^2}{1+x^3} \frac{3x^2x^2 - 2x(1+x^3)}{x^4}\, dx =$
   $\left[x \log \frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3x^4 - 2x(1+x^3)}{(1+x^3)x}\, dx =$
   $\left[x \log \frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3x^3 - 2 - 2x^3)}{1+x^3}\, dx =$
   $\left[x \log \frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3-2}{1+x^3}\, dx =$

$\left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^3+1-3}{1+x^3}\,dx=$
$\left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2-\int_1^2\left(1-\frac{3}{1+x^3}\right)\,dx=$
$\left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}-x\right]_1^2+3\int_1^2\frac{1}{1+x^3}\,dx.$
Si ha
$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$
Esistono $A,B,C\in\mathbf{R}$ tali che
$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$
Si ha
$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1);$
per $x=-1$ si ha $1=3A$; quindi $A=\frac{1}{3}$.
Si ha quindi
$1=\frac{1}{3}(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1);$
quindi $3=x^2-x+1+3(Bx+C)(x+1);$
quindi $-x^2+x+2=3(Bx+C)(x+1);$
quindi $-(x+1)(x-2)=3(Bx+C)(x+1);$
quindi $-x+2=3Bx+3C;$
quindi $\begin{cases}3B=-1\\3C=2\end{cases};$
quindi $B=-\frac{1}{3}$, $A=\frac{2}{3}$.
Si ha quindi $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}.$
Si ha quindi
$\left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}-x\right]_1^2+3\int_1^2\frac{1}{1+x^3}\,dx=$
$\left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}-x\right]_1^2+3\int_1^2\left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)\,dx=$
$\left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}-x+\log(x+1)\right]_1^2-\int_1^2\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx=$
$\left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}-x+\log(x+1)-\log\sqrt{x^2-x+1}-\frac{-3}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_1^2=$
$2\log\frac{9}{4}-2+\log\frac{3}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\operatorname{Arctg}\sqrt{3}-\log 2+1-\log 2-\sqrt{3}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=$
$\frac{9}{2}\log 3-6\log 2-1+\sqrt{3}\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\frac{\pi}{6}=\log\frac{81\sqrt{3}}{64}-1+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$

(c) Si ha
$\int_e^{e^3}\frac{\sqrt{1+\log x}}{x\log x}\,dx=\int_e^{e^3}\frac{\sqrt{1+\log x}}{\log x}\frac{1}{x}\,dx.$
Posto $t=\log x$, si ha
$\int_e^{e^3}\frac{\sqrt{1+\log x}}{\log x}\frac{1}{x}\,dx=\int_1^3\frac{\sqrt{1+t}}{t}\,dt.$
Poniamo $\sqrt{1+t}=u$; si ha $1+t=u^2$; quindi $t=u^2-1$; quindi $\frac{dt}{du}=2u$.
Per $t=1$, si ha $u=\sqrt{2}$; per $t=3$, si ha $u=2$.
Si ha quindi
$\int_1^3\frac{\sqrt{1+t}}{t}\,dt=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{u}{u^2-1}\,2u\,du=2\int_{\sqrt{2}}^2\frac{u^2}{u^2-1}\,du=2\int_{\sqrt{2}}^2\frac{u^2-1+1}{u^2-1}\,du=$
$2\int_{\sqrt{2}}^2\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)\,du.$

Si ha
$u^2 - 1 = (u-1)(u+1)$.
Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che
$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$.
Si ha
$1 = A(u+1) + B(u-1)$.
Per $u = 1$, si ha $1 = 2A$; quindi $A = \frac{1}{2}$.
Per $u = -1$, si ha $1 = B(-2)$; quindi $B = -\frac{1}{2}$.
Si ha quindi
$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{u+1}$.
Si ha quindi
$2\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right) du = 2\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{u+1}\right) du =$
$\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = [2u + \log(u-1) - \log(u+1)]_{\sqrt{2}}^{2} =$
$\left[2u + \log\frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = 4 + \log\frac{1}{3} - 2\sqrt{2} - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} =$
$4 - \log 3 - 2\sqrt{2} - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

(d) Si ha
$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x\cos x|}{\sin x + 2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{|\sin x\cos x|}{\sin x + 2}\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x\cos x|}{\sin x + 2}\, dx =$
$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} -\frac{\sin x\cos x}{\sin x + 2}\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\cos x}{\sin x + 2}\, dx =$
$-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin x}{\sin x + 2}\cos x\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + 2}\cos x\, dx$.
Posto nei due integrali $\sin x = y$, si ha
$-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin x}{\sin x + 2}\cos x\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + 2}\cos x\, dx =$
$-\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \frac{y}{y+2}\, dy + \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y}{y+2}\, dy =$
$-\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \frac{y+2-2}{y+2}\, dy + \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y+2-2}{y+2}\, dy =$
$-\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \left(1 = \frac{2}{y+2}\right) dy + \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1 = \frac{2}{y+2}\right) dy =$
$-\left[y - 2\log|y+2|\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} + \left[y - 2\log|y+2|\right]_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$
$-\left(-2\log 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\log\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\log\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\log 2 =$
$2\log 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\log\frac{4-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\log\frac{4+\sqrt{2}}{2} + 2\log 2 =$
$4\log 2 - 2\log(4-\sqrt{2}) + 2\log 2 - 2\log(4+\sqrt{2}) + 2\log 2 =$
$8\log 2 - 2\log 14 = 8\log 2 - 2\log 2 - 2\log 7 = 6\log 2 - 2\log 7 = \log\frac{64}{49}$.

(e) Poniamo $\sqrt{3 + e^{2x}} = t$; si ha $3 + e^{2t} = t^2$; quindi $e^{2x} = t^2 - 3$; quindi $2x = \log(t^2 - 3)$; quindi $x = \frac{1}{2}\log(t^2 - 3)$. Si ha quindi
$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{t^2-1}2t = \frac{t}{t^2-2}$.
Per $x = 0$ si ha $t = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.Per $x = \frac{1}{2}\log 6$ si ha $x = \sqrt{3 + e^{\log 6}} = \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$.Si ha $e^{4x} = (e^{2x})^2 = (t^2 - 3)^2$.

Si ha quindi
$\int_0^{\frac{1}{2}\log 6} \frac{e^{4x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}\,dx = \int_2^3 \frac{(t^2-3)^2}{t}\frac{t}{t^2-3}\,dt = \int_2^3 (t^2-3)\,dt =$
$\left[\frac{1}{3}t^3 - 3t\right]_2^3 = 9 - 9 - \frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3}$.

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx\ .$$

Risoluzione. Risolviamo l'esercizio in due modi

(a) Primo modo: per sostituzione.
Poniamo $\sqrt{x} = t$; si ha $x = t^2$; quindi $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 1$ si ha $t = 1$; per $x = 4$ si ha $t = 2$.
Si ha quindi
$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t(1+t^2)}2t\,dt = 2\int_1^2 \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\left[\operatorname{Arctg} t\right]_1^2 =$
$2(\operatorname{Arctg} 2 - \operatorname{Arctg} 1) = 2(\operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{4}) = 2\operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{2}$.

(b) Secondo modo: come integrale immediato.
Si ha
$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{1+x}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^4 \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\left[\operatorname{Arctg}\sqrt{x}\right]_1^4 =$
$2(\operatorname{Arctg} 2 - \operatorname{Arctg} 1) = 2(\operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{4}) = 2\operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{2}$.

3. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos x\,dx\ .$$

Risoluzione. Risolviamo l'esercizio in due modi

(a) Primo modo: come integrale immediato.
Si ha
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x\cos x\,dx =$
$-\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(-\sin x)\,dx = -2\left[\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}(0-1) = \frac{2}{3}$.

