Analisi Matematica 1 - 24/1/12 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 9) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-|x|+1} ,$$
rispondendo alle seguenti domande:
   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;
   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
   (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
   (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in 0;
   (e) (p. 3*) studiare la convessitàdi f determinando gli gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni $e \approx 2.72$, $1+\sqrt{2} \approx 2.41$, $f(1+\sqrt{2}) \approx 1.17$, $-1-\sqrt{2} \approx -2.41$, $f(-1-\sqrt{2}) \approx 1.17$, $2-\sqrt{3} \approx 0.27$, $f(2-\sqrt{3}) \approx -1.93$, $-2+\sqrt{3} \approx -0.27$, $f(-2+\sqrt{3}) \approx -1.93$, $2+\sqrt{3} \approx 3.73$, $f(2+\sqrt{3}) \approx 0.84$, $-2-\sqrt{3} \approx -3.73$, $f(-2-\sqrt{3}) \approx 0.84$. (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

   Svolgimento e risposta.

2

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n - n}{n + \sqrt{n} + 7} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3+n!} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = -2 + 2\sqrt{3}i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^4 = -81 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(2x) - \log \frac{1}{1 - x^2} \ ;$$

(a) determinare il dominio naturale di f;

(b) determinare l'insieme D degli $x \in \operatorname{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e in tali x calcolare la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{10} + x + 3}{\sqrt{x} - e^{-x}} \ .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x \cos x - \operatorname{sh} x)^2}{x^2 - \operatorname{Arctg} x^2} \ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2xe^{\frac{1}{x}}) \ .$$

Svolgimento e risposta.

4

10. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^2 \log(3x+2)\,dx\,.$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\log(ax+b)$ e formule simili.

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x^2+3x+1)\sqrt{2x+1}}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $dom(f) = \mathbb{R}$

b) Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1) e^{-|x|+1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-|x|+1} = \lim_{x \to +\infty} e\, x^2 e^{-|x|} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 1) e^{-|x|+1} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-|x|+1} = \lim_{x \to -\infty} e\, x^2 e^{-|x|} = 0$$

c) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-1)\, e^{-x+1} & \text{per } x \geq 0 \\ (x^2-1)\, e^{x+1} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Sia $x > 0$; si ha

$$f'(x) = 2x\, e^{-x+1} + (x^2-1)\, e^{-x+1}(-1) =$$

$$= -e^{-x+1}(x^2 - 2x - 1)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 - 2x - 1 = 0$, cioè se e solo se $x = 1 \pm \sqrt{2}$; cioè, essendo $x > 0$, se e solo se $x = 1 + \sqrt{2}$

2

Si ha $f'(x)>0$ se e solo se $x^2-2x-1<0$, cioè se e solo se $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$, cioè $0<x<1+\sqrt{2}$

Si ha $f'(x)<0$ se e solo se $x>1+\sqrt{2}$

Quindi f è strettamente crescente su $[0, 1+\sqrt{2}]$, strettamente decrescente su $[1+\sqrt{2}, +\infty[$

Sia $x<0$. Si ha

$$f'(x)=2x\,e^{x+1}+(x^2-1)e^{x+1}=e^{x+1}(x^2+2x+1)$$

Si ha $f'(x)=0$ se e solo se $x^2+2x+1=0$, cioè se e solo se $x=-1\pm\sqrt{2}$, cioè, essendo $x<0$, se e solo se $x=-1-\sqrt{2}$.

Si ha $f'(x)>0$ se e solo se $x^2+2x-1>0$, cioè se e solo se $x<-1-\sqrt{2}$ o $x>-1+\sqrt{2}$, cioè se e solo se $x<-1-\sqrt{2}$

Si ha $f'(x)<0$ se e solo se $-1-\sqrt{2}<x<0$

Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, -1-\sqrt{2}]$ strettamente crescente su $[-1-\sqrt{2}, 0]$

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow)=\{\,]-\infty,-1-\sqrt{2}],\ [0, 1+\sqrt{2}]\,\},\quad \mathcal{M}(\rightarrow)=\emptyset$$

$$\mathcal{M}(\searrow)=\{\,[-1-\sqrt{2}, 0],\ [1+\sqrt{2}, +\infty[\,\}$$

d) Si ha

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ x>0}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0+\\ x>0}} -e^{-x+1}(x^2-2x-1)=e$$

