

Analisi Matematica 1 - 9/1/12 - Compito 1 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2-1}}{|x|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$, $\sqrt{\frac{2}{e}} \approx 0.86$. (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{7^n}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^4 = 3 - 3i.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = e^i.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = (\sin(5x^2 + 3))^e;$$

(a) (non assegnata) determinare il dominio naturale di f ;

(b) determinare l'insieme D degli $x \in \text{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e in tali x calcolare la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n + 3}{n^2 3^n} z^n.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Sia

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x^2 & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ \sin x & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases} ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di f (si può usare l'approssimazione $\sin 1 \approx 0.84$);
- (b) determinare l'immagine di f ;
- (c) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo e, in caso affermativo, determinarli;
- (d) dire se f è limitata superiormente, se f è limitata inferiormente, se f è limitata;
- (e) determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f rispetto allo spazio ordinato $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + e^{2x} + 7}{10 + x^8 - x}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^4) \sin x}{(1 - e^x)^5}.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cos^2 x + \operatorname{sh}(2x) \operatorname{ch}^2 x - 4x}{(2x - \sin(2x))(\operatorname{ch} x - 1)}.$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 1) Sia

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^4 + x + 1 ;$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinarli.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx .$$

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(2x) dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $x^n \operatorname{Arctg}(ax+b)$ e di $\frac{1}{\alpha x^2 + \beta}$ ($\alpha \neq 1$ e $\beta \neq 1$) e formule simili.

Svolgimento e risposta.

14. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^4 \frac{1}{x + x\sqrt{x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 9/1/12 - Compito 1 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = -\frac{e^{4x^2-4}}{|x|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni $\frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0.35$, $2\sqrt{\frac{2}{e^7}} \approx 0.09$. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi. (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n + 2} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^4 = -2 - 2i .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = -1 - 2i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = (\sin x^2 + x \cos x)^\pi ;$$

- (a) (non assegnata) determinare il dominio naturale di f (è sufficiente scrivere la condizione su x che caratterizza i punti x del dominio),
- (b) determinare l'insieme D degli $x \in \text{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e in tali x calcolare la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{n + 1} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Sia

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} \sin x & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases} ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di f (si può usare l'approssimazione $\sin 1 \approx 0.84$);
- (b) determinare l'immagine di f ;
- (c) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo e, in caso affermativo, determinarli;
- (d) dire se f è limitata superiormente, se f è limitata inferiormente, se f è limitata;
- (e) determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f rispetto allo spazio ordinato $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + x \sin x}{x^3 + 1} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 (1 - \cos x)}{\log(1 + x^5)} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(2x) \cos^2 x + \sin(2x) \operatorname{ch}^2 x - 4x}{(\operatorname{sh} x - x)(1 - \cos(2x))} .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 1) Sia

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^4 + 1 ;$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinarli.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(3x) dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $x^n \operatorname{Arctg}(ax+b)$ e di $\frac{1}{\alpha x^2 + \beta}$ ($\alpha \neq 1$ e $\beta \neq 1$) e formule simili.

Svolgimento e risposta.

14. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^8 \frac{1}{x + x\sqrt[3]{x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 9/1/12 - Compito 1 - Versione 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{1-x^2}}{|x|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{n^4-n+3}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^4 = -4 + 2i.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = 7 - i.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = 2^{\sin^2 x + \cos(2x)};$$

(a) (non assegnata) determinare il dominio naturale di f ;

(b) determinare l'insieme D degli $x \in \text{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e in tali x calcolare la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3+n^3 2^n} z^n.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Sia

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} -x^2 & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ \cos x & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases} ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di f (si può usare l'approssimazione $\cos 1 \approx 0.54$);
- (b) determinare l'immagine di f ;
- (c) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo e, in caso affermativo, determinarli;
- (d) dire se f è limitata superiormente, se f è limitata inferiormente, se f è limitata;
- (e) determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f rispetto allo spazio ordinato $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x+1} + 3}{x + \sin x} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x \log(1+x) \sin x^2} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos^2(2x) + \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2(2x) - 2x}{(1 - \cos(2x^2))(\exp(3x) - 1)} .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 1) Sia

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x-1}{x+1};$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinarli.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(5x) dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $x^n \operatorname{Arctg}(ax+b)$ e di $\frac{1}{\alpha x^2+\beta}$ ($\alpha \neq 1$ e $\beta \neq 1$) e formule simili.

Svolgimento e risposta.

14. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^{16} \frac{1}{x+x\sqrt[4]{x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.