

**PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA 1**  
**(Analisi Matematica T-1)**  
**Corso di Laurea in Ingegneria Informatica**  
**(Prof. Ravaglia)**  
**Anno Accademico 2010/11**

**Simboli:** I= introduzione intuitiva, D = definizione, T = teorema, C = criterio deduttivo, d = dimostrazione, e = enunciato, A = assioma. Le indicazioni numeriche si riferiscono al testo Carlo Ravaglia: Corso di Analisi Matematica 1. Ad esempio l'indicazione "1.2.2 *Maggioranti e minoranti di un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$* : maggiorante (D\*\* 1.2.2.1)" significa la definizione 1.2.2.1 di maggiorante della sottosezione (1.2.2) intitolata "Maggioranti e minoranti di un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$ ". La presenza di asterischi segnala l'importanza dell'argomento; maggiore ne è il numero e più l'argomento è importante.

## 1 Numeri reali

**1.1 Numeri reali:** 1.1.1 *La struttura dei numeri reali:* Opposto (D\* 1.1.1.1), Differenza (D\* 1.1.1.2), Reciproco (D\* 1.1.1.3), quoziente (D\* 1.1.1.4); 1.1.2 *Numeri interi, numeri razionali:* numeri interi (D\* 1.1.2.1), numeri razionali (D\* 1.2.2.2). **1.2 Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme:** 1.2.1 *Massimo e minimo di sottoinsiemi di  $\mathbf{R}$ :* Massimo (D\*\* 1.2.1.1), minimo (D\*\* 1.2.1.2); 1.2.2 *Maggioranti e minoranti di un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$ :* maggiorante (D\*\* 1.2.2.1), minorante (D\*\* 1.2.2.2), massimo come maggiorante (T\* 1.2.2.1) (d); 1.2.3 *Insiemi limitati:* sottoinsiemi di  $\mathbf{R}$  limitati superiormente, limitati inferiormente, limitati (D\*\* 1.2.3.1); 1.2.4 *Estremo superiore ed estremo inferiore di un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$ :* estremo superiore (D\*\*\* 1.2.4.1), estremo inferiore (D\*\*\* 1.2.4.2) 1.2.5 *Massimo ed estremo superiore:* estremo superiore di un insieme avente massimo (T\*\* 1.2.4.1)(d); massimo di un insieme avente estremo superiore (T\*\* 1.2.5.2) (d); 1.2.6 *Completezza di  $\mathbf{R}$  rispetto all'ordine:* completezza di  $\mathbf{R}$  rispetto all'ordine (T\*\*\* 1.2.6.1) (e); 1.2.7 *L'insieme ordinato  $\overline{\mathbf{R}}$ :* L'insieme  $\overline{\mathbf{R}}$  (D\* 1.2.7.1); esistenza dell'estremo superiore di sottoinsiemi di  $\overline{\mathbf{R}}$  (T\* 1.2.7.1) (e), intervalli di di estremi  $a, b$  (D\* 1.2.7.2). intervallo (D\* 1.2.7.3). **1.3 Funzione:** 1.3.1 *Funzione:* Funzione (I\*\*\*); insieme di partenza o dominio di una funzione (I), insieme d'arrivo di una funzione (I), immagine di un elemento mediante una funzione (I), grafico di una funzione (T\*\*) (e); 1.3.2 *Immagine di una funzione:* immagine di una funzione (D\*\* 1.3.2.1), immagine di un insieme (D 1.3.2.2); 1.3.3 *Funzione costante:* funzione costante (D\* 1.3.3.1), grafico di una funzione costante (I\*); 1.3.4 *Funzione identica:* funzione identica (D\* 1.3.4.1), grafico della funzione identica (I\*); 1.3.5 *Restrizione e prolungamento:* restrizione (D\* 1.3.5.1), prolungamento (D\* 1.3.5.2); 1.3.6 *Successione:* successione (D\* 1.3.6.1); 1.3.7 *Funzioni monotone:* funzione crescente, funzione decrescente, funzione strettamente crescente, funzione strettamente decrescente (D\*\* 1.3.7.1), successioni monotone (T 1.3.7.1) (e); 1.3.8 *Estremi di funzioni:* massimo di una funzione (D\*\* 1.3.8.1), minimo di una funzione (D\*\*), maggiorante e minorante di una funzione (D\*), estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione (D\*\*), funzione limitata superiormente (D\*\*), limitata inferiormente (D\*\*), limitata (D\*\*), punto di massimo per una funzione (D\*\* 1.3.8.2); 1.3.9 *Funzioni lineari:* funzioni lineari (D\* 1.3.9.1), grafico di una funzione lineare (I\*); 1.3.10 *Funzioni affini:* funzioni affini (D\* 1.3.10.1), grafico di una funzione affine (I\*). **1.4 Potenze:** 1.4.1 *Potenze con esponente naturale:* potenze con esponente naturale (D\* 1.4.1.1); proprietà delle potenze di esponente naturale (T\* 1.4.1.1) (e) 1.4.2 *Funzioni potenza con esponente naturale:* funzioni potenza di esponente naturale (D\* 1.4.2.1), grafico di una funzione potenza di esponente naturale (I\*), confronto fra i grafici delle funzioni potenza di esponente naturale; 1.4.3 *Funzioni pari, funzioni dispari:* funzioni pari (D 1.4.3.1); funzioni dispari (D 1.4.3.2); 1.4.4 *Binomio di Newton:* fattoriale (D\*\* 1.4.4.1), coefficiente binomiale  $\binom{n}{k}$  (D\*\* 1.4.4.2), espressione del coefficiente binomiale (T\* 1.4.4.1) (d), binomio di Newton (T\*\* 1.4.4.2) (e); 1.4.5 *Potenze con esponente intero:* potenze con esponente intero (D\* 1.4.5.1); 1.4.6 *Funzioni potenza con esponente intero:* funzioni potenza con esponente intero (D\* 1.4.6.1). grafico di una funzione potenza di esponente intero negativo (I\*), confronto fra i grafici delle funzioni potenza di esponente intero negativo (I\*); 1.4.7 *Funzione inversa:* funzione suriettiva (D\* 1.4.7.1), funzione iniettiva (D\*\* 1.4.7.2), funzione biettiva (D\* 1.4.7.3), proprietà fondamentale di una funzione biettiva (T\* 1.4.7.1) (d), funzione inversa (D\*\* 1.4.7.4), caratterizzazione dei valori della funzione inversa (T\* 1.4.7.2) (d), grafico della funzione inversa (I\*), inversa di una funzione iniettiva (D); 1.4.8 *Radice  $n$ -esima aritmetica:* teorema di esistenza della radice  $n$ -esima (T\* 1.4.8.1) (e), radice  $n$ -esima aritmetica (D\*\* 1.4.8.1), proprietà della radice  $n$ -esima aritmetica (T 1.4.8.2) (e); 1.4.9 *Funzione radice  $n$ -esima aritmetica:* funzione radice  $n$ -esima aritmetica (D\* 1.4.9.1), grafico di una funzione radice  $n$ -esima (I\*), la funzione radice aritmetica come funzione inversa della funzione potenza (T\* 1.4.9.1) (d); 1.4.10 *Radice di indice dispari:* teorema di esistenza della radice  $n$ -esima di indice dispari (T 1.4.10.1) (e), radice  $n$ -esima di indice dispari (D 1.4.10.1), funzione radice  $n$ -esima