(b) Secondo modo: per decomposizione, usando le formule di Werner.
Vale la formula Werner

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\ .$$

Si ha quindi
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\sin(3x) + \sin x)\,dx =$
$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos(3x) - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos(\frac{3}{2}\pi) - \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{1}{2}\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

4. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1-2^x}{1+2^x}\,dx\ .$$

Risoluzione. Risolviamo l'esercizio in due modi

(a) Primo modo: integrazione per sostituzione.
Poniamo $2^x = t$; si ha $x = \log_2 t$; quindi $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t\log 2}$; per $x = 0$ si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha $t = 2$.
Si ha quindi
$\int_0^1 \frac{1-2^x}{1+2^x}\,dx = \int_1^2 \frac{1-t}{1+t}\frac{1}{t\log 2}\,dt = \frac{1}{\log 2}\int_1^2 \frac{1-t}{t(t+1)}\,dt.$
Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che
$\frac{1-t}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}.$
Si ha
$1 - t = A(t + 1) + Bt.$
Per $t = 0$ si ha $1 = A$; quindi $A = 1$. Per $t = -1$ si ha $2 = -B$; quindi $B = -2$.
Si ha quindi
$\frac{1-t}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t+1}.$
Si ha quindi
$\frac{1}{\log 2}\int_1^2 \frac{1-t}{t(t+1)}\,dt = \frac{1}{\log 2}\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t+1}\right)\,dt = \frac{1}{\log 2}\left[\log t - 2\log(t+1)\right]_1^2 =$
$\frac{1}{\log 2}\left[\log\frac{t}{(t+1)^2}\right]_1^2 = \frac{1}{\log 2}\left(\log\frac{2}{9} - \log\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\log 2}\log\frac{8}{9} =$
$\frac{1}{\log 2}(3\log 2 - 2\log 3) = 3 - 2\frac{\log 3}{\log 2}.$

(b) Secondo modo: per decomposizione e come integrale immediato.
Si ha
$\int_0^1 \frac{1-2^x}{1+2^x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+2^x-2\cdot 2^x}{1+2^x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - 2\frac{2^x}{1+2^x}\right)\,dx =$
$\int_0^1 dx - 2\frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{1}{1+2^x}2^x\log 2\,dx = \left[x - 2\frac{1}{\log 2}\log(1+2^x)\right]_0^1 =$
$1 - \frac{2}{\log 2}\log 3 + \frac{2}{\log 2}\log 2 = 3 - 2\frac{\log 3}{\log 2}.$

5. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx\ .$$

Risoluzione. Risolviamo l'esercizio in due modi

(a) Primo modo: integrazione per sostituzione.
Poniamo $\sqrt{e^x - 1} = t$; si ha $e^x - 1 = t^2$; quindi $e^x = t^2 + 1$; quindi ha $x = \log(t^2 + 1)$; quindi $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2+1}$; per $x = \log 2$ si ha $t = 1$; per $x = \log 5$ si ha $t = 2$.

Si ha $e^{2x} = (t^2+1)^2$.
Si ha quindi
$\int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{(t^2+1)^2}{t}\frac{2t}{t^2+1}\,dt = 2\int_1^2 (t^2+1)\,dt = 2\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_1^2 =$
$2\left(\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{20}{3}$.

(b) Secondo modo: per decomposizione e come integrale immediato.
Si ha
$\int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}-e^x+e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^x(e^x-1)+e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx =$
$\int_{\log 2}^{\log 5} \left(\frac{e^x(e^x-1)}{\sqrt{e^{2x}-1}} + \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\right)\,dx =$
$\int_{\log 2}^{\log 5} \left((e^x-1)^{\frac{1}{2}}e^x + (e^x-1)^{-\frac{1}{2}}e^x\right)\,dx =$
$\left[\frac{(e^x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{(e^x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{\log 2}^{\log 5} = 2\left[\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}(e^x-1)^{\frac{1}{2}}\right]_{\log 2}^{\log 5} =$
$3\left(\frac{8}{3}+2-\frac{1}{-}1\right) = \frac{20}{3}$.

Capitolo 12

Sviluppi in serie

12.1 Limiti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{Arctg} x}{\sin x (1 - \operatorname{ch} x)}$;

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{Arctg} x - x}$;

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2\cos x}{(\sqrt{1+x} - 1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2}$;

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{Arctg} x - x)^2}{\operatorname{Arctg} x^4 \operatorname{tg} x}$;

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x})^3}{1 - \cos x^3}$;

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3}{\log(1+x^5)}$;

   (g) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{\log(1+x^2)}$;

   (h) $\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-\cos x)^2}$;

   (i) $\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2}{(x - \operatorname{sh} x) \sin x}$.

   (j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x}\,\sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x)}{1 - \cos(2x)}$.

   (k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \log(1_2 x)} - e^x}{1 - \cos(3x)}$.

   (l) $\lim_{x\to 0} \frac{x \log(1+x) - 2(1-\cos x) + \frac{1}{2} x^3}{(1 - \cos \sin x)^2}$.

   (m) $\lim_{x\to +0} \frac{\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)}$.

   (n) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x - x^2) \sin(x + 2x^2) - \log(1 + x^2 + x^3)}{1 - \cos x^2}$.

   Risoluzione.

(a) Si ha
$\frac{x-\operatorname{Arctg} x}{\sin x(1-\operatorname{ch} x)} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x(-\frac{x^2}{2})} = -\frac{2}{3}..$
Quindi si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{Arctg} x}{\sin x(1-\operatorname{ch} x)} = -\frac{2}{3}\ .$$

(b) Si ha
$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\operatorname{sh} x - \sin x = \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \sim_{x\to 0} \frac{1}{3}x^3$,
$\operatorname{Arctg} x - x \sim_{x\to 0} -\frac{1}{3}x^3$,
$\frac{\operatorname{sh} x-\sin x}{\operatorname{Arctg} x - x} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{-\frac{1}{3}x^3} = -1.$
Quindi si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x - x} = -1\ .$$

(c) Si ha $(\sqrt{1+x}-1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2 \sim_{x\to 0} (\frac{1}{2}x)^2 x^2 = \frac{1}{4}x^4$,
$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\operatorname{sh} x \sin x = x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + \mathrm{o}(x^4) = x^2 + \mathrm{o}(x^4)$,
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$2\cos x = 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$\operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2\cos x = x^2 - 2 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4) = \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0} \frac{1}{12}x^4$,
$\frac{\operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2\cos x}{(\sqrt{1+x}-1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{1}{3}.$
Quindi si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2\cos x}{(\sqrt{1+x}-1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2} = \frac{1}{3}\ .$$

(d) Si ha $\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{Arctg} x - x)^2}{\operatorname{Arctg} x^4 \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(-\frac{1}{3}x^3)^2}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{9}x = 0.$

(e) Si ha per $x \to 0$
$1 - \cos x^3 \sim_{x\to 0} \frac{1}{2}(x^3)^2 = \frac{1}{2}x^6.$
Si ha
$\operatorname{Arctg} x = x + \mathrm{o}(x^2)$;
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x)$;
$x\sqrt{1+x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$;
$\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x} = x + \mathrm{o}(x^2) - x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) \sim_{x\to 0} -\frac{1}{2}x^2.$
$(\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x})^3 \sim_{x\to 0} -\frac{1}{8}x^6$;

$\frac{\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x}}{1-\cos x^3} \sim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{8}x^6}{\frac{1}{2}x^6} = -\frac{1}{4}.$
Quindi si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x}}{1-\cos x^3} = -\frac{1}{4}\ .$$

(f) Si ha
$\log(1+x^5) \sim_{x\to 0} x^5$.
Si ha
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\sin x \operatorname{sh} x = x^2 + \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{36}x^4 + \mathrm{o}(x^4) = x^2 + \mathrm{o}(x^4)$,
$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x = x^3 - \frac{1}{3}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$,
$\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3 = -\frac{1}{3}x^5 + \mathrm{o}(x^5) \sim_{x\to 0} -\frac{1}{3}x^5$.
Quindi si ha
$\frac{\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3}{\log(1+x^5)} \sim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^5}{x^5} = -\frac{1}{3}$.
Quindi si ha
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3}{\log(1+x^5)} = -\frac{1}{3}$.

(g) Si ha:
$\log(1+x^2) \sim_{x\to 0} x^2$;
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x)$;
$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x)$; quindi
$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x) = x + \mathrm{o}(x) \sim_{x\to 0} x$; quindi
$\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{\log(1+x^2)} \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$.
Quindi si ha $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{\log(1+x^2)} = 1$.

(h) Si ha:
$1 - \cos x \sim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2$; quindi
$(1-\cos x)^2 \sim_{x\to 0} \frac{1}{4}x^4$;
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$\sqrt{1-x^2} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \binom{\frac{1}{2}}{2}(-x^2)^2 + \mathrm{o}(x^4) == 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
quindi
$\cos x - \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \mathrm{o}(x^4) == \frac{1}{6}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0} \frac{1}{6}x^4$; quindi
$\frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-\cos x)^2} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{2}{3}$.
Quindi si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-\cos x)^2} = \frac{2}{3}$.

(i) Si ha:
$(x - \operatorname{sh} x)\sin x \sim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{6}x^3\right) x = -\frac{1}{6}x^4$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
$\operatorname{Arctg} y = y - \frac{1}{3}y^2 + \mathrm{o}(y^2)$; quindi $\operatorname{Arctg} x^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \mathrm{o}(x^6) = x^2 + \mathrm{o}(x^4)$;
quindi $\frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^4)$; quindi $\cos x - 1 + \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^4) = \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0} \frac{1}{24}x^4$; quindi
$\frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x^2}{(x - \operatorname{sh} x)\sin x} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{24}x^4}{-\frac{1}{6}x^4} = -\frac{1}{4}$.
Quindi si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x}{(x - \operatorname{sh} x)\sin x} = -\frac{1}{4}$.