Quindi f è derivabile da destra in 0 e si ha

$f'_+(0) = e$

Si ha

$$\lim_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^{x+1}(x^2+2x-1) = -e$$

Quindi f è derivabile da sinistra in 0 e si ha

$f'_-(0) = -e$

Essendo $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, f non è derivabile in 0

e) Sia $x > 0$. Si ha

$$f''(x) = -\left((2x-2)e^{-x+1} + (x^2-2x-1)e^{-x+1}(-1)\right) =$$

$$= e^{-x+1}(x^2-4x+1)$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2-4x+1=0$, cioè se e solo se $x = 2 \pm \sqrt{3}$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x^2-4x+1>0$, cioè se e solo se $0 < x < 2-\sqrt{3}$ o $x > 2+\sqrt{3}$

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$

Quindi f è strettamente convessa su $[0, 2-\sqrt{3}]$ e su $[2+\sqrt{3}, +\infty[$, strettamente concava su $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$

Sia $x < 0$. Si ha

$$f''(x) = (2x+2)e^{x+1} + (x^2+2x-1)e^{x+1} =$$

$= e^{x+1}(x^2+4x+1)$

Si ha $f''(x)=0$ se e solo se $x^2+4x+1=0$, cioè se e solo se $x=-2\pm\sqrt{3}$

Si ha $f''(x)>0$ se e solo se $x^2+4x+1>0$, cioè se e solo se $x<-2-\sqrt{3}$ o $-2+\sqrt{3}<x<0$.

Si ha $f''(x)<0$ se e solo se $-2-\sqrt{3}<x<-2+\sqrt{3}$

Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty,-2-\sqrt{3}]$ e su $[-2+\sqrt{3},0]$, f è strettamente concava su $[-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}]$

Essendo $f'_-(0)=-e$ e $f'_+(0)=e$ si ha $f'_-(0)\le f'_+(0)$

Quindi f è strettamente convessa su $[-2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}]$

Si ha quindi

$\mathcal{C}(\uparrow)=\{]-\infty,-2-\sqrt{3}],\ [-2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}],\ [2+\sqrt{3},+\infty[\}$

$\mathcal{C}(\updownarrow)=\emptyset$

$\mathcal{C}(\downarrow)=\{[-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}],\ [2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]\}$

Si ha

$1+\sqrt{2}\approx 2.41$, $-1-\sqrt{2}\approx -2.41$, $2-\sqrt{3}\approx 0.27$

$2+\sqrt{3}\approx 3.73$, $-2-\sqrt{3}\approx -3.73$, $-2+\sqrt{3}\approx -0.27$

$f(1+\sqrt{2})=2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}\approx 1.17$

$f(-1-\sqrt{2})=2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}\approx 1.17$