di indice dispari aritmetica (D 1.4.10.2), grafico di una funzione radice  $n$ -esima di indice dispari ( $I^*$ ). **1.5 Valore assoluto, segno, parte intera:** 1.5.1 Valore assoluto: valore assoluto ( $D^{**}$  1.5.1.1), proprietà del valore assoluto ( $T^*$  1.5.1.1) (e), funzione valore assoluto ( $D^*$  1.5.1.2) grafico della funzione valore assoluto ( $I^*$ ); 1.5.2 Segno: Segno ( $D^*$  1.5.2.1), valore assoluto e segno ( $T$  1.5.2.1) (d), funzione segno ( $D^*$  1.5.2.2), grafico della funzione segno. **1.6 Polinomi reali:** 1.6.1 Polinomi reali: polinomio ( $D, I$ ), espressione di un polinomio in una variabile  $z$  ( $T$  (e),  $I$ ) grado di un polinomio ( $D^*$  1.6.1.1), funzione polinomiale ( $D^*$  1.6.1.2), principio d'identità dei polinomi ( $T^*$  1.6.1.1) (e); 1.6.2 Divisione fra polinomi: Divisione di polinomi ( $T^*$  1.6.2.1) (e), quoziente e resto ( $D^*$  1.6.2.1); 1.6.3 Divisibilità fra polinomi: divisibilità fra polinomi ( $D^*$  1.6.3.1); 1.6.4 Radici di polinomi: radice di un polinomio ( $D^*$  1.6.4.1), radici e divisibilità ( $T^*$  1.4.6.1) (e), radici multiple ( $D^*$  1.6.4.2); 1.6.5 Polinomio di secondo grado: discriminante di un polinomio di 2° grado ( $D^{**}$  1.6.5.1), forma canonica del polinomio di 2° grado ( $T^*$  1.6.5.1) (d), radici del polinomio di 2° ( $T^{**}$  1.6.5.2) (e), fattorizzazione di un polinomio di secondo grado ( $T^{**}$  1.6.5.3) (e) somma e prodotto delle radici di un polinomio di secondo grado (1.6.5.4) (e), segno del polinomio di 2° ( $T^{**}$  1.6.5.5) (e); 1.6.6 Grafico della funzione polinomiale di secondo grado: segno del polinomio e grafico della funzione polinomiale ( $I^*$ ). **1.9 Equazioni reali:** 1.9.2 Equazioni polinomiali reali: esercizi; 1.9.3 Equazioni fratte: esercizi; 1.9.4 Equazioni irrazionali: esercizi; 1.9.5 Equazioni con il valore assoluto: esercizi. **1.10 Disequazioni:** 1.10.2 Disequazioni polinomiali: esercizi; 1.10.3 Disequazioni fratte: esercizi; 1.10.4 Disequazioni irrazionali: esercizi; 1.10.5 Disequazioni con il valore assoluto: esercizi. **1.11 Funzioni definite naturalmente:** 1.11.1 Funzioni reali di variabile reale definite naturalmente: esercizi.

## 2 Numeri complessi

**2.1 Numeri complessi:** 2.1.1 Numeri complessi: l'insieme  $\mathbf{C}$  ( $D^{**}$  2.1.1.1), somma di numeri complessi ( $D^{**}$  2.1.1.2), prodotto di numeri complessi ( $D^{**}$  2.1.1.3); 2.1.2 Numeri reali come numeri complessi: identificazione di un numero reale con un numero complesso ( $D^*$  2.1.2.1), identificazione di  $\mathbf{R}$  con un sottoinsieme di  $\mathbf{C}$  ( $D$  2.1.2.2); 2.1.3 Il numero  $i$ : il numero  $i$  ( $D^{**}$  2.1.3.1), proprietà di  $i$  ( $T^{**}$  2.1.3.1) (d), forma algebrica di un numero complesso ( $T^{**}$  2.1.3.2) (d). **2.2 Parte reale, parte immaginaria, coniugato, modulo:** 2.2.1 Parte reale, parte immaginaria: parte reale e parte immaginaria ( $D^{**}$  2.2.1.1); 2.2.2 Coniugato: coniugato ( $D^*$  2.2.2.1), proprietà del coniugato ( $T^*$  2.2.2.1) (e); 2.2.3 Modulo di un numero complesso: modulo ( $D^{**}$  2.2.3.1), significato geometrico del modulo ( $I^*$ ). proprietà del modulo ( $T^*$  2.2.3.1).

## 3 Lo spazio euclideo $\mathbf{R}^N$

**3.1 L'insieme  $\mathbf{R}^N$ :** 3.1.1 L'insieme  $\mathbf{R}^N$ : l'insieme  $\mathbf{R}^N$  ( $D^*$  3.1.1.1), proiezioni ( $D^*$  3.1.1.2); 3.1.2 Composizione di funzioni: composizione di funzioni ( $D^{**}$  3.1.2.1); 3.1.3 Componenti di una funzione vettoriale: funzioni di  $N$  variabili ( $D^*$  3.1.3.1), funzioni di una variabile ( $D^*$  3.1.3.2) funzioni scalari ( $D^*$  3.1.3.3), funzioni vettoriali ( $D^*$  3.1.3.4); componenti di una funzione vettoriale ( $D^*$  3.1.3.5). **3.2 Lo spazio vettoriale  $\mathbf{R}^N$ :** 3.2.1 Lo spazio vettoriale  $\mathbf{R}^N$  somma in  $\mathbf{R}^N$  ( $D^{**}$  3.2.1.1), prodotto per uno scalare in  $\mathbf{R}^N$  ( $D^{**}$  3.2.1.2); 3.2.2 Traslato di un insieme ( $D^*$  3.2.2.1); 3.2.3 Segmento ( $D^*$  3.2.3.1). **3.3 Lo spazio euclideo  $\mathbf{R}^N$ :** 3.3.1 Prodotto scalare in  $\mathbf{R}^N$ : prodotto scalare ( $D^*$  3.3.1.1); 3.3.2 Norma in  $\mathbf{R}^N$ : norma ( $D^*$  3.3.2.1); proprietà della norma ( $T^*$  3.3.2.1) (e); 3.3.3 Distanza di due punti di  $\mathbf{R}^N$ : distanza ( $D^*$  3.3.3.1); 3.3.4 Insiemi limitati di  $\mathbf{R}^N$ : insiemi limitati ( $D^*$  3.3.4.1); funzioni vettoriali limitate ( $D$  3.3.4.2).

## 4 Topologia di $\mathbf{R}^N$

**4.1 Intorno di un punto in  $\mathbf{R}^N$ :** 4.1.1 Palle in  $\mathbf{R}^N$ : palle ( $D^*$  4.1.1.1); 4.1.2 Intorni in  $\mathbf{R}^N$ : intorno di un punto di  $\mathbf{R}^N$  ( $D^*$  4.1.2.1); 4.1.3 Insiemi aperti: insiemi aperti ( $D^*$  4.1.3.1), caratterizzazione degli insiemi aperti ( $T^*$  4.1.3.1) (d), intervalli aperti come insiemi aperti ( $T^*$  4.1.3.2) (d), palle come insiemi aperti ( $T$  4.1.3.3) (e); 4.1.4 Insiemi chiusi: insiemi chiusi ( $D^*$  4.1.4.1), intervalli chiusi come insiemi chiusi ( $T^*$  4.1.4.1) (d), palle chiuse ( $D$  4.1.4.2), palle chiuse come insiemi chiusi ( $T$  4.1.4.2) (e); 4.1.5 Interno di un insieme: punto interno ( $D^*$  4.1.5.1), caratterizzazione dei punti interni ( $T^*$  4.1.5.1) (d), interno di un insieme ( $D^*$  4.1.5.2); 4.1.6 Chiusura di un insieme: punto di aderenza di un insieme ( $D^*$  4.1.6.1), caratterizzazione dei punti di aderenza ( $T^*$  4.1.6.1) (d), chiusura di un insieme ( $D^*$  4.1.6.2); 4.1.7 Frontiera di un insieme: punto di frontiera ( $D^*$  4.1.7.1), caratterizzazione dei punti di frontiera ( $T^*$  4.1.7.1) (d), frontiera di un insieme ( $D^*$  4.1.7.2); 4.1.8 Punto isolato di un insieme: punto isolato ( $D^*$  4.1.8.1). **4.2 Continuità:** 4.2.1 Continuità: funzione continua in un punto ( $D^{**}$  4.2.1.1), caratterizzazione della continuità in un punto tramite la palla  $B(f(a), \varepsilon)$  ( $T^*$  4.2.1.1) (d),