(j) Si ha
$1 - \cos(2x)x \sim_{x\to 0} \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2$.

Si ha per $y \to 0$
$(1+y)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}y + \binom{\frac{1}{5}}{2} y^2 + \mathrm{o}(y^2) = 1 + \frac{1}{5}y - \frac{2}{25}y^2 + \mathrm{o}(y^2)$;
quindi si ha per $x \to 0$
$\sqrt[5]{1+2x} = 1 + \frac{1}{5}(2x) - \frac{2}{25}(2x)^2 + \mathrm{o}(x^2) = 1 + \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
Si ha per $y \to 0$
$(1+y)^{\frac{1}{6}} = 1 + \frac{1}{6}y + \mathrm{o}(y)$;
quindi si ha per $x \to 0$
$\sqrt[6]{1+3x^2} = 1 + \frac{1}{6}(3x^2) + \mathrm{o}(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
Si ha quindi
$\sqrt[5]{1+2x}\sqrt[6]{1+3x^2} = (1 + \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}x^2 + \mathrm{o}(x^2))(1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)) =$
$1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) + \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}x^2 = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{9}{50}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
Si ha per $y \to 0$
$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \mathrm{o}(y^2)$;
quindi si ha per $x \to 0$
$e^{\frac{2}{5}x} = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}x\right)^2 + \mathrm{o}(x^2) = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
Si ha per $y \to 0$
$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \mathrm{o}(y^2)$;
quindi si ha per $x \to 0$
$\cos(2x) = 1 = \frac{1}{2}(2x)^2 + \mathrm{o}(x^2) = 1 - 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
Si ha quindi
$e^{\frac{2}{5}x}\cos(2x) = (1 + \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}x^2 + \mathrm{o}(x^2))(1 - 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)) =$
$1 - 2x^2 + \mathrm{o}(x^2) + \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}x^2 = 1 + \frac{2}{5} - \frac{48}{25}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
Si ha quindi
$\sqrt[5]{1+2x}\sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x}\cos(2x) = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{9}{50}x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 1 - \frac{2}{5} + \frac{48}{25}x^2 =$
$\frac{21}{10}x^2 + \mathrm{o}(x^2) \sim_{x\to 0} \frac{21}{10}x^2$.
Si ha quindi
$\frac{\sqrt[5]{1+2x}\sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x}\cos(2x)}{1-\cos(2x)} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{21}{10}x^2}{2x^2} = \frac{21}{20}$.
Si ha quindi
$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x}\sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x}\cos(2x)}{1-\cos(2x)} = \frac{21}{20}$.

(k) Si ha:
$1 - \cos(3x) \sim_{x\to 0} \frac{1}{2}(3x)^2 = \frac{9}{2}x^2$.
Si ha:
$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \mathrm{o}(y^2)$;
$\log(1+2x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \mathrm{o}(x^2) = 2x - 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)$;
$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + \binom{\frac{1}{2}}{2}y^2 + \mathrm{o}(y^2) = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \mathrm{o}(y^2)$;
$\sqrt{1+\log(1+2x)} = \sqrt{1 + 2x - 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)} =$
$1 + \frac{1}{2}(2x - 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)) - \frac{1}{8}(2x = 2x^2 + \mathrm{o}(x^2))^2 + \mathrm{o}(x^2) =$
$1 + x - x^2 + \mathrm{o}(x^2) - \frac{1}{2}x^2 = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$;
$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$;
$\sqrt{1+\log(1+2x)} - e^x = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 = -2x^2 +$
$\mathrm{o}(x^2) \sim_{x\to 0} -2x^2$.

Quindi si ha
$\frac{\sqrt{1+\log(2x)}-e^x}{1-\cos(3x)} \sim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{\frac{9}{2}x^2} = -\frac{4}{9}$.
Quindi si ha
$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\log(2x)}-e^x}{1-\cos(3x)} = -\frac{4}{9}$.

(l) Si ha
$(1-\cos\sin x)^2 \sim_{x\to 0} (\frac{1}{2}\sin^2 x)^2 \sim_{x\to 0} \frac{1}{4}x^4$.
Si ha
$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$x\log(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$2(1-\cos x) = x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$,
$x\log(1+x) - 2(1-\cos x) + \frac{1}{2}x^3 = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^4) = \frac{5}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0} \frac{5}{12}x^4$.
Quindi si ha
$\frac{x\log(1+x)-2(1-\cos x)+\frac{1}{2}x^3}{(1-\cos\sin x)^2} \sim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{5}{3}$.
Quindi si ha
$\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x)-2(1-\cos x)+\frac{1}{2}x^3}{(1-\cos\sin x)^2} = \frac{5}{3}$.

(m) Si ha
$(2x - \sin(2x) \sim_{x\to 0} \frac{1}{6}(2x)^3 = \frac{4}{3}x^3$.
Per $x \to 0$ si ha
$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \mathrm{o}(y^3)$, per $y \to 0$;
$\sin(e^x - 1) = \sin\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) =$
$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3) - \frac{1}{6}(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3))^3 + \mathrm{o}((e^x-1)^3) =$
$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3) - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3) + \mathrm{o}(x^3) = x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^3)$;
$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$,
$\sin(e^x-1) - \log(1+x) - x^2 = x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^3) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 = -\frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \sim_{x\to 0} -\frac{1}{3}x^3$.
Quindi si ha
$\frac{\sin(e^x+1)-\log(1+x)-x^2}{2x-\sin(2x)} \sim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{\frac{4}{3}x^3} = -\frac{1}{4}$.
Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x+1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)} = -\frac{1}{4}\ .$$

(n) Si ha
$1 - \cos x^2 \sim_{x\to 0} \frac{1}{2}(x^2)^2 = \frac{1}{2}x^4$.
Per $y \to 0$ si ha
$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \mathrm{o}(y^3)$.

Si ha quindi
$\sin(x-x^2) = x - x^2 - \frac{1}{6}(x-x^2)^3 + \mathrm{o}(x^3) = x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.
Si ha quindi
$\sin(x+2x^2) = x + 2x^2 - \frac{1}{6}(x+2x^2)^3 + \mathrm{o}(x^3) = x + 2x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.
Si ha quindi
$\sin(x-x^2)\sin(x+2x^2) = (x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3))(x + 2x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)) = x^2 + 2x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \mathrm{o}(x^4) - x^3 - 2x^4 - \frac{1}{6}x^4 = x^2 + x^3 - \frac{7}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.
Per $y \to 0$ si ha
$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \mathrm{o}(y^2)$.
Si ha quindi
$\log(1+x^2+x^3) = x^2 + x^3 - \frac{1}{2}(x^2+x^3)^2 + \mathrm{o}(x^4) = x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.
Si ha quindi
$\sin(x-x^2)\sin(x+2x^2) - \log(1+x^2+x^3) = x^2 + x^3 - \frac{7}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4) - x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 = -\frac{11}{6}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \sim_{x\to 0} -\frac{11}{6}x^4$.
Si ha quindi
$\frac{\sin(x-x^2)\sin(x+2x^2)-\log(1+x^2+x^3)}{1-\cos x^2} \sim_{x\to 0} \frac{-\frac{11}{6}}{\frac{1}{2}x^4} = -\frac{11}{3}$.
Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-x^2)\sin(x+2x^2) - \log(1+x^2+x^3)}{1-\cos x^2} = -\frac{11}{3} .$$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{5}}(3\sqrt[5]{1+x} - 2\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{3+x})$.

   (b) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2} + \sqrt{x^2-2x+3} - 2xe^{\frac{1}{x}})$.

   (c) $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2} - \sqrt[4]{x^4+x^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{x}\right)$.

   (d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^6+x^3+3}\left(\sqrt[4]{16x^4+32x^2+64} - \sqrt[4]{16x^4+1} - \sin\frac{1}{x}\right)$.

   (e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt[6]{x^2+2x+3} - 3\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x}\log(1+\frac{2}{x})}{\sqrt[6]{x^2+1} - \sqrt[3]{x}}$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha
   $3\sqrt[5]{1+x} - 2\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{3+x} = x^{\frac{1}{5}}\left(3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} - 2\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1+\frac{3}{x}}\right)$.
   Per $y \to 0$ si ha
   $\sqrt[5]{1+y} = 1 + \frac{1}{5}y + \mathrm{o}(y)$.
   Per $x \to +\infty$ si ha quindi
   $\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{5}\frac{1}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})$,
   $3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} = 3 + \frac{3}{5}\frac{1}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})$,
   $\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} = 1 + \frac{1}{5}\frac{2}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x}) = 1 + \frac{2}{5}\frac{1}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})$,
   $2\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} = 2 + \frac{4}{5}\frac{1}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})$,

$\sqrt[5]{1+\frac{3}{x}} = 1 + \frac{1}{5}\frac{3}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x}) = 1 + \frac{3}{5}\frac{1}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})$,
$3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} - 2\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1+\frac{3}{x}} =$
$3 + \frac{3}{5}\frac{1}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x}) - 2 - \frac{4}{5}\frac{1}{x} - 1 - \frac{3}{5}\frac{1}{x} = \frac{4}{5}\frac{1}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x}) \sim_{x\to+\infty} -\frac{4}{5}\frac{1}{x}$.
Quindi si ha
$x^{\frac{1}{5}}\left(3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} - 2\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1+\frac{3}{x}}\right) \sim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{5}}(-\frac{4}{5}\frac{1}{x}) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{4}{5}}$.
Quindi si ha
$x^{\frac{4}{5}}(3\sqrt[5]{1+x} - 2\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{3+x}) \sim_{x\to+\infty} -\frac{4}{5}$.
Quindi si ha
$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{5}}(3\sqrt[5]{1+x} - 2\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{3+x}) = -\frac{4}{5}$.