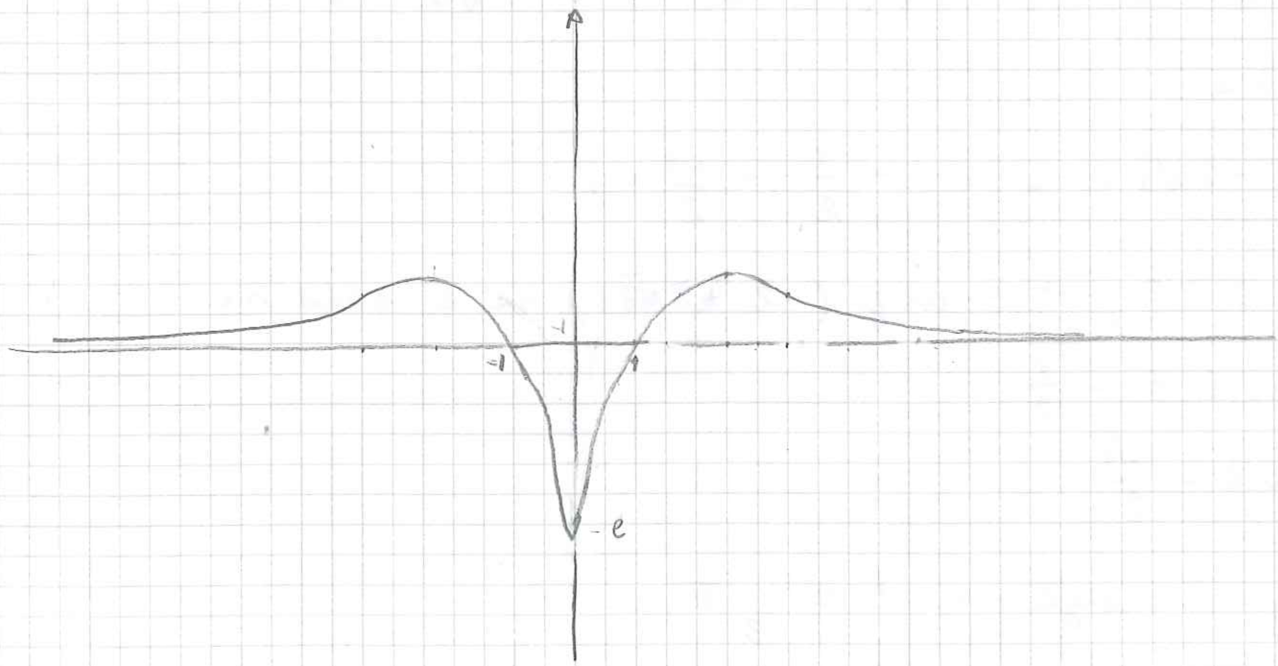
$f(0) = -e \approx -2.72$

$f(2-\sqrt{3}) = 2(3-2\sqrt{3})\, e^{\sqrt{3}-1} \approx -1.93$

$f(2+\sqrt{3}) = 2(3+2\sqrt{3})\, e^{\sqrt{3}-1} \approx 0.84$

$f(-2-\sqrt{3}) = 2(3+2\sqrt{3})\, e^{\sqrt{3}-1} \approx 0.84$

$f(-2+\sqrt{3}) = 2(3-2\sqrt{3})\, e^{\sqrt{3}-1} \approx -1.93$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{\sin n - n}{n + \sqrt{n} + 7} \sim \frac{-n}{n} = -1$$

Quindi la serie è divergente negativamente

Esercizio 3

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\left| \frac{n+2}{3+n!} z^n \right| \sim \frac{n}{n!} |z|^n$$

Quindi la serie di potenze è assolutamente convergente in z. Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $+\infty$

Esercizio 4

Si ha

$$|-2+2\sqrt{3}i| = 2|-1+\sqrt{3}i| = 2\sqrt{4} = 4$$

Si ha

$$-2+2\sqrt{3}i = 4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Se $t \in \mathbb{R}$, $t \in \arg(-2+2\sqrt{3}i)$ se e solo se

$$\begin{cases} \cos t = -\frac{1}{2}, \\ \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Si può scegliere $t = \frac{2}{3}\pi$

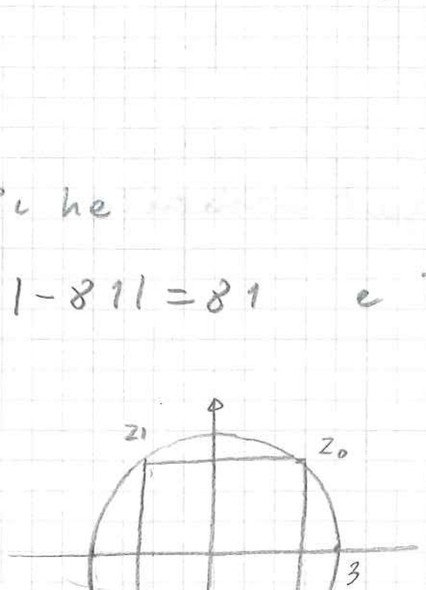
Si ha quindi

$$z = \log 4 + i\left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right) \quad \text{per un } k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 5

Si ha

$$|-81| = 81 \quad \text{e} \quad \pi \in \arg(-81)$$



Le radici dell'equazione appartengono alla circonferenza di centro l'origine e raggio 3, con la radice z_0 con un argomento $\frac{\pi}{4}$ e con le altre radici che si ottengono da z_0 ruotando successivamente di un angolo di 90° gradi