funzione continua sul dominio ( $D^*$  4.2.1.2); 4.2.2 Restrizione di una funzione continua: restrizione di una funzione continua ( $T^*$  4.2.2.1) (e), carattere locale della continuità ( $T^*$  4.2.2.2) (e); 4.2.3 Operazioni fra funzioni continue: l'insieme di funzioni  $A^B$  ( $D$ ), somma di funzioni ( $D$ ), prodotto di uno scalare per una funzione ( $D$ ), prodotto di funzioni ( $D$ ), quoziente di funzioni ( $D$ ), valore assoluto di una funzione ( $D$ ), potenza di una funzione ( $D$ ), radice di una funzione ( $D$ ); somma e prodotto per uno scalare con funzioni continue ( $T^*$  4.2.3.1) (e), prodotto di funzioni continue ( $T^*$  4.2.3.2) (e), quoziente di funzioni continue ( $T^*$  4.2.3.3) (e), valore assoluto di una funzione continua (e); 4.2.4 Continuità della funzione composta: continuità di una funzione composta ( $T^*$  4.2.4.1) (e); 4.2.5 Continuità per una funzione vettoriale: componenti di una funzione continua ( $T^*$  4.2.5.1) (e); 4.2.6 Alcune funzioni continue: continuità di una funzione costante, della funzione identica, della funzione reciproco in  $\mathbf{R}$ , della funzione valore assoluto in  $\mathbf{R}$ , della funzione potenza con esponente naturale, della funzione potenza con esponente intero, di una funzione polinomiale, di una funzione razionale, della funzione radice aritmetica, della funzione radice di indice dispari, della funzione reciproco in  $\mathbf{C}$ , della funzione parte reale, della funzione parte immaginaria, della funzione coniugato, della funzione valore modulo in  $\mathbf{C}$ , delle proiezioni in  $\mathbf{R}^N$ , della norma ( $T$  4.2.6.1) (e); 4.2.7 Teorema di Weierstrass: insieme compatto ( $D^{**}$  4.2.7.1), teorema di Weierstrass ( $T^{***}$  4.2.7.1) (e); 4.2.8 Teorema del valor intermedio: teorema del valor intermedio ( $T^{***}$  4.2.8.1) (e), zeri di una funzione continua ( $T^{***}$  4.2.8.2) (d). **4.3 Limiti:** 4.3.1 Intorni in  $\mathbf{R}$ : intorno di un punto di  $\mathbf{R}$  ( $D^*$  4.3.1.1); 4.3.2 Intorni destri e intorni sinistri in  $\mathbf{R}$ : intorno destro di un punto ( $D^*$  4.3.2.1), intorno sinistro di un punto ( $D^*$  4.3.2.2); 4.3.3 Gli spazi topologici  $\mathcal{T}_R$ : lo spazio topologico  $\mathbf{R}^N$  ( $I$ ), lo spazio topologico  $\mathbf{R}$  ( $I$ ), gli spazi topologici,  $\mathbf{R}_{(+)}$  e  $\mathbf{R}_{(-)}$  ( $I$ ) 4.3.4 Convergenza: convergenza di una funzione in un punto ad un valore ( $D^{**}$  4.3.4.1); 4.3.5 Limite: funzioni convergenti ( $D^*$  4.3.5.1), unicità del limite ( $T^*$  4.3.5.1) (d), limite ( $D^*$  4.3.5.2); 4.3.6 Limite e continuità: limite in un punto di continuità ( $T^*$  4.3.6.1) (e), continuità in un punto non isolato ( $T^*$  4.3.6.2) (e), limite e prolungamento continuo ( $T^*$  4.3.6.3) (e); 4.3.7 Limite e restrizione: limite di una restrizione ( $T^*$  4.3.7.1) (e), carattere locale della convergenza ( $T^*$  4.3.7.2) (e); 4.3.8 Limiti e operazioni: limite della somma e del prodotto per uno scalare ( $T^*$  4.3.8.1) (e), limite del prodotto ( $T^*$  4.3.8.2) (e), limite del reciproco e del quoziente ( $T^*$  4.3.8.3) (e), 4.3.9 Limiti rispetto a  $\mathbf{R}$ : limite della somma in  $RS$  ( $T$  4.3.9.1) (e), limite del prodotto per uno scalare in  $\mathbf{R}$  ( $T^*$  4.3.9.3) (e), limite del prodotto in  $RS$  ( $T$  4.3.8.4) (e), limite del reciproco in  $\mathbf{R}$  ( $T$  4.3.9.6) (e), limite del quoziente in  $\mathbf{R}$  ( $T$  4.3.9.7) (e), limiti in  $\mathbf{R}$  e valore assoluto; 4.3.10 Alcuni limiti: limite di una costante in  $\pm\infty$ , della funzione identità in  $\pm\infty$ , limite di una funzione potenza con esponente naturale in  $\pm\infty$ , della funzione reciproco in  $\pm\infty$  e in  $0\pm$ , di una funzione potenza con esponente intero in  $\pm\infty$  e in  $0\pm$ , della funzione radice  $n$ -esima aritmetica in  $+\infty$ , della funzione radice  $n$ -esima di indice dispari in  $-\infty$  ( $T^*$  4.3.10.1) (e); 4.3.11 Limite della funzione composta: limite della funzione composta ( $T^*$  4.3.11.1) (e); 4.3.12 Limite di una funzione vettoriale: limite di una funzione vettoriale ( $T^*$  4.3.12.1) (e); 4.3.13 Teorema della permanenza del segno: teorema della permanenza del segno ( $T^*$  4.3.13.1) (d), teorema di conservazione del segno passando al limite ( $T^*$  4.3.13.2) (d), teorema di conservazione della relazione d'ordine passando al limite ( $T^*$  4.3.13.3) (d); 4.3.14 Teorema di confronto per i limiti: teorema di confronto per i limiti ( $T^*$  4.3.14.1) (e), 4.3.15 Limite, limite destro, limite sinistro: limite, limite destro, limite sinistro ( $T^*$  4.3.15.1) (e), 4.3.18 Limite di una funzione polinomiale: limite di una funzione polinomiale in  $\pm\infty$  ( $T^*$  4.3.18.1) (d); 4.3.19 Limite di una funzione razionale: limite di una funzione razionale in  $\pm\infty$  ( $T^*$  4.3.19.1) (d); 4.3.20 Limite di una successione: convergenza per una successione ( $D^*$  4.3.20.1), caratterizzazione della convergenza di una successione ( $T^{**}$  4.3.20.1) (d), sottosuccessione ( $D^*$  4.3.20.1), limite di una sottosuccessione ( $T^*$  4.3.20.2) (e); 4.3.21 Limite di una successione monotona: limite di una successione monotona ( $T^*$  4.3.21.1) (e); 4.3.22 Limite di una successione esponenziale: limite di una successione esponenziale ( $T$  4.3.22.1) (e).

## 5 Confronto asintotico

**5.1 Confronto asintotico:** 5.1.1 Funzione di ordine asintotico inferiore: funzione di ordine asintotico inferiore ad un'altra in un punto ( $D^{**}$  5.1.1.1), una condizione sufficiente per  $f \preceq_a g$  ( $T^*$  5.1.1.1) (e), simbolo di Landau "O" ( $D^*$  5.1.1.2); 5.1.2 Funzioni dello stesso ordine asintotico: Funzioni dello stesso ordine asintotico in un punto ( $D^{**}$  5.1.2.1), condizione necessaria e sufficiente per  $f \simeq_a g$  ( $T^*$  5.1.2.1) (d) una condizione sufficiente per  $f \simeq_a g$  ( $T^*$  5.1.2.2) (d); 5.1.3 Funzioni asintoticamente trascurabili: funzione trascurabile rispetto ad un'altra in un punto ( $D^{**}$  5.1.3.1), simbolo di Landau "o" ( $D^{**}$  5.1.3.2); 5.1.4 Funzioni asintoticamente equivalenti: funzioni asintoticamente equivalenti in un punto ( $D^{**}$  5.1.4.1); equivalenza e trascurabilità ( $T^*$  5.1.4.1) (d); 5.1.5 Funzioni equivalenti e limite: funzioni equivalenti e limite ( $T^*$  5.1.5.1) (e); 5.1.6 Confronto asintotico e composizione di funzioni: confronto asintotico e composizione ( $T^*$  5.1.6.1) (e), 5.1.7 Confronto asintotico e restrizioni: confronto asintotico e restrizione ( $T$ ) (e), carattere locale del confronto asintotici ( $T^*$ ) (e); 5.1.8 Confronto asintotico e somma di funzioni: somma di una funzione con una funzione trascurabile ( $T^*$  5.1.8.1) (e), somma di funzioni di ordine asintotico inferiore e somma di funzioni trascurabili ( $T^*$  5.1.8.2) (e), somma

di funzioni equivalenti al prodotto di una costante per una funzione (T\* 5.1.8.3) (e); 5.1.9 Confronto asintotico e prodotto di funzioni: equivalenza asintotica e prodotto di funzioni (T\* 5.1.9.1) (e), ordine inferiore, trascurabilità e prodotto di funzioni (T\* 5.1.9.2) (e); 5.1.10 Infinitesimi e infiniti: infinitesimi (D\*\* 5.1.10.1), infinito (D\*\* 5.1.10.2), infinitesimo di ordine superiore ad un altro infinitesimo (D\* 5.1.10.3), infinito di ordine superiore ad un altro infinito (D\* 5.1.10.4); 5.1.11 Confronto asintotico per alcune funzioni: confronto asintotico per funzioni potenza con esponente intero (T\*\* 5.1.11.1) (d), confronto per funzioni radice  $n$ -esima aritmetica (T\* 5.1.11.2, punti 1 e 2) (d); equivalenza asintotica per funzioni polinomiali e funzioni razionali (T\* 5.1.11.3) (d), confronto asintotico per successioni esponenziali (T\* 5.1.11.4) (d). **5.2 Principio di sostituzione nei limiti** 5.2.1 Principio di sostituzione nei limiti: principio di sostituzione nei limiti (T\*\*\* 5.2.1.1) (e). **5.3 Sviluppi asintotici affini** 5.3.1 Sviluppo asintotico affine: sviluppo asintotico affine (D\* 5.3.1.1) esistenza dello sviluppo asintotico affine e sua espressione (T\* 5.3.1.1) (e); asintoti (D\*), asintoti orizzontali (D\*), asintoti obliqui (D\*), asintoti verticali (D\*).