(b) Per $x > 0$ si ha
$\sqrt{x^2+x+2} + \sqrt{x^2-2x+3} - 2xe^{\frac{1}{x}} =$
$x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}}\right)$.
Si ha
$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + \mathrm{o}(y)$ per $y \to 0$.
Quindi si ha
$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$
e
$\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.
$e^y = 1 + y + \mathrm{o}(y)$ per $y \to 0$.
Quindi si ha
$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$,
quindi
$2e^{\frac{1}{x}} = 2 + \frac{2}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Si ha quindi
$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) + 1 - \frac{1}{x} - 2 - \frac{2}{x} =$
$-\frac{5}{2}\frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \sim -\frac{5}{2}\frac{1}{x}$.
Si ha quindi
$x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}}\right) \sim x(-\frac{5}{2}\frac{1}{x}) = -\frac{5}{2}$.
Si ha quindi
$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2} + \sqrt{x^2-2x+3} - 2xe^{\frac{1}{x}}) = -\frac{5}{2}$.

(c) Per $x > 0$ si ha
$x^2\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2} - \sqrt[4]{x^4+x^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{x}\right) =$
$x^3\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2}\right)$.
Si ha
$\sqrt[4]{1+y} = 1 + \frac{1}{4}y + \binom{\frac{1}{4}}{2}y^2 + \binom{\frac{1}{4}}{3}y^3 + \mathrm{o}(y^3) = 1 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{32}y^2 + \frac{7}{128}y^3 + \mathrm{o}(y^3)$
per $y \to 0$.
Quindi si ha:
$\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{3}{32}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{7}{128}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) =$

$1+\frac{1}{4}\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}-\frac{3}{32}\frac{1}{x^2}-\frac{3}{16}\frac{1}{x^3}+\frac{7}{128}\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)=$
$1+\frac{1}{4}\frac{1}{x}+\frac{5}{32}\frac{1}{x^2}-\frac{17}{128}\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$
$\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{4}\frac{1}{x}-\frac{3}{32}\frac{1}{x^2}+\frac{7}{128}\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$
$\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}=$
$1+\frac{1}{4}\frac{1}{x}+\frac{5}{32}\frac{1}{x^2}-\frac{17}{128}\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)-1-\frac{1}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{32}\frac{1}{x^2}-\frac{7}{128}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}=$
$-\frac{3}{16}\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\sim-\frac{3}{16}\frac{1}{x^3}.$
Si ha quindi
$x^3\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}\right)\sim x^3(-\frac{3}{16}\frac{1}{x^3})=-\frac{3}{16}.$
Si ha quindi
$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-\sqrt[4]{x^4+x^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{x}\right)=-\frac{3}{16}.$

(d) Si ha
$\sqrt{4x^6+x^3+3}\sim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^6}=2x^3.$
Per $x>0$ si ha
$\sqrt[4]{16x^4+32x^2+64}=2x\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}.$
Per $y\to 0$ si ha
$\sqrt[4]{1+y}=1+\frac{1}{4}y+\binom{\frac{1}{4}}{2}y^2+\mathrm{o}(y^2)=1+\frac{1}{4}y-\frac{3}{32}y^2+\mathrm{o}(y^2).$
Quindi per $x\to+\infty$ si ha:
$2x\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=2x\left(1+\frac{1}{4}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4})-\frac{3}{32}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4})^2+\mathrm{o}(\frac{1}{x^4})\right)=$
$2x\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{3}{8}\frac{1}{x^4}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^4})\right)=2x+\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^3}).$
Per $x>0$ si ha
$\sqrt[4]{16x^4+1}=2x\sqrt[4]{1+\frac{1}{16x^4}}.$
Per $y\to 0$ si ha
$\sqrt[4]{1+y}=1+\frac{1}{4}y+\mathrm{o}(y).$
Quindi per $x\to+\infty$ si ha:
$2x\sqrt[4]{1+\frac{1}{16x^4}}=2x\left(1+\frac{1}{4}\frac{1}{16x^4})+\mathrm{o}(\frac{1}{x^4})\right)=2x\left(1+\frac{1}{64x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^4})\right)=2x+$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{32}\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^3}).$
Per $y\to 0$ si ha
$\sin y=y-\frac{1}{6}y^3+\mathrm{o}(y^3).$
Quindi per $x\to+\infty$ si ha:
$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^3}).$
Si ha quindi
$\sqrt[4]{16x^4+32x^2+64}-\sqrt[4]{16x^4+1}-\sin\frac{1}{x}=2x+\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^3})-2x-$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{6}-\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\frac{1}{x^3}=\frac{133}{96}\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^3})\sim_{x\to+\infty}\frac{133}{96}\frac{1}{x^3}.$
Si ha quindi
$\sqrt{4x^6+x^3+3}\left(\sqrt[4]{16x^4+32x^2+64}-\sqrt[4]{16x^4+1}-\sin\frac{1}{x}\right)\sim_{x\to+\infty}$
$2x^3\frac{133}{96}\frac{1}{x^3}=\frac{133}{48}.$
Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^6+x^3+3}\left(\sqrt[4]{16x^4+32x^2+64}-\sqrt[4]{16x^4+1}-\sin\frac{1}{x}\right)=$$

$$\frac{133}{48}\,.$$

(e) Si ha
$\sqrt[6]{x^2+1}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\sim_{x\to+\infty}$
$x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{6}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{3}}$.
Si ha
$\sqrt[6]{x^2+2x+3}=\sqrt[6]{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}=\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}$.
Per $y\to 0$ si ha
$\sqrt[6]{1+y}=1+\frac{1}{6}y+\binom{\frac{1}{6}}{2}y^2+\mathrm{o}(y^2)=1+\frac{1}{6}y-\frac{5}{72}y^2+\mathrm{o}(y^2)$.
Si ha quindi
$\sqrt[6]{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=$
$1+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)-\frac{5}{72}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^2+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})=$
$1+\frac{1}{3}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}-\frac{5}{18}\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})=1+\frac{1}{3}\frac{1}{x}+\frac{2}{9}\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})$.
Si ha quindi
$\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{x}+\frac{2}{9}\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})\right)=x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}+$
$\mathrm{o}(x^{-\frac{5}{3}})$.
Si ha quindi
$3\sqrt[6]{x^2+2x+3}=3\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}+\mathrm{o}(x^{-\frac{5}{3}})\right)=$
$3x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\mathrm{o}(x^{-\frac{5}{3}})$.
Si ha
$\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{x(1+\frac{3}{x})}=\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}$.
Per $y\to 0$ si ha
$\sqrt[3]{1+y}=1+\frac{1}{3}y+\binom{\frac{1}{3}}{2}y^2+\mathrm{o}(y^2)=1+\frac{1}{3}y-\frac{1}{9}y^2+\mathrm{o}(y^2)$.
Si ha quindi
$\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}=$
$1+\frac{1}{3}\frac{3}{x}-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{x}\right)^2+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})=$
$1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})$.
Si ha quindi
$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}=x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})\right)=x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{5}{3}}+\mathrm{o}(x^{-\frac{5}{3}})$.
Si ha quindi
$3\sqrt[3]{x+3}=3\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{5}{3}}+\mathrm{o}(x^{-\frac{5}{3}})\right)=$
$3x^{\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{5}{3}}+\mathrm{o}(x^{-\frac{5}{3}})$.
Per $y\to 0$ si ha
$\log(1+y)=y-\frac{1}{2}y^2+\mathrm{o}(y^2)$.
Si ha quindi
$\log(1+\frac{2}{x})=\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})$.
Si ha quindi
$\sqrt[3]{x}\log(1+\frac{2}{x})=x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})\right)=2x^{-\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{5}{3}}+\mathrm{o}(x^{-\frac{5}{3}})$.

