

Analisi Matematica 1 - 24/1/12 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 9) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-|x|+1},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni $e \approx 2.72$, $1 + \sqrt{2} \approx 2.41$, $f(1 + \sqrt{2}) \approx 1.17$, $-1 - \sqrt{2} \approx -2.41$, $f(-1 - \sqrt{2}) \approx 1.17$, $2 - \sqrt{3} \approx 0.27$, $f(2 - \sqrt{3}) \approx -1.93$, $-2 + \sqrt{3} \approx -0.27$, $f(-2 + \sqrt{3}) \approx -1.93$, $2 + \sqrt{3} \approx 3.73$, $f(2 + \sqrt{3}) \approx 0.84$, $-2 - \sqrt{3} \approx -3.73$, $f(-2 - \sqrt{3}) \approx 0.84$. (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n - n}{n + \sqrt{n} + 7} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3+n!} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = -2 + 2\sqrt{3}i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^4 = -81 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(2x) - \log \frac{1}{1-x^2} ;$$

(a) determinare il dominio naturale di f ;

(b) determinare l'insieme D degli $x \in \operatorname{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e in tali x calcolare la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10} + x + 3}{\sqrt{x} - e^{-x}} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \operatorname{sh} x)^2}{x^2 - \operatorname{Arctg} x^2} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2xe^{\frac{1}{x}}) .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^2 \log(3x + 2) dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\log(ax + b)$ e formule simili.

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x^2 + 3x + 1)\sqrt{2x + 1}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 24/1/12 - Compito 2 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 9) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-|x|+1},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni $e \approx 2.72$, $1 + \sqrt{2} \approx 2.41$, $f(1 + \sqrt{2}) \approx -1.17$, $-1 - \sqrt{2} \approx -2.41$, $f(-1 - \sqrt{2}) \approx -1.17$, $2 - \sqrt{3} \approx 0.27$, $f(2 - \sqrt{3}) \approx 1.93$, $-2 + \sqrt{3} \approx -0.27$, $f(-2 + \sqrt{3}) \approx 1.93$, $2 + \sqrt{3} \approx 3.73$, $f(2 + \sqrt{3}) \approx -0.84$, $-2 - \sqrt{3} \approx -3.73$, $f(-2 - \sqrt{3}) \approx -0.84$. (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^7 + n + 3)}{n^2} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n!} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = 2 - 2\sqrt{3}i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^4 = 20 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{x}};$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
(b) determinare l'insieme D degli $x \in \text{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e in tali x calcolare la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x + e^{-x}}{x + \sin x}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \log(1+x))^3}{x^2 - \sin x^2}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} + 2\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} - 3xe^{\frac{1}{x}} \right).$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^3 x e^{-x^2} dx .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \log(2x+1) dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\log(ax+b)$ e formule simili.

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^2 \frac{1}{(8x^2+6x+1)\sqrt{4x+1}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 24/1/12 - Compito 2 - Versione 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 9) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{|x|+1},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni $e \approx 2.72$, $\sqrt{2} - 1 \approx 0.41$, $f(\sqrt{2} - 1) \approx -3.41$, $1 - \sqrt{2} \approx -0.41$, $f(1 - \sqrt{2}) \approx -3.41$. (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n - \sin n}{n + \log n} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n + n + 1} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = 2 + 2\sqrt{3}i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^3 = -64i .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arccos} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 \right) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
(b) determinare l'insieme D degli $x \in \operatorname{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e in tali x calcolare la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sin x}{x - \sqrt{x}} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \operatorname{Arctg} x)^3}{x^3 - \sin x^3} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt[4]{x^4 + x^3 + 2} - \sqrt[4]{x^4 - x^3 + 2} - xe^{\frac{1}{x}}) .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x(1-x)}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{5x^4 + 1}{x^5 + x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \log(4x + 1) dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\log(ax + b)$ e formule simili.

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^4 \frac{1}{(18x^2 + 9x + 1)\sqrt{6x + 1}} dx .$$

Svolgimento e risposta.