## 6 Serie

**6.1 Serie:** 6.1.1 Somma di una serie: serie definita da una successione (D\*\*\* 6.1.1.1), serie convergente (D\*\*\* 6.1.1.2), somma di una serie convergente (D\*\*\* 6.1.1.3), serie divergenti positivamente, serie divergenti negativamente, serie oscillanti (D\*\* 6.1.1.4); 6.1.2 Serie di una costante: comportamento della serie di una costante (T\* 6.1.2.1) (d), 6.1.3 Serie geometrica: serie geometrica (D\*\* 6.1.3.1), convergenza e somma di una serie geometrica (T\*\* 6.1.3.1) (d), serie geometrica con primo termine (D) (T) (e); 6.1.4 Condizione necessaria per la convergenza di una serie: condizione necessaria per la convergenza di una serie (T\*\* 6.1.4.1) (d); 6.1.5 Linearità per le serie: linearità per le serie (T\* 6.1.5.1) (d); 6.1.6 Serie vettoriali: serie vettoriali (T)(e); 6.1.7 Resto di una serie: resto di una serie (D\* 6.1.7.1), proprietà del resto di una serie (T\*\* 6.1.7.1) (d); 6.1.8 Serie armonica: serie armonica (D\*\* 6.1.8.1), non convergenza della serie armonica (T\*\* 6.1.8.1) (e). **6.2 Serie a termini positivi:** 6.2.1 Serie a termini positivi: serie a termini positivi (D\* 6.2.1.1), proprietà fondamentale delle serie a termini positivi (T\*\* 6.2.1.1) (d), serie a termini definitivamente positivi (D) (T) (e); 6.2.2 Criterio del confronto: criterio del confronto (T\*\* 6.2.2.1) (d), criterio del confronto asintotico (I) (T\*\* 6.2.2.2) (d), criterio del confronto asintotico (II) (T\*\* 6.2.2.3) (d); 6.2.3 Serie armonica generalizzata con esponente intero: serie armonica generalizzata (D\*\* 6.2.3.1), comportamento della serie armonica generalizzata (T\*\* 6.2.3.1) (e); 6.2.4 Criterio del rapporto: criterio del rapporto (T\* 6.2.4.1) (e); 6.2.5 Serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^p a^n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p a^n}{n!}$ : comportamento della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^p a^n$  (T\* 6.2.5.1) (d); comportamento della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p a^n}{n!}$  (T\* 6.2.5.2) (d); 6.2.6 Confronto asintotico fra potenze, esponenziali e fattoriale: confronto asintotico fra  $n^p a^n$  e  $n^q b^n$  e confronto asintotico fra successioni esponenziali e successioni potenza (T\*\* 6.2.6.1) (d); confronto asintotico fra  $n^p a^n$  e  $n!$  e confronto asintotico fra esponenziali e fattoriali (T\*\* 6.2.6.2) (d); 6.2.7 Criterio della radice: criterio della radice (T\* 6.2.7.1) (e). **6.3 Serie a termini non necessariamente positivi:** 6.3.1 Serie a segni alterni: criterio di Leibniz (T\* 6.3.1.1), (e), serie armonica a segni alterni (T\* 6.3.1.2) (d). **6.4 Serie assolutamente convergenti:** 6.4.1 Serie assolutamente convergenti: serie assolutamente convergenti (D\*\*\* 6.4.1.1); relazione fra serie convergenti e serie assolutamente convergenti (T\*\*\* 6.4.1.1) (e).

## 7 Serie di potenze

**7.1 Serie di potenze:** 7.1.1 Serie di potenze: Serie di potenze (D 7.1.1.1); 7.1.2 Cerchio di convergenza: proprietà di convergenza per una serie di potenze (T\* 7.1.2.1) (e), raggio di convergenza di una serie di potenze (D\* 7.1.2.1), cerchio di convergenza di una serie di potenze (D\* 7.1.2.2); 7.1.3 Serie geometrica complessa: serie geometrica complessa (D 7.1.3.1), comportamento della serie geometrica complessa (T 7.1.3.1) (d come esercizio); 7.1.4 Serie di potenze  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ : comportamento della serie di potenze  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$  (T 7.1.4.1) (e). **7.2 Continuità della somma di una serie di potenze:** 7.2.1 Continuità della somma di una serie di potenze: funzione somma di una serie di potenze (D 7.2.1.1), continuità della somma di una serie di potenze (T\* 7.2.1.1) (e). **7.3 Comportamento asintotico:** 7.3.1 Equivalenza asintotica: equivalenza asintotica per la somma di una serie di potenze in per  $z \rightarrow 0$  (T\* 7.3.1.1)(d); 7.3.2 Sviluppo asintotico: sviluppo asintotico per la somma di una serie di potenze per  $z \rightarrow 0$  (T\* 7.3.2.1) (d). **7.4 Esponenziale, seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico:** 7.4.1 La serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ : raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$  (T\* 7.4.1.1) (d); 7.4.2 Esponenziale complesso: esponenziale complesso (D\*\* 7.4.2.1), proprietà dell'esponenziale, esponenziale di una somma (T\*\* 7.4.2.1) (punto 1: d, punto 2: e, punti 3 e 4: d); 7.4.3 Numero di Nepero: numero di Nepero (D\*\* 7.4.3.1); 7.4.4 Seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico: raggi di convergenza delle serie di potenze del seno, del coseno, del seno iperbolico, del coseno iperbolico (T\* 7.4.4.1) (d), seno com-

plesso ( $D^{**}$  7.4.4.1), coseno complesso ( $D^{**}$  7.4.4.2), seno iperbolico complesso ( $D^{**}$  7.4.4.3), coseno iperbolico complesso ( $D^{**}$  7.4.4.4); 7.4.5 Proprietà del seno, del coseno, del seno iperbolico, del coseno iperbolico: seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico in 0 ( $T^*$  7.4.5.1) (d), seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico in  $-z$  ( $T^*$  7.4.5.2) (d), formule di Eulero e formule corrispondenti per le funzioni iperboliche ( $T^{**}$  7.4.5.3) (d), relazioni fondamentali sui quadrati del coseno e del seno e sui quadrati del coseno iperbolico e del seno iperbolico ( $T^{**}$  7.4.5.4) (d), formule di addizione per il seno, il coseno, il seno iperbolico ed il coseno iperbolico ( $T^{**}$  7.4.5.5) (e), formule di duplicazione ( $T^*$  7.4.5.7) (d), formule di bisezione ( $T^*$  7.4.5.8) (e), formule di Werner ( $T^*$  7.4.5.9) (d), formule di prostaferesi ( $T^*$  7.4.5.10) (d); 7.4.6 Funzioni esponenziale, seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico complesse e reali: funzioni esponenziale, seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico complesse ( $D$  7.4.6.1), funzioni esponenziale, seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico reali ( $D$  7.4.6.2); 7.4.7 Equivalenze asintotiche per le funzioni elementari: relazioni di equivalenza asintotica in 0 per  $\exp x - 1$ ,  $\sin x$ ,  $1 - \cos x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x - 1$ ,  $x - \sin x$ ,  $\operatorname{sh} x - x$  ( $T^{**}$  7.4.6.1) (d); 7.4.8 Sviluppi asintotici per le funzioni elementari: sviluppi asintotici in 0 di  $\exp x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$  ( $T^{**}$  7.4.8.1) (d).