Si ha quindi
$3\sqrt[6]{x^2+2x+3}-3\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x}\log(1+\frac{2}{x})=$
$3x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\mathrm{o}(x^{-\frac{5}{3}})-3x^{\frac{1}{3}}-3x^{-\frac{2}{3}}+3x^{-\frac{5}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{5}{3}}=$
$\frac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\mathrm{o}(x^{-\frac{5}{3}})\sim_{x\to+\infty}\frac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}}$.
Si ha quindi
$\frac{3\sqrt[6]{x^2+2x+3}-3\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x}\log(1+\frac{2}{x})}{\sqrt[6]{x^2+1}-\sqrt[3]{x}} equi_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}}}{\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{3}}}=10.$
Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[6]{x^2+2x+3}-3\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x}\log(1+\frac{2}{x})}{\sqrt[6]{x^2+1}-\sqrt[3]{x}}=10\ .$$

3. **Esercizio.** Sia $\alpha\in\mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\alpha x}-x+2\right)\ .$$

Risoluzione. Per $x>0$, si ha$\sqrt{x^2+\alpha x}=x\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}}$.
Per $y\to 0$. si ha
$\sqrt{1+y}=1+\frac{1}{2}y+\mathrm{o}(y)$.
Per $\alpha\neq 0$ si ha quindi
$\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}}=1+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{\alpha}{x}\right)=1+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Per $\alpha=0$ si ha $\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}}=\sqrt{1}=1=1+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{x}+0=1+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Per ogni $\alpha\in\mathbf{R}$ si ha quindi
$x\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}}=x\left(1+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x+\frac{\alpha}{2}+\mathrm{o}(1)$.
Si ha quindi
$\sqrt{x^2+\alpha x}-x+2=x+\frac{\alpha}{2}+\mathrm{o}(1)-x+2=\frac{\alpha}{2}+2+\mathrm{o}(1)$.
Si ha quindi
$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\alpha x}-x+2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{2}+2+\mathrm{o}(1)\right)=\frac{\alpha}{2}+2$.

4. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{Arcsin}(3x)}{3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (si può utilizzare l'equivalenza asintotica: $\mathrm{Arcsin}\,y-y\sim_{y\to 0}\frac{1}{6}y^3$);

   (b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{Arctg}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

Risoluzione.

   (a) Si ha
   $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{Arcsin}(3x)}{3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{\mathrm{Arcsin}(3x)}{3x}}$.
   Si ha
   $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\frac{\mathrm{Arcsin}(3x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\left(1+\frac{\mathrm{Arcsin}(3x)}{3x}-1\right)=$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log\left(1+\frac{\mathrm{Arcsin}(3x)-3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \frac{\mathrm{Arcsin}(3x)-3x}{3x} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arcsin}(3x)-3x}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}(3x)^3}{3x^3} = \frac{27}{6}\frac{1}{3} = \frac{3}{2}$.
Si ha quindi
$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{\mathrm{Arcsin}(3x)}{3x}} = e^{\frac{3}{2}}$.

(b) Si ha
$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{Arctg}\, x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}\log\frac{\mathrm{Arctg}\, x}{x}}$.
Si ha $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x}\log\frac{\mathrm{Arctg}\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2}\log\left(1+\frac{\mathrm{Arctg}\, x}{x}-1\right) =$
$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2}\log\left(1+\frac{\mathrm{Arctg}\, x - x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2}\frac{\mathrm{Arctg}\, x - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2}\frac{-\frac{x^3}{3}}{x} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2}(-\frac{x^2}{3} = -\frac{2}{3}$.

12.2 Asintoti

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per $x \to +\infty$; in caso affermativo determinare l'asintoto:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$;
   (b) $f(x) = \sqrt[4]{16x^4+3x^3+2x^2+x+1}$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha
   $\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} \sim_{x\to+\infty} 1$; quindi si ha
   $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = 1$.
   Si ha
   $\sqrt{x^2+x+1} - x = x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}) \sim_{x\to+\infty} x\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}) \sim_{x\to+\infty} x\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$.
   Quindi f ammette sviluppo asintotico affine per $x \to +\infty$ e l'asintoto di f per $x \to +\infty$ è la retta
   $$y = x + \frac{1}{2}\ .$$

   (b) Si ha
   $\sqrt[4]{16x^4+3x^3+2x^2+x+1} \sim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{16x^4} = 2x$.
   Si ha
   $\sqrt[4]{16x^4+3x^3+2x^2+x+1} - 2x =$
   $2x\left(\sqrt[4]{1+\frac{3}{16}\frac{1}{x}+\frac{1}{8}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{x^3}+\frac{1}{16}\frac{1}{x^4}}-1\right) \sim_{x\to+\infty}$
   $2x\frac{1}{4}\left(\frac{3}{16}\frac{1}{x}+\frac{1}{8}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{x^3}+\frac{1}{16}\frac{1}{x^4}\right) \sim_{x\to+\infty}$
   $2x\frac{1}{4}\frac{3}{16}\frac{1}{x} = \frac{3}{32}$.
   Quindi f ammette sviluppo asintotico affine per $x \to +\infty$ e l'asintoto di f per $x \to +\infty$ è la retta
   $$y = 2x + \frac{3}{32}\ .$$

2. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per $x \to -\infty$; in caso affermativo determinare l'asintoto:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$;

   (b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$;

   (c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+3}{x}}$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha
   $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1$.
   Si ha
   $\lim_{x\to-\infty}(f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} -x\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} -x\frac{1}{2}\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$.
   Quindi f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e l'asintoto di f per $x \to -\infty$ è la retta i equazione $y = -x - \frac{1}{2}$.

   (b) Si ha
   $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ e
   $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(x\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} x\frac{1}{2}\frac{1}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{x^3} = 0$.
   Quindi f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e l'asintoto di f per $x \to -\infty$ è la retta di equazione $y = x$.

   (c) Si ha
   $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1$
   e
   $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} -x\frac{1}{2}\frac{1}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} = 0$.
   Quindi f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e l'asintoto di f per $x \to -\infty$ è la retta di equazione $y = -x$.

12.3 Serie

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n} - \operatorname{Arctg}\frac{1}{n}}$.

   Risoluzione.

   (a) Si ha
   $\sqrt{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1}{n}} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(\sqrt{\frac{1}{n}})^3 = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.
   Quindi la serie assegnata è convergente.

   (b) Si ha
   $\sqrt{\frac{1}{n} - \operatorname{Arctg}\frac{1}{n}} \sim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.
   Essendo $\frac{3}{2} > 1$, la serie assegnata è convergente.

Capitolo 13

Integrali impropri

13.1 Integrali impropri

1. **Esercizio.** Dimostrare che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ è divergente positivamente.

   Risoluzione. Sia $y > 1$; si ha
   $\int_1^y \frac{1}{x}\, dx = [\log x]_1^y = \log y \longrightarrow_{y \to +\infty} +\infty$.

2. **Esercizio.** Dimostrare che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ è divergente positivamente.

   Risoluzione. Sia $y \in]0, 1]$; si ha
   $\int_y^1 \frac{1}{x}\, dx = [\log x]_y^1 = -\log(y) \longrightarrow_{y \to 0} +\infty$.

13.2 Valore di un integrale improprio

1. **Esercizio.** Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti e in caso affermativo determinarne il valore:

   (a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx$;

   (b) $\int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

   Risoluzione.

   (a) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione
   $$f :]-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}}\ .$$
   Si ha
   $$\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{(x-(-1))^{\frac{1}{2}}}\ .$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1$ l'integrale improprio è convergente.
Si ha
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \lim_{y\to -1} \int_{y}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \lim_{y\to -1} \int_{y}^{1} (1+x)^{-\frac{1}{2}}\, dx =$
$\lim_{y\to -1} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{y}^{1} = \lim_{y\to -1} 2\left(\sqrt{2} - \sqrt{1+y}\right) = 2\sqrt{2}.$
In particolare si ritrova che l'integrale improprio è convergente.

(b) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f :]0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}} .$$

Si ha

$$\frac{x+2}{\sqrt[3]{x}} \sim_{x\to 0} \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} .$$

Essendo $\frac{1}{3} < 1$ l'integrale improprio è convergente.
Si ha
$\int_{0}^{1} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \lim_{y\to 0} \int_{y}^{1} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \lim_{y\to 0} \int_{y}^{1} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx =$
$\lim_{y\to 0} \left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}}\right), dx = \lim_{y\to 0} \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_{y}^{1} =$
$\lim_{y\to 0} \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}}\right]_{y}^{1} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{3}{5} + 3 - \frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}} - 3y^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{5} + 3 = \frac{18}{5}.$
In particolare si ritrova che l'integrale improprio è convergente.

13.3 Convergenza di integrali impropri di funzioni positive

Esercizio. Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti, esplicitando dapprima le funzioni che si considerano

1. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+x+1}\, dx$;
2. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx$;
3. $\int_{0}^{+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}}\, dx$;
4. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x+3}{2^x+x}\, dx$;
5. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$;
6. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2+x}{3^x+x^2+1}\, dx$;
7. $\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{x+1}{x}}$;.