Si ha quindi

$$z_0 = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_1 = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_2 = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_3 = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Esercizio 6

a) Il dominio di f è dato dagli x reali tali che

$$\begin{cases} 2x \leq 1 \\ 2x \geq -1 \\ 1-x^2 \neq 0 \\ \dfrac{1}{1-x^2} > 0 \end{cases} \quad \text{cioè tali che} \quad \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq 1 \text{ e } x \neq -1 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases},$$

$$\text{cioè tali che} \quad \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq \pm 1 \\ -1 < x < 1 \end{cases}, \quad \text{cioè tali che } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Si ha quindi $\operatorname{dom}(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

b) Per ogni $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\, 2 - (1-x^2)\, \frac{-(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2x}{1-x^2}$$

(oppure, essendo per ogni $x \in dom(f)$

$f(x) = \operatorname{Arcsin}(2x) + \log(1-x^2)$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}2 + \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2x}{1-x^2}\Big)$$

Si ha

$$\lim_{x \to \frac{1}{2},\, x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[} f'(x) = +\infty$$

quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in $\frac{1}{2}$ e si ha $f'(\frac{1}{2}) = +\infty$

Si ha

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2},\, x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[} f'(x) = +\infty$$

quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in $-\frac{1}{2}$ e si ha $f'(-\frac{1}{2}) = +\infty$

Esercizio 7

Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{10} + x + 3}{\sqrt{x} + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{10}}{x^{1/2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{19}{2}} = +\infty$$

Esercizio 8

Si ha

$$x^2 - \operatorname{Arctg} x^2 \sim \frac{1}{3}(x^2)^3 = \frac{1}{3}x^6$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$x \cos x = x - \frac{1}{2} x^3 + o(x^3)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$x \cos x - \operatorname{sh} x = x - \frac{1}{2} x^3 + o(x^3) - x - \frac{1}{6} x^3 =$$

$$= \frac{2}{3} x^3 + o(x^3) \sim \frac{2}{3} x^3$$

$$(x \cos x - \operatorname{sh} x)^2 \sim \frac{4}{9} x^6$$

$$\frac{(x \cos x - \operatorname{sh} x)^2}{x^2 - \operatorname{Arctg} x^2} \sim \frac{\frac{4}{9} x^6}{\frac{1}{3} x^6} = \frac{4}{3}$$

quindi si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x \cos x - \operatorname{sh} x)^2}{x^2 - \operatorname{Arctg} x^2} = \frac{4}{3}$$

Esercizio 9

Per $x > 0$ si ha

$$\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2x e^{\frac{1}{x}} =$$

$$x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 e^{\frac{1}{x}} \right)$$

Si ha $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2} y + o(y)$ per $y \to 0$, quindi

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(- \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x} \right) = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x} \right)$$

$$e^y = 1 + y + o(y) \quad \text{per } y \to 0$$

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2e^{\frac{1}{x}} = 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + 1 - \frac{1}{x} - 2 - \frac{2}{x} = -\frac{5}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim$$

$$\sim -\frac{5}{2}\frac{1}{x}$$

$$x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}}\right) \sim x\left(-\frac{5}{2}\frac{1}{x}\right) = -\frac{5}{2}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2} + \sqrt{x^2-2x+3} - 2e^{\frac{1}{x}}\right) = -\frac{5}{2}$$

Esercizio 10

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f:]1,2[\longrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se è convergente l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\,dx$$

di $f|\ ]1, \frac{3}{2}]$ e se è convergente l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\, dx$$

di $f \,|\, [\frac{3}{2}, 2[$

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} \underset{x \to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)\cdot 1}} = \frac{1}{(x-1)^{1/3}}$$

quindi l'integrale improprio $\displaystyle\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\, dx$

è convergente

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} \underset{x \to 2}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{1\,(2-x)}} = \frac{1}{(2-x)^{1/3}}$$

quindi l'integrale improprio $\displaystyle\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\, dx$

è convergente.

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente

Esercizio 11

Si ha

$$\int_{2}^{3} \frac