## 8 Derivate

**8.1 Derivata** 8.1.1 Incremento e rapporto incrementale: incremento di una funzione in un punto ( $D^*$  8.1.1.1), rapporto incrementale di una funzione in un punto ( $D^{***}$  8.1.1.2), 8.1.2 Significato geometrico del rapporto incrementale: significato geometrico del rapporto incrementale ( $I^{***}$ ); 8.1.3 Funzioni derivabili in un punto: funzione derivabile in un punto ( $D^{***}$  8.1.3.1), derivata di una funzione in un punto ( $D^{***}$  8.1.3.2); 8.1.4 Funzione derivabile sul suo dominio: funzione derivabile ( $D^*$  8.1.4.1), funzione derivata prima ( $D^*$  8.1.4.2); 8.1.5 Derivata di una funzione costante: derivata di una funzione costante: ( $T^{**}$  8.1.5.1) (d); 8.1.6 Derivata della funzione identica: derivata della funzione identica: ( $T^{**}$  8.1.6.1) (d); 8.1.7 Derivata della funzione potenza di esponente naturale: derivata di una funzione potenza con esponente naturale ( $T^{**}$  8.1.7.1) (e); 8.1.8 Derivata della funzione reciproco moltiplicativo: derivata della funzione reciproco moltiplicativo ( $T^{**}$  8.1.8.1) (d); 8.1.9 Derivata di una restrizione: derivata di una restrizione ( $T^*$  8.1.9.1) (d); carattere locale della derivabilità ( $T^*$  8.1.9.2) (d); 8.1.10 Derivabilità e continuità: derivabilità e continuità ( $T^{***}$  8.1.10.1), (d); 8.1.11 Derivabilità rispetto a  $\mathbf{R}$ : funzioni derivabili in un punto rispetto ad  $\mathbf{R}$  ( $D^{**}$  8.1.11.1), significato geometrico di derivabilità in un punto rispetto a  $\mathbf{R}$  ( $I^{***}$ ); derivata in un punto rispetto a  $\mathbf{R}$  ( $D^{**}$  8.1.11.2), significato geometrico di derivata in un punto rispetto a  $\mathbf{R}$  ( $I^{***}$ ), equazione della retta tangente ad un grafico in un punto ( $I^{**}$ ); 8.1.12 Approssimazione dell'incremento di una funzione in un punto mediante  $hf'(a)$ : approssimazione dell'incremento di una funzione in un punto mediante  $hf'(a)$  ( $T^{**}$  8.1.12.1) (e), differenziale di una funzione in un punto ( $D$ ), differenziale di una funzione in un punto ( $D^*$  8.1.12.1), derivata ed equivalenza asintotica ( $T^*$  8.1.12.2) (d); 8.1.13 Derivata destra e derivata sinistra: derivabilità da destra e da sinistra ( $D$  8.1.13.1), derivata destra e derivata sinistra ( $D$  8.1.13.2), derivata, derivata destra e derivata sinistra ( $T^*$  8.1.13.1); 8.1.14 Funzione valore assoluto e derivata: derivata della funzione valore assoluto su  $\mathbf{R}^*$  ( $T^*$  8.1.14.1) (d), non derivabilità della funzione valore assoluto in 0 ( $T^*$  8.1.14.2) (d); 8.1.15 Derivata e operazioni: derivata della somma di funzioni e del prodotto di una costante per una funzione ( $T^{**}$  8.1.15.1) (d), derivata di una funzione polinomiale ( $T$  8.1.15.2) (d), derivata del prodotto di due funzioni ( $T^{**}$  8.1.15.3) (d), derivata della reciproca moltiplicativa di una funzione e del quoziente di due funzioni ( $T^{**}$  8.1.15.4) (d); derivata di una funzione potenza con esponente intero ( $T^*$  8.1.15.5) (d); 8.1.16 Derivata della funzione composta: derivata della funzione composta ( $T^{**}$  8.1.16.1) (e); 8.1.17 Derivata della funzione inversa: derivata della funzione inversa ( $T^{**}$  8.1.17.1) (e); 8.1.18 Derivata della funzione radice aritmetica: derivata della funzione radice aritmetica ( $T^{**}$  8.1.18.1) (d); 8.1.19 Derivata di una funzione di variabile complessa: derivabilità e derivata per una funzione di variabile complessa ( $D$ ). **8.2 Derivate di ordine superiore:** 8.2.1 Derivate di ordine superiore: funzione derivabile 2 volte in un punto ( $D^*$  8.2.1.1), derivata seconda di una funzione in un punto ( $D^*$  8.2.1.2), funzione derivabile 2 volte su di un insieme ( $D$  8.2.1.3), funzione derivata seconda di una funzione ( $D$  8.2.1.4); funzione derivabile  $n$  volte in un punto ( $I$ ), derivata  $n$ -esima di una funzione in un punto ( $I$ ), funzione derivabile  $n$  volte su di un insieme ( $I$ ), funzione derivata  $n$ -esima di una funzione ( $I$ ); **8.2.2 Classi di funzioni:** funzioni di classe  $C^1$  ( $D^*$  8.2.1.1), funzioni di classe  $C^n$  ( $D$  8.2.1.2), funzioni di classe  $C^\infty$  ( $D$  8.2.1.3). **8.2 Derivata di una serie di potenze:** 8.3.1 Derivata di una serie di potenze: Derivata di una serie di potenze ( $T^*$  8.3.1.1) (e); 8.3.2 Derivata delle funzioni elementari: derivata della funzione esponenziale ( $T^{**}$  8.3.2.1) (d), derivata della funzione seno ( $T^{**}$  8.3.2.2) (e), derivata della funzione coseno ( $T^{**}$  8.3.2.3) (e), derivata della funzione seno iperbolico ( $T^{**}$  8.3.2.4) (e), derivata della funzione coseno iperbolico ( $T^{**}$  8.3.2.5) (e). **8.4 Estremanti relativi e derivata:** 8.4.1 Estremanti relativi: punti di massimo relativo ( $D^{**}$  8.4.1.1), punti di minimo relativo ( $D^{**}$  8.4.1.2), estremante relativo ( $D^*$  8.4.1.3); 8.4.2 Estremanti relativi e derivata: estremanti relativi e derivata ( $T^{***}$  8.4.2.1) (d). **8.5 Teorema del valor medio:** 8.5.1 Teorema di Rolle: teorema di Rolle ( $T^{**}$  8.5.1.1) (d); 8.5.2 Teorema di

Lagrange: teorema di Lagrange (T\*\*\* 8.5.2.1) (d); 8.5.3 Funzioni con derivata nulla: funzioni con derivata nulla (T\*\* 8.5.3.1) (d); 8.5.4 Funzioni monotone e derivata prima: funzioni monotone e derivate (T\*\*\* 8.5.4.1) (d), funzioni strettamente monotone e derivata prima (T\*\*\* 8.5.4.2) (d); 8.5.5 Regole di de l'Hospital: regole di De Hospital (T\* 8.5.5.1) (e); 8.5.6 Derivata come limite della derivata prima: derivata come limite della derivata prima (T\* 8.5.6.1) (d). **8.6 Funzioni convesse:** 8.6.1 Funzioni convesse e funzioni concave: funzioni convesse (D\* 8.6.1.1), funzioni concave (D\* 8.6.1.2), funzioni strettamente convesse (D\* 8.6.1.3), funzioni strettamente concave (D\* 8.6.1.4); 8.6.2 Proprietà delle funzioni convesse: continuità di una funzione convessa nei punti interni (T 8.6.2.1) (e), derivabilità da destra e da sinistra di una funzione convessa nei punti interni (T 8.6.2.2) (e); 8.6.3 Funzioni derivabili convesse: funzioni convesse e tangente al grafico (T 8.6.3.1) (e), funzioni convesse e crescita della derivata prima (T 8.6.3.2) (e); 8.6.4 Raccordo fra funzioni convesse: raccordo fra funzioni convesse (T 8.6.4.1) (e); 8.6.5 Funzioni convesse e segno della derivata seconda: funzioni convesse e segno della derivata seconda (T\* 8.6.5.1) (e). funzioni strettamente convesse e segno della derivata seconda (T\* 8.6.5.2) (e); **8.7 Polinomio di Taylor:** 8.7.1 Polinomio di Taylor: polinomio di Taylor di una funzione in un punto (D\*\* 8.7.1.1), proprietà fondamentale del polinomio di Taylor (T\*\* 8.7.1.1) (e), formula di Taylor con resto di Peano (T\*\*) (d); 8.7.2 Estremanti relativi e derivate di ordine superiore: rapporto fra estremanti relativi e derivate di ordine superiore al primo (T\*\* 8.7.2.1) (d).