8. $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$;

9. $\int_0^1 \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx$;

10. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{\operatorname{ch} x-1}\,dx$;

11. $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}$;

12. $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arcsin} x+1}{x}\,dx$.

Risoluzione.

1. Si tratta dell'integrale improprio su di una semiretta positiva della funzione $f:[0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x\longrightarrow \frac{x}{x^2+x+1}$.

   Si ha $\frac{x}{x^2+x+1} \sim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$; quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

2. Si tratta dell'integrale improprio su di una semiretta positiva della funzione $f:[0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x\longrightarrow \frac{x^2}{x^4+1}$.

   Si ha $\frac{x^2}{x^4+1} \sim_{x\to0} \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$; quindi l'integrale improprio è convergente.

3. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

   $$f:[0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x\longrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}}\ ;$$

   si ha $\sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}} \sim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$; quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

4. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva di

   $$f:[0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x\longrightarrow \frac{x-3}{2^x+x}\ .$$

   Si ha
   $\frac{x+3}{2^x+x} \sim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x} = x(\frac{1}{2})^x$.
   Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

5. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

   $$f:[0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x\longrightarrow \frac{1}{1+x^2}\ .$$

   Si ha
   $\frac{1}{1+x^2} \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$;
   quindi l'integrale improprio è convergente.

6. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva di
$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x^2+x}{3^x+x^2+1} .$$
Si ha
$\frac{x^2+x}{3^x+x^2+1} \sim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3^x} = x^2(\frac{1}{3})^x$.
Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

7. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione
$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x}} ;$$
si ha $\sqrt{\frac{x+1}{x}} \sim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$; quindi l'integrale improprio è convergente.

8. Si tratta dell'integrale improprio su di un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione
$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}}$.
Si ha $\frac{x+1}{\sqrt{x}} \sim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$; quindi l'integrale improprio è convergente.

9. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra di
$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{\sin x}{1-\cos x} .$$
Si ha
$\frac{\sin x}{1-\cos x} \sim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = 2\frac{1}{x}$.
Quindi l'integrale improprio assegnato è divergente positivamente.

10. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra di
$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{\log(1+x)}{\operatorname{ch} x - 1} .$$
Si ha
$\frac{\log(1+x)}{\operatorname{ch} x-1} \sim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = 2\frac{1}{x}$.
Quindi l'integrale improprio assegnato è divergente positivamente.

11. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra della funzione
$$f : [0, 1[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{1-x^2} .$$
Si ha
$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} \sim_{x\to 1} \frac{1}{2(1-x)}$;
quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

12. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione
$$f :]0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{\text{Arcsin}\, x + 1}{x} \ .$$
Si ha
$\frac{\text{Arcsin}\, x+1}{x} \sim_{x \to 0} \frac{1}{x}$;
quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

13.4 Convergenza e valori di integrali impropri

Esercizio. Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti e, in caso affermativo, determinarne il valore:

1. $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-2x}\, dx$,
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\, dx$;
3. $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x}\, dx$;
4. $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+8}\, dx$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+2}\, dx$.
   Negli esercizi 4 e 5 si può utilizzare la formula
   $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\, dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \text{Arctg}\, \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$,
   dove $p^2 - 4q < 0$.

Risoluzione.

1. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione
$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^5 e^{-2x} \ .$$
Si ha
$$x^5 e^{-2x} = x^5 (\frac{1}{e^2})^x \ .$$
Essendo $\frac{1}{e^2} < 1$, l'integrale improprio è convergente.
Per ogni $y \in [0, +\infty[$ si ha
$$\int_0^y x^5 e^{-2x}\, dx = \left[x^5 (-\frac{1}{2} e^{-2x}) \right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2} e^{-2x} 5x^4\, dx =$$
$$\left[-\frac{1}{2} x^5 e^{-2x} \right]_0^y + \frac{5}{2} \int_0^y x^4 e^{-2x}\, dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x}\right]_0^y + \frac{5}{2}\left(\left[x^4(-\frac{1}{2}e^{-5x})\right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x}4x^3\,dx\right) =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x}\right]_0^y + 5\int_0^y x^3e^{-2x}\,dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x}\right]_0^y + 5\left(\left[x^3(-\frac{1}{2}e^{-2x})\right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x}3x^2\,dx\right) =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3e^{-2x}\right]_0^y + \frac{15}{2}\int_0^y x^2e^{-2x}\,dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3e^{-2x}\right]_0^y +$$

$$\frac{15}{2}\left(\left[x^2(-\frac{1}{2}e^{-2x})\right] + 0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x}2x\,dx\right) =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3e^{-2x} - \frac{15}{4}e^{-2x}\right]_0^y + \frac{15}{2}\int_0^y xe^{-2x}\,dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3e^{-2x} - \frac{15}{4}x^2e^{-2x}\right]_0^y +$$

$$\frac{15}{2}\left(\left[x(\frac{1}{2}e^{-2x})\right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx\right) =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3e^{-2x} - \frac{15}{4}x^2e^{-2x} - \frac{15}{4}xe^{-2x}\right]_0^y +$$

$$\frac{15}{4}\int_0^y e^{-2x}\,dx =$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{15}{4}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{15}{8}\right)e^{-2x}\right]_0^y =$$

$$\left(-\frac{1}{2}y^5 - \frac{5}{4}y^4 - \frac{5}{2}y^3 - \frac{15}{4}y^2 - \frac{15}{4}y - \frac{15}{8}\right)e^{-2y} + \frac{15}{8}\ .$$

Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty} x^5e^{-2x}\,dx =$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}y^5 - \frac{5}{4}y^4 - \frac{5}{2}y^3 - \frac{15}{4}y^2 - \frac{15}{4}y - \frac{15}{8}\right)e^{-2y} + \frac{15}{8}\right) = \frac{15}{8}\ .$$

2. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione
$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \; .$$
Si ha
$$\frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \sim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \; .$$
Essendo $\frac{3}{2} > 1$, l'integrale improprio è convergente.
Sia $y \geq 0$.
Si ha
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \lim_{y\to+\infty} \int_0^y \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx \; .$$
Poniamo $\sqrt{x} = t$; si ha $x = t^2$; quindi $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 0$, si ha $t = 0$; per $x = y$, si ha $t = \sqrt{y}$.
Si ha quindi
$$\int_0^y \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{t}{t^4+1} 2t\,dt = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt \; .$$
Le radici dell'equazione complessa $t^4 = -1$ sono
$t_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Si ha quindi
$$t^4 - 1 = ((t-t_0)(t-t_3))((t-t_1)(t-t_2)) =$$
$$((t-(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}))(t-(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})))((t-(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}))(t-(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}))) =$$
$$((t-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})(t-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}))((t+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})(t+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})) =$$
$$((t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2})(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}) = (t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1) \; .$$
Esistono $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ tali che
$$\frac{t^2}{t^4+1} = \frac{At+B}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+\sqrt{2}t+1} \; .$$
Si ha
$$t^2 = (At+B)(t^2-\sqrt{2}t+1) + (Ct+D)(t^2+\sqrt{2}t+1) \; .$$

Quindi
$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=1 \\ A+\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=0 \end{cases};$$
quindi
$$\begin{cases} C=-A \\ D=-B \\ \sqrt{2}A+B+\sqrt{2}A-B=1 \\ A+\sqrt{2}B-A+\sqrt{2}B=0 \end{cases};$$
quindi
$$\begin{cases} B=0 \\ D=0 \\ A=\frac{\sqrt{2}}{4} \\ C=-\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$
Si ha quindi
$$\frac{t^2}{t^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right).$$

Si ha quindi
$$2\int_0^{\sqrt{y}}\frac{t^2}{t^4+1}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\sqrt{y}}\left(\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)dt=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\Bigg[\log(t^2-\sqrt{2}t+1)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctg}\frac{2t-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$-(\log(t^2+\sqrt{2}t+1)+\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctg}\frac{2t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})\Bigg]_0^{\sqrt{y}}=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\sqrt{y}}\left(\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)dt=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{2}\log\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\operatorname{Arctg}\frac{2t-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\operatorname{Arctg}\frac{2t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})\right]_0^{\sqrt{y}}=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\log\frac{y-\sqrt{2}\sqrt{y}+1}{y+\sqrt{2}\sqrt{y}+1}+\operatorname{Arctg}\frac{2\sqrt{y}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\operatorname{Arctg}\frac{2\sqrt{y}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})\right).$$

Si ha quindi
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx=$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\log\frac{y-\sqrt{2}\sqrt{y}+1}{y+\sqrt{2}\sqrt{y}+1}+\operatorname{Arctg}\frac{2\sqrt{y}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\operatorname{Arctg}\frac{2\sqrt{y}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\ .$$

3. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f:[1,+\infty[\longrightarrow\mathbf{R},x\longrightarrow\frac{x-1}{x^3+x}\ .$$

Si ha

$$\frac{x-1}{x^3+x}\sim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3}=\frac{1}{x^2}\ .$$

Quindi l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_1^{+\infty}\frac{x-1}{x^3+x}\,dx=\lim_{y\to+\infty}\int_0^y\frac{x-1}{x^3+x}\,dx\ .$$

Sia $y\geq 0$.