## 9 Funzioni elementari reali

**9.1 Funzione esponenziale reale:** 9.1.1 Esponenziale reale: stretta positività di  $\exp z$  (T\*\* 9.1.1.1) (d); 9.1.2 Funzione esponenziale reale: proprietà della funzione esponenziale reale (T\*\* 9.1.2.1) (d); 9.1.3 Logaritmo naturale: logaritmo naturale, (D\*\* 9.1.3.1), proprietà del logaritmo naturale (T\*\* 9.1.3.1) (e); 9.1.4 Funzione logaritmo naturale: funzione logaritmo naturale (D 9.1.4.1), proprietà della funzione logaritmo naturale (T\*\* 9.1.4.1) (punti (1), (2): (e), punto (3): (d)); 9.1.5 Logaritmo ed equivalenza asintotica: logaritmo ed equivalenza asintotica (T\* 9.1.5.1) (e); 9.1.6 L'equivalenza asintotica  $\log(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ : l'equivalenza asintotica  $\log(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$  (T\* 9.1.6.1) (d). **9.2 Potenze:** 9.2.1 Potenze di esponente reale e di esponente complesso: Potenze di esponente complesso (D\*\* 9.2.1.1), esponenziale come potenza di base  $e$  (T\*\* 9.2.2.1) (d); proprietà delle potenze di esponente complesso (T\* 9.2.1.2) (d), radice  $n$ -esima aritmetica come potenza (T) (e); 9.2.2 Proprietà fondamentale del numero di Nepero: numero di Nepero come limite (T\*\* 9.2.2.1) (d). **9.3 Funzioni potenza di esponente reale:** 9.3.1 Funzioni potenza di esponente reale: Funzioni potenza di esponente reale (D\* 9.3.1.1), proprietà delle funzioni potenza di esponente reale (T\*\* 9.3.1.1) (punti (1), (4), (5), (6), (7), (8): (e), punti (2), (3): (d)); 9.3.2 Potenze con esponente strettamente positivo: potenze con esponente strettamente positivo (D\* 9.3.2.1) (d); 9.3.3 Confronto asintotico fra le funzioni potenza: confronto asintotico fra funzioni potenza (T\*\* 9.3.3.1) (d); 9.3.4 Equivalenza asintotica e potenza di una funzione: equivalenza asintotica e potenza di una funzione (T\* 9.3.4.1) (e); 9.3.5 Serie armonica generalizzata: serie armonica generalizzata di esponente reale (D 9.3.5.1), comportamento della serie armonica generalizzata di esponente reale (T\*\* 9.3.5.1) (e); 9.3.6 Serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} a^n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} a^n}{n!}$ : proprietà della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} a^n$  (T\* 9.3.6.1) (e), proprietà della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} a^n}{n!}$  (T\* 9.3.6.2) (e). 9.3.7 La serie di potenze  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} z^n$ : proprietà della serie di potenze  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} z^n$  (T) (e). **9.4 Funzione esponenziale di base  $a$ :** 9.4.1 Funzione esponenziale di base  $a$ : funzione esponenziale di base  $a$  (D\* 9.4.1.1), proprietà della funzione esponenziali di base  $a$  (T\*\* 9.4.1.1) (punti (1), (4), (5), (6), (7): (e), punti (2), (3): (d)); 9.4.2 Confronto asintotico fra esponenziali: confronto asintotico fra funzioni esponenziali (T\*\* 9.4.2.1) (d); 9.4.3 Confronto asintotico fra esponenziali e potenze: confronto asintotico fra esponenziali e potenze (T\*\* 9.4.3.1) (e), limite del prodotto fra potenze ed esponenziali (T\* 9.4.3.2) (d); 9.4.4 Logaritmi: logaritmi di base  $a$  (D\*\* 9.4.4.1), proprietà dei logaritmi di base  $a$  (T\* 9.4.4.1) (e); 9.4.5 Funzione logaritmo di base  $a$ : funzione logaritmo di base  $a$  (D 9.4.5.1); proprietà delle funzioni logaritmiche di base  $a$  (T\*\* 9.4.5.1) (punti (1), (2), (3), (4), (5), (8): (e), punti (6), (7): (d)); 9.4.6 Confronto asintotico fra logaritmi e potenze: confronto asintotico fra logaritmi e potenze (T\*\* 9.4.6.1) (e). limite del prodotto fra potenze e logaritmi (T\* 9.4.6.2) (d). **9.5 Funzioni iperboliche:** 9.5.1 Funzione seno iperbolico: proprietà della funzioni seno iperbolico reale (T\* 9.5.1.1) (e), equivalenze asintotiche per la funzione seno iperbolico per  $x \rightarrow \pm\infty$  (T 9.5.1.2) (d); 9.5.2 Funzione coseno iperbolico: proprietà della funzione coseno iperbolico reale (T\* 9.5.2.1) (e), equivalenze asintotiche per la funzione coseno iperbolico per  $x \rightarrow \pm\infty$  (T 9.5.1.2) (d); 9.5.3 Tangente iperbolica: tangente iperbolica di un numero reale (D\* 9.5.3.1); proprietà della tangente iperbolica (T 9.5.3.1) (e); 9.5.4 Funzione tangente iperbolica: funzione tangente iperbolica (D 9.5.4.1), proprietà della funzione tangente iperbolica (T\* 9.5.4.1) (punti (1), (2), (4), (5), (6), (7), (8): (e), punto (3): (d)), equivalenza asintotica per la funzione tangente iperbolica per  $x \rightarrow 0$  (T\* 9.5.4.2) (e); 9.5.5 Cotangente iperbolica: cotangente iperbolica (D); 9.5.6 Argomento seno iperbolico: argomento seno iperbolico di un numero reale (D\* 9.4.6.1), proprietà dell'argomento seno iperbolico (T 9.4.6.1) (e); 9.5.7 Funzione argomento seno iperbolico: funzione argomento seno iperbolico (D 9.5.7.1), proprietà della

funzioni argomento seno iperbolico (T\* 9.5.7.1) (punti (1), (2), (3), (4), (5), (6), (9), (10): (e), punti (7), (8): (d)), equivalenza asintotica per la funzione argomento seno iperbolico per  $x \rightarrow 0$  (T\* 9.5.7.2) (e) equivalenze asintotiche per la funzione argomento seno iperbolico per  $x \rightarrow \pm\infty$  (T\* 9.5.7.3) (e); 9.5.8 Argomento coseno iperbolico: proprietà di una restrizione del coseno iperbolico (T 9.5.8.1) (e), argomento coseno iperbolico di un numero reale (D\* 9.5.8.1), proprietà dell'argomento coseno iperbolico (T 9.5.8.1) (e); 9.5.9 Funzione argomento coseno iperbolico: funzione argomento coseno iperbolico (D 9.5.9.1), proprietà della funzioni argomento coseno iperbolico (T\* 9.5.9.1) (punti (1), (2), (3), (4), (5), (8), (9): (e), punti (6), (7): (d)) equivalenza asintotica per la funzione argomento seno iperbolico per  $x \rightarrow +\infty$  (T 9.5.7.2) (e); 9.5.10 Argomento tangente iperbolica: argomento tangente iperbolica di un numero reale (D\* 9.5.10.1), proprietà dell'argomento tangente iperbolica (T 9.5.10.1) (e); 9.5.11 Funzione argomento tangente iperbolica: funzione argomento tangente iperbolica (D 9.5.11.1), proprietà della funzione argomento tangente iperbolica (T 9.5.11.1) (punti (1), (2), (3), (4), (5), (6), (9), (10): (e), punti (7), (8): (d)), equivalenza asintotica per la funzione argomento tangente iperbolica (T\* 9.5.11.2) (e). **9.6 Funzioni circolari:** 9.6.1 Il numero  $\pi$ : zeri della funzione coseno reale (T 9.6.1.1) (e), numero  $\pi$  (D\* 9.6.1.1); 9.6.2 Proprietà di  $\pi$ : seno e coseno di  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3}{2}\pi$ ,  $2\pi$  (T\*\* 9.6.2.1) (e), seno e coseno di  $\frac{\pi}{2} - x$ ,  $\frac{\pi}{2} + x$ ,  $\pi - x$ ,  $\pi + x$ ,  $2\pi + x$  (T\*\* 9.6.2.2) (e), seno e coseno di  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  (T\*\* 9.6.2.3) (e); 9.6.3 Funzione seno reale: proprietà della funzione seno reale (T\*\* 9.6.3.1) (e), punti con uguale seno (T\*\* 9.6.3.2) (e); 9.6.4 Funzione coseno reale: proprietà della funzione coseno reale (T\*\* 9.6.4.1) (e), punti con uguale coseno (T\*\* 9.6.4.2) (e) punti con uguale seno e coseno (T 9.6.4.3) (e); 9.6.5 Tangente: tangente di un numero reale (D\*\* 9.6.5.1); proprietà della tangente (T\* 9.6.5.1) (e), tangente di  $x + \pi$  (T\*\* 9.6.5.2), tangente di  $0$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  (T\*\* 9.6.5.3) (e); 9.6.6 Funzione tangente: funzione tangente (D 9.6.6.1), proprietà della funzione tangente (T\*\* 9.6.6.1) (punti (1), (2), (3), (5), (6), (7), (8), (9), (10): (e), punto (4): (d)); punti con uguale tangente (T\*\* 9.6.6.2) (e); equivalenza asintotica per la funzione tangente (T\*\* 9.6.6.3) (e); 9.6.7 Cotangente: cotangente (D\* 9.6.7.1), funzione cotangente (D 9.6.7.1), derivata della funzione cotangente (T\*\*) (d); 9.6.8 Arcoseno: proprietà di una restrizione del seno (T 9.6.8.1) (e), arcoseno di un numero reale (D\*\* 9.6.8.1), proprietà dell'arcoseno (T 9.6.8.1) (e); 9.6.9 La funzione arcoseno: funzione arcoseno (D 9.6.9.1), proprietà della funzioni arcoseno (T\* 9.6.9.1) (punti (1), (2), (3), (4), (5), (8), (9): (e), punti (6), (7): (d)), equivalenza asintotica per la funzione arcoseno (T\*\* 9.6.6.2) (e); 9.6.10 Arcocoseno: proprietà di una restrizione del coseno (T 9.6.10.1) (e), arcocoseno di un numero reale (D\*\* 9.6.10.1), proprietà dell'arcocoseno (T\* 9.6.10.1) (e), 9.6.11 Funzione arcocoseno: funzione arcocoseno (D 9.6.11.1), proprietà della funzioni arcocoseno (T\* 9.6.11.1) (punti (1), (2), (3), (7), (8): (e), punti (4), (5): (d)); 9.6.12 Arcotangente: proprietà di una restrizione della tangente (T 9.6.12.1) (e), arcotangente di un numero reale (D\*\* 9.6.12.1), proprietà dell'arcotangente (T 9.6.12.1) (e); 9.6.13 Funzione arcotangente: funzione arcotangente (D 9.6.13.1), proprietà della funzione arcotangente (T\*\* 9.6.13.1) (punti (1), (2), (3), (4), (5), (8): (e), punti (6), (7): (d)), equivalenza asintotica per la funzione arcotangente (T\*\* 9.6.13.2) (e).

## 10 Argomento di un numero complesso

**10.1 Argomento di un numero complesso:** 10.1.1 La circonferenza unitaria: circonferenza unitaria (D\* 10.1.1.1); 10.1.2 La funzione  $e^{it}$ : proprietà della funzione  $e^{it}$  (T\* 10.1.2.1) (e); 10.1.3 Argomento di un numero complesso: relazione  $t$  è un argomento di un numero complesso (D\*\*\* 10.1.3.1), significato geometrico della relazione di  $t$  è un argomento di un numero complesso (I\*\*\*), esistenza di un argomento di un numero complesso (T 10.1.3.1) (e), argomenti di uno stesso numero complesso (T\* 10.1.3.2) (e), l'argomento di un numero complesso (D\* 10.1.3.2); 10.1.4 Forma esponenziale di un numero complesso: forma esponenziale di un numero complesso (T\*\* 10.1.4.1) (d), caratterizzazione della rappresentazione  $z = \rho e^{it}$  (T\* 1.4.2.2) (d), forma trigonometrica di un numero complesso (T\*\* 10.1.4.3) (d); 10.1.5 Numeri complessi uguali: numeri complessi uguali e rispettivi moduli ed argomenti (T\* 10.1.5.1) (e); 10.1.6 Espressione dell'argomento di un numero complesso: espressione di un argomento di un numero complesso (T\* 10.1.6.1) (e); 10.1.7 Formula di de Moivre: argomento del prodotto (T\*\* 10.1.7.1) (d), argomento di una potenza (T\*\* 10.1.7.2) (d). **10.2 Radici complesse:** 10.2.1 Radici complesse: definizione di radice complessa (D\* 10.2.1.1), radice  $n$ -esima di 0 (T\* 10.2.1.1) (d), espressione delle radici complesse (T\*\* 10.2.1.2) (e), numero delle radici complesse (T\* 10.2.1.3) (e), posizione delle radici  $n$ -esime complesse (I\*\*); 10.2.2 Radici del polinomio di secondo grado complesso: radici del polinomio di secondo grado complesso (T\* 10.2.2.1) (e), radici complesse di un polinomio di secondo grado a coefficienti reali (T 10.2.2.1) (e). **10.3 Logaritmi complessi:** 10.3.1 Radici complesse: definizione di logaritmo complesso (D\* 10.3.1.1), non esistenza dei logaritmi complessi di 0 (T\* 10.3.1.1) (d), espressione dei logaritmi complessi (T\* 10.3.1.2) (e), posizione dei logaritmi complessi (I\*\*);

## 11 Primitive e integrali

**11.1 Primitive:** 11.1.1 Primitiva: primitiva di una funzione ( $D^{***}$  11.1.1.1), primitiva di una somma e del prodotto di una costante per una funzione ( $T^*$  11.1.1.1) (d); 11.1.2 Primitive di funzioni su un intervallo di  $\mathbf{R}$ : primitive di una stessa funzione ( $T^{**}$  11.1.2.1) (d); insieme delle primitive ( $T^*$  11.1.2.2) (d); 11.1.3 Primitiva di una funzione continua: esistenza della primitiva di una funzione continua ( $T^{**}$  11.1.3.1) (e). **11.2 Integrale indefinito** 11.2.1 Integrale indefinito: Integrale indefinito ( $D^{***}$  11.2.1.1); 11.2.2 Integrali indefiniti di base: integrali indefiniti di base ( $T^{**}$  11.2.2.1) (d); 11.2.3 Integrazione infinita per decomposizione: integrale indefinito del reciproco di  $x^2 - 1$  ( $T$  11.2.3.1) (d come esercizio), integrale indefinito di potenze di esponenti 2 e 4 del seno, del coseno, del seno iperbolico, del coseno iperbolico ( $T$  11.2.3.2 (d come esercizio), integrale indefinito del quadrato della tangente, della cotangente, della tangente iperbolica, della cotangente iperbolica ( $T$  11.2.3.3) (d come esercizio); 11.2.4 Integrali indefiniti immediati: primitiva di  $(f \circ \phi) \cdot \phi'$  ( $T^{**}$  11.2.4.1) (d); integrale indefinito del reciproco del polinomio  $x^2 + a^2$ , ( $T$  11.2.4.2) (d come esercizio), integrale indefinito del reciproco della radice di  $a^2 - x^2$ ,  $a^2 + x^2$ ,  $x^2 - a^2$  ( $T$  11.2.4.3) (d come esercizio), integrale indefinito della tangente, della cotangente, della tangente iperbolica, della cotangente iperbolica ( $T$  11.2.4.4) (d come esercizio), integrale indefinito del cubo del seno, del coseno, del seno iperbolico, del coseno iperbolico ( $T$  11.2.4.5) (d come esercizio); 11.2.5 Cambiamento di variabile negli integrali indefiniti: cambiamento di variabile negli integrali indefiniti ( $T$  11.2.5.1) (I), integrale indefinito della cosecante, della secante, della cosecante iperbolica, della secante iperbolica ( $T$  11.2.5.2 (d come integrale definito e come esercizio), integrale indefinito della radice di  $1 - x^2$ ,  $1 + x^2$ ,  $x^2 - 1$  ( $T$  11.2.5.3) (d come integrale definito e come esercizio), integrale indefinito della radice di  $a^2 - x^2$ ,  $a^2 + x^2$ ,  $x^2 - a^2$  ( $T$  11.2.5.4) (d come integrale definito e come esercizio); 11.2.6 Integrazione indefinita per parti: integrazione indefinita per parti ( $T$  11.2.6.1) (I), integrale del prodotto fra potenze ed esponenziali (d come integrale definito e come esercizi), integrale del prodotto fra potenze e seni e coseni (d come integrale definito e come esercizi); integrale indefinito del logaritmo ( $T$  11.2.6.2) (d come integrale definito e come esercizio), integrale indefinito del prodotto di una potenza e di un logaritmo ( $T$  11.2.6.3) (d come integrale definito e come esercizio), integrale dell'inversa delle funzioni circolari ed iperboliche ( $T$  11.2.6.4) (d come integrale definito e come esercizio), integrale del prodotto fra esponenziali seni o coseni ( $T$  11.2.6.5) (d come integrale definito e come esercizio); 11.2.7 Integrazione indefinita delle funzioni razionali: riduzione al caso del grado del numeratore strettamente inferiore al grado del denominatore ( $T^*$ ) (d), decomposizione di una funzione razionale in fratti semplici ( $T^*$  11.2.7.1) (e) integrale  $\int \frac{1}{x^2+px+c} dx$  ( $T$  11.2.7.2) (d come esercizio), integrale  $\int \frac{ax+b}{x^2+px+c} dx$  ( $T$  11.2.7.3) (d come esercizio), formula di ricorrenza per l'integrale  $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$  ( $T$  11.2.7.4) (e), integrale  $\int \frac{1}{(x^2+px+c)^n} dx$  ( $T$  11.2.7.5) (d come esercizio), integrale  $\int \frac{ax+b}{(x^2+px+c)^n} dx$  ( $T$  11.2.7.6) (d come esercizio). **11.3 Integrale come variazione di primitiva:** 11.3.1 Integrale come variazione di primitiva: variazione di una funzione ( $D^*$  11.3.1.1), integrale di una funzione continua ( $D^{***}$  11.3.1.2); 11.3.2 Additività dell'integrale: additività dell'integrale ( $T^{**}$  11.3.2.1) (d); 11.3.3 Funzione integrale: funzione integrale ( $D^*$  11.3.3.1); derivata della funzione integrale ( $T^*$  11.3.3.1) (d); 11.3.4 Linearità dell'integrale: linearità dell'integrale ( $T^{**}$  11.3.4.1) (d); 11.3.5 Teorema della media integrale: teorema della media integrale ( $T^{**}$  11.3.5.1) (d), significato geometrico dell'integrale ( $I^{***}$ ), significato geometrico del teorema della media integrale ( $I^*$ ), integrale come somma di infinite quantità infinitamente piccole (I); 11.3.6 Positività dell'integrale: integrale di funzioni positive ( $T^{**}$  11.3.6.1) (d), conservazione dell'ordine sotto il segno di integrale ( $T^{**}$  11.3.6.2) (d) valore assoluto di un integrale ( $T^{**}$  11.3.6.3) (d); 11.3.7 Integrazione per sostituzione: integrazione per sostituzione ( $T^{**}$  11.3.7.1) (d); 11.3.8 Integrazione per parti: integrazione per parti ( $T^{**}$  11.3.8.1) (d); 11.3.9 Integrali definiti di funzioni razionali: integrali definiti di funzioni razionali (d come procedimento negli esercizi); 11.3.10 Integrali definiti di alcune funzioni irrazionali: integrali definiti di alcune funzioni irrazionali (d come procedimento negli esercizi); 11.3.11 Integrali definiti di alcune funzioni trascendenti: integrali definiti di alcune funzioni trascendenti (d come procedimento negli esercizi). **11.4 Formula di Taylor:** 11.4.1 Formula di Taylor: formula di Taylor con resto integrale ( $T^*$  11.4.1.1) (e), formula di Taylor con resto di Lagrange ( $T^*$  11.4.1.2) (e).