Si ha
$x^3+x=x(x^2+1)$.

Esistono $A,B,C\in\mathbf{R}$ tali che

$$\frac{x-1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\ .$$

Si ha
$x-1=A(x^2+1)+(Bx+C)x$.

Per $x=0$ si ha $-1=A$; quindi $A=-1$.

Si ha quindi
$x-1=-x^2-1+(Bx+C)x$; quindi
$x^2+x=(Bx+C)x$; quindi
$x(x+1)=(Bx+C)x$; quindi
$x+1=Bx+C$; quindi
$B=1$, $C=1$.

Si ha quindi

$$\frac{x-1}{x^3+x}=-\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}\ .$$

Si ha quindi $\int_1^y\frac{x-1}{x^3+x}\,dx=\int_1^y\left(-\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}\right)\,dx=$
$\int_1^y\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)\,dx=\left[-\log x+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\operatorname{Arctg}x\right]_1^y=$
$\left[-\log x+\log\sqrt{x^2+1}+\operatorname{Arctg}x\right]_1^y=\left[\log\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\operatorname{Arctg}x\right]_1^y=$
$\log\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}+\operatorname{Arctg}-\log\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$.

Si ha quindi $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x}\, dx = \lim_{y\to+\infty} \left(\log \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} + \mathrm{Arctg} - \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 + \frac{\pi}{2} - \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$.

4. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione
$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x+1}{x^3+8} \ .$$
Si ha
$$\frac{x+1}{x^3+8} \sim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \ .$$
Essendo $2 > 1$, l'integrale improprio è convergente.
Si ha
$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+8}\, dx = \lim_{y\to+\infty} \int_0^y \frac{x+1}{x^3+8}\, dx \ .$$
Sia $y \geq 0$.
Calcoliamo $\int_0^y \frac{x+1}{x^3+8}\, dx$
Si ha
$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4) \ .$$
Esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che
$$\frac{x+1}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} \ .$$
Si ha
$$x + 1 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2) \ .$$
Per $x = -2$ si ha $-1 = 12A$; quindi $A = -\frac{1}{12}$.
Si ha quindi
$x + 1 = -\frac{1}{12}(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2)$; quindi
$12x + 12 = -x^2 + 2x - 4 + 12(Bx + C)(x + 2)$; quindi
$x^2 + 10x + 16 = 12(Bx + C)(x + 2)$; quindi
$(x + 2)(x + 8) = 12(Bx + C)(x + 2)$; quindi
$x + 8 = 12Bx + 12C$; quindi
$12B = 1$ e $12C = 8$; quindi $B = \frac{1}{12}$ e $C = \frac{2}{3}$.
Si ha quindi
$$\frac{x+1}{x^3+8} = -\frac{1}{12}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{12}\frac{x+8}{x^2-2x+4} \ .$$
Si ha quindi
$$\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x+1}{x^3+8}\, dx = \int_0^{\sqrt{y}} \left(-\frac{1}{12}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{12}\frac{x+8}{x^2-2x+4} \right) dx =$$

$$\frac{1}{12}\left[-\log(x+2)+\log\sqrt{x^2-2x+4}+\frac{16+2}{\sqrt{16-4}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{2x-2}{\sqrt{16-4}}\right]_0^y =$$

$$\frac{1}{12}\left[\log\frac{\sqrt{x^2-2x+4}}{x+2}+3\sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^y =$$

$$\frac{1}{12}\left(\log\frac{\sqrt{y^2-2y+4}}{y+2}+3\sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{y-1}{\sqrt{3}}-3\sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})\right) =$$

$$\frac{1}{12}\left(\log\frac{\sqrt{y^2-2y+4}}{y+2}+3\sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{y-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) .$$

Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{x+1}{x^3+8}\,dx =$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{12}\left(\log\frac{\sqrt{y^2-2y+4}}{y+2}+3\sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{y-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)$$

$$\frac{1}{12}\left(3\sqrt{3}\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)=\frac{1}{12}2\sqrt{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi .$$

5. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f:[0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x\longrightarrow \frac{1}{x^3+2} .$$

Si ha

$$\frac{1}{x^3+2}\sim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3} .$$

Essendo $3>1$, l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+2}\,dx=\lim_{y\to+\infty}\int_0^y\frac{1}{x^3+2}\,dx .$$

Sia $y\geq 0$.

Calcoliamo $\int_0^y \frac{1}{x^3+2}\,dx$

Si ha

$$x^3+2=(x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}) .$$

Esistono $A,B,C\in\mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^3+2}=\frac{A}{x+\sqrt[3]{2}}+\frac{Bx+C}{x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}} .$$

Si ha

$$1 = A(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) + (Bx + C)(x + \sqrt[3]{2}) \, .$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -\sqrt[3]{2}A + \sqrt[3]{2}B + C = 0 \\ \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}C = 1 \end{cases} ;$$

quindi

$$\begin{cases} A = -B \\ \sqrt[3]{2}B + \sqrt[3]{2}B + C = 0 \\ -\sqrt[3]{4}B + \sqrt[3]{C} = 1 \end{cases} ;$$

quindi

$$\begin{cases} A = -B \\ C = -2\sqrt[3]{2}B \\ -\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}C = 1 \end{cases} ;$$

quindi

$$\begin{cases} A = -B \\ 2\sqrt[3]{2}B + C = 0 \\ -\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}(-2\sqrt[3]{2})B = 1 \end{cases} ;$$

quindi

$$\begin{cases} -2\sqrt[3]{4}B = 1 \\ A = -B \\ C = -2\sqrt[3]{2}B \end{cases} ;$$

quindi

$$\begin{cases} B = -\frac{1}{3sqrt[3]4} \\ A = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \\ C = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{4}} \end{cases} .$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{x^3+2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\frac{1}{x+\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\frac{x-2\sqrt[3]{2}}{x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}} \, .$$

Si ha quindi

$$\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{x^3+2}\,dx = \int_0^{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\frac{1}{x+\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\frac{x-2\sqrt[3]{2}}{x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}} \right) dx =$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \cdot$$

$$\left[\log(x+\sqrt[3]{2}) - \log\sqrt{x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}} - \frac{-4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt{4\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}}} \operatorname{Arctg} \frac{2x-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{4\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}}} \right]_0^y$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left[\log\frac{x+\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}}} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} \operatorname{Arctg}\frac{2x-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} \right]_0^y =$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\left(\log\frac{y+\sqrt[3]{2}}{\sqrt{y^2-\sqrt[3]{2}y+\sqrt[3]{4}}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2y-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})\right)=$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\left(\log\frac{y+\sqrt[3]{2}}{\sqrt{y^2-\sqrt[3]{2}y+\sqrt[3]{4}}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2y-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\right).$$

Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+2}\,dx=$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\left(\log\frac{y+\sqrt[3]{2}}{\sqrt{y^2-\sqrt[3]{2}y+\sqrt[3]{4}}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2y-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\frac{2}{\sqrt{3}}\pi=\frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{3}}\pi\,.$$

13.5 Integrali impropri su intervalli aperti

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

   (a) $\int_0^{+\infty}\log x\,dx$;

   (b) $\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\,dx$;

   (c) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+x+1}{2^x\sqrt{x}}\,dx$.

   Risoluzione.

   (a) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

   $$f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbf{R},x\longrightarrow\log x\,.$$

   L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri $\int_0^1\log x\,dx$ e $\int_1^{+\infty}\log x\,dx$.
   Consideriamo $\int_1^{+\infty}\log x\,dx$.
   Si ha $\log x\ggcurly_{x\to+\infty}1$.
   Quindi l'integrale improprio $\int_1^{+\infty}\log x\,dx$ è divergente positivamente.
   Quindi l'integrale improprio $\int_0^{+\infty}\log x\,dx$ non è convergente.

   (b) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

   $$f:]1,2[\longrightarrow\mathbf{R},x\longrightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\,.$$

   L'integrale improprio è convergente se e solo è convergenti l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra $\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\,dx$ di

$f|]1,\frac{3}{2}]$ e se è convergente l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra $\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\,dx$ di $f|[\frac{3}{2},2[$.

Consideriamo $\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\,dx$.

Si ha
$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\sim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)\cdot 1}}=\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$.

Essendo $\frac{1}{3}<1$ l'integrale improprio $\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\,dx$ è convergente.

Consideriamo $\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\,dx$.

Si ha
$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\sim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{1\cdot(2-x)}}=\frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}}$.

Essendo $\frac{1}{3}<1$ l'integrale improprio $\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\,dx$ è convergente.

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

(c) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x\longrightarrow \frac{x^2+x+1}{2^x\sqrt{x}}\ .$$

L'integrale improprio è convergente se e solo è convergenti l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra $\int_{0}^{1}\frac{x^2+x+1}{2^x\sqrt{x}}\,dx$ di $f|]0,1]$ e se è convergente l'integrale improprio su una semiretta positiva $\int_{1}^{+\infty}\frac{x^2+x+1}{2^x\sqrt{x}}\,dx$ di $f|[1,+\infty[$.

Consideriamo $\int_{0}^{1}\frac{x^2+x+1}{2^x\sqrt{x}}\,dx$.

Si ha
$\frac{x^2+x+1}{2^x\sqrt{x}}\sim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

Essendo $\frac{1}{2}<1$ l'integrale improprio $\int_{0}^{1}\frac{x^2+x+1}{2^x\sqrt{x}}\,dx$ è convergente.

Consideriamo $\int_{1}^{+\infty}\frac{x^2+x+1}{2^x\sqrt{x}}\,dx$.

Si ha
$\frac{x^2+x+1}{2^x\sqrt{x}}\sim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2^x\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Essendo $\frac{1}{2}<1$ l'integrale improprio $\int_{1}^{+\infty}\frac{x^2+x+1}{2^x\sqrt{x}}\,dx$. è convergente.

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

2. **Esercizio.** Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\,dx\ .$$

NB 1. Si può utilizzare la formula $\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx=a\log\sqrt{x^2+px+q}+\frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{Arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c$, dove $p^2-4q<0$.

Risoluzione.

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{1+x^4} .$$

L'integrale improprio assegnato è convergente, se sono convergenti gli integrali impropri $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$ e $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4}\, dx$.

Si ha
$\frac{1}{1+x^4} \sim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4}$.

Quindi l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$ è convergente.

Si ha
$\frac{1}{1+x^4} \sim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4}$.

Quindi l'integrale improprio $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4}\, dx$ è convergente.

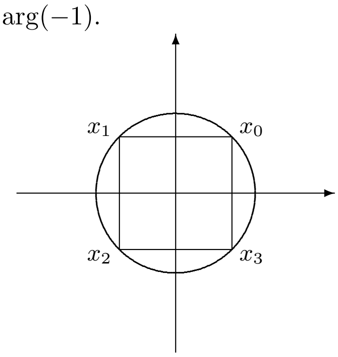
Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

Determiniamo il valore dell'integrale improprio. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^4}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx .$$

Calcoliamo $\int \frac{1}{1+x^4}\, dx$.

Per fattorizzare il polinomio x^4+1 determiniamo le radici complesse di $x^4 = -1$.
Si ha $|-1| = 1$ e $\pi \in \arg(-1)$.



Tenendo conto della posizione delle radici, si trova
$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$,
$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$,
$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$,
$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

Si ha

$$x^4 + 1 = ((x - x_0)(x - x_3)) ((x - x_1)(x - x_2)) =$$

$$\left((x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\right)\left((x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\right)=$$

$$\left((x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}\right)\left((x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}\right)=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)\ .$$

Esistono $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}\ .$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$1=(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)\ .$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0 \\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} C=-A \\ D=1-B \\ \sqrt{2}A+\sqrt{2}A+1-B=0 \\ A+\sqrt{2}B+-A-\sqrt{2}(1-B)=0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} C=-A \\ D=1-B \\ 2\sqrt{2}A=-1 \\ 2\sqrt{2}B=\sqrt{2} \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} A=-\frac{\sqrt{2}}{4} \\ C=\frac{\sqrt{2}}{4} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{4}\frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\ .$$

Si ha quindi

$$\int\frac{1}{x^4+1}\,dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx=$$

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\log\sqrt{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{4-2}{\sqrt{4-2}}\operatorname{Arctg}\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}}-\right.$$

$$\left.(\sqrt{2}\log\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{-4+2}{\sqrt{4-2}}\operatorname{Arctg}\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}}\right)+C=$$

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\log\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}}+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctg}\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctg}\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+C=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\log\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}}+\operatorname{Arctg}\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\operatorname{Arctg}\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+C\,.$$

Per ogni $y\in\mathbf{R}_+^*$ si ha quindi

$$\int_0^y\frac{1}{x^4+1}\,dx=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\log\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}}+\operatorname{Arctg}\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\operatorname{Arctg}\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]_0^y=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\log\sqrt{\frac{y^2+\sqrt{2}y+1}{y^2-\sqrt{2}y+1}}+\right.$$

$$\left.\operatorname{Arctg}\frac{2y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\operatorname{Arctg}\frac{2y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\operatorname{Arctg}1-\operatorname{Arctg}(-1)\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\log\sqrt{\frac{y^2+\sqrt{2}y+1}{y^2-\sqrt{2}y+1}}+\operatorname{Arctg}\frac{2y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\operatorname{Arctg}\frac{2y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx=$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\log\sqrt{\frac{y^2+\sqrt{2}y+1}{y^2-\sqrt{2}y+1}}+\operatorname{Arctg}\frac{2y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\operatorname{Arctg}\frac{2y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\,.$$

Per ogni $y\in\mathbf{R}$, $y<0$ si ha

$$\int_y^0\frac{1}{x^4+1}\,dx=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\log\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}}+\operatorname{Arctg}\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\operatorname{Arctg}\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]_y^0=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\operatorname{Arctg}1+\operatorname{Arctg}(-1)-\log\sqrt{\frac{y^2+\sqrt{2}y+1}{y^2-\sqrt{2}y+1}}-\right.$$

$$\left.\operatorname{Arctg}\frac{2y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\operatorname{Arctg}\frac{2y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\log\sqrt{\frac{y^2+\sqrt{2}y+1}{y^2-\sqrt{2}y+1}}-\operatorname{Arctg}\frac{2y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\operatorname{Arctg}\frac{2y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\ .$$

Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^4+1}\,dx=$$

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\log\sqrt{\frac{y^2+\sqrt{2}y+1}{y^2-\sqrt{2}y-1}}+\operatorname{Arctg}\frac{2y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\operatorname{Arctg}\frac{2y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\ .$$

Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}0\frac{1}{x^4+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\ .$$

13.6 Integrali impropri su intervalli privati di punti

1. **Esercizio.** Dire se il seguente integrali improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx\ .$$

Risoluzione. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo privato di punti della funzione

$$f:[-1,1]-\{0\}\longrightarrow\mathbf{R},x\longrightarrow\frac{1}{x}\ .$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\,dx$ e $\int_{0}^{1}\frac{1}{x}\,dx$.

L'integrale improprio $\int_{0}^{1}\frac{1}{x}\,dx$ è divergente positivamente.

Quindi l'integrale improprio $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx$ non è convergente.

2. **Esercizio.** Dire se il seguente integrali improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx \; .$$

Risoluzione. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo privato di punti della funzione

$$f : [-1,1]-\{0\} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{|x|}} \; .$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$ e $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$.

Si ha

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx \; .$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1$, l'integrale improprio $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$ è convergente.

Analogamente si vede che l'integrale improprio $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$ è convergente.

Quindi l'integrale improprio $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$ è convergente.

Si ha

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = \lim_{y\to 0} \int_{y}^{1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = \lim_{y\to 0} \int_{y}^{1} x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \lim_{y\to 0} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{y}^{1} =$$

$$2 \lim_{y\to 0} (1-\sqrt{y}) = 2 \; .$$

Analogamente si vede che

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = 2 \; .$$

Si ha quindi

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = 2+2 = 4 \; .$$

3. **Esercizio.** Dire se il seguente integrali improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{x^2-5x+6}\, dx \; .$$

Risoluzione. Si ha $x^2 - 5x + 6 = 0$ se e solo se $x - 2$ o $x = 3$. Si tratta quindi dell'integrale improprio su un intervallo privato di punti della funzione

$$f : [0, 4] - \{2, 3\} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \, .$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri
$\int_0^2 \frac{1}{x^2-5x+6} \, dx$, $\int_2^3 \frac{1}{x^2-5x+6} \, dx$, $\int_3^4 \frac{1}{x^2-5x+6} \, dx$.
Consideriamo $\int_0^2 \frac{1}{x^2-5x+6} \, dx$.
Si tratta quindi dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra della funzione

$$f : [0, 2[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \, .$$

Si ha
$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} \sim_{x \to 2} - \frac{1}{x-2}$.
Quindi l-integrale improprio $\int_0^2 \frac{1}{x^2-5x+6} \, dx$ non è convergente.
Quindi l-integrale improprio $\int_0^4 \frac{1}{x^2-5x+6} \, dx$ non è convergente.