## 12 Sviluppi in serie

**12.1 Integrale della somma di una serie di potenze:** 12.1.1 Primitiva della somma di una serie di potenze: primitiva della somma di una serie di potenze ( $T^*$  12.1.1.1) (e), 12.1.2 Integrale della somma di una serie di potenze: integrale della somma di una serie di potenze ( $T^*$  12.1.2.1) (e); **12.2 Serie logaritmica:** 12.2.1 Serie logaritmica: sviluppo in serie di  $\log(1+x)$  ( $T^{**}$  12.2.1.1) (d), sviluppo asintotico in 0 di  $\log(1+x)$  ( $T^{**}$  12.2.1.2) (d). **12.3 Sviluppo in serie dell'arcotangente:** 12.3.1 Sviluppo in serie dell'arcotangente: sviluppo in serie dell'arcotangente ( $T^{**}$  12.3.1.1) (d) equivalenza asintotica in 0 di  $\text{Arctg } x$  e  $x - \text{Arctg } x$  ( $T^{**}$  12.3.1.2)



(d) sviluppo asintotico in 0 di  $\text{Arctg } x$  ( $T^{**}$  12.3.1.3) (d). **12. 4 Serie binomiale:** 12.4.1 Serie binomiale: coefficiente binomiale  $\binom{a}{n}$  ( $D^{**}$  12.4.1.1), sviluppo in serie di  $(1+x)^a$  ( $T^{**}$  12.4.1.1) (e); equivalenza asintotica in 0 di  $(1+x)^a - 1$  ( $T^{**}$  12.4.1.2) (d); sviluppo asintotico in 0 di  $(1+x)^a$  ( $T^{**}$  12.4.1.3) (d).

## 13 Integrali impropri

**13.1 Integrali impropri:** 13.1.2 *Integrale improprio su una semiretta positiva:* integrale improprio su di una semiretta positiva ( $D$  13.1.2.1), integrale improprio su di una semiretta positiva convergente ( $D^{***}$  13.1.2.2), valore di un integrale improprio su una semiretta positiva ( $D^{***}$  13.1.2.3), integrale improprio su di una semiretta positiva divergente ( $D^{**}$  13.1.2.4); 13.1.3 *Integrale improprio su una semiretta negativa:* integrale improprio su di una semiretta negativa ( $D$  13.1.3.1), integrale improprio su di una semiretta negativa convergente ( $D^{***}$  13.1.3.2), valore di un integrale improprio su una semiretta negativa ( $D^{***}$  13.1.3.3), integrale improprio su di una semiretta negativa divergente ( $D^{**}$ ); 13.1.4 *Integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra:* integrale improprio su di un intervallo limitato aperto a destra ( $D$  13.1.4.1), integrale improprio su di un intervallo limitato aperto a destra convergente ( $D^{***}$  13.1.4.2), valore di un integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra convergente ( $D^{***}$  13.1.4.3), integrale improprio su di un intervallo limitato aperto a destra divergente ( $D^{**}$ ); 13.1.5 *Integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra:* integrale improprio su di un intervallo limitato aperto a sinistra ( $D$  13.1.5.1), integrale improprio su di un intervallo limitato aperto a sinistra convergente ( $D^{***}$  13.1.5.2), valore di un integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra convergente ( $D^{***}$  13.1.5.3), integrale improprio su di un intervallo limitato aperto a sinistra divergente ( $D^{**}$ ); 13.1.6 *Integrale improprio su un intervallo limitato ed integrale:* integrale improprio di una funzione prolungabile per continuità ( $T^*$  13.1.6.1) (e); 13.1.7 *Significato geometrico del valore di un integrale improprio:* significato geometrico del valore di un integrale improprio ( $I$ ); 13.1.9 *Integrale improprio di una costante su una semiretta:* integrale improprio di una costante su una semiretta ( $T^*$  13.1.9.1) (d), 13.1.10 *Integrale improprio di un esponenziale:* integrale improprio dell'esponenziale su una semiretta ( $T^{**}$  13.1.10.1) (d); 13.1.11 *Integrale improprio di potenze:* integrale improprio di una potenza su una semiretta ( $T^{**}$  13.1.11.1) (d), integrale improprio di una potenza su un intervallo limitato ( $T^{**}$  13.1.11.2) (d); 13.1.12 *Linearità per gli integrali impropri:* linearità per gli integrali impropri ( $T^*$  13.1.12.1) (d). 13.1.13 *Proprietà del resto per l'integrale improprio:* resto per un integrale improprio ( $T^*$  13.1.13.1) (e). **13.2 Integrali impropri di funzioni positive:** 13.2.1 *Integrali impropri di funzioni positive proprietà fondamentale per l'integrale improprio di funzioni positive* ( $T^*$  13.2.1.1) (e); 13.2.2 *Criterio del confronto:* criterio del confronto ( $T^{**}$  13.2.2.1) (e), criterio del confronto asintotico parte (I) ( $T^{**}$  13.2.2.2) (e), criterio del confronto asintotico parte (II) ( $T^{**}$  13.2.2.3) (e); 13.2.3 *Integrale improprio di  $x^\alpha a^x$ :* integrale improprio di  $x^\alpha a^x$  ( $T^*$  13.2.3.1) (e); **13.3 Assoluta convergenza:** 13.3.1 *Integrali impropri assolutamente convergenti:* Integrali impropri assolutamente convergenti ( $D^{***}$  13.3.1.1), relazione fra integrali impropri convergenti e integrali impropri assolutamente convergenti ( $T^{***}$  13.3.1.1) (e). **13.4 Altri tipi di integrali impropri:** 13.4.1 *Integrale improprio su di un intervallo aperto:* integrale improprio su di un intervallo aperto convergente ( $D^*$  13.4.1.1), valore di un integrale improprio su di un intervallo aperto convergente ( $D^*$  13.4.1.2); 13.4.2 *Integrale improprio su di un intervallo privato di punti:* convergenza per integrale improprio su di un intervallo privato di punti ( $D$  13.4.2.1), valore di un integrale improprio su di un intervallo privato di punti ( $D$  13.4.2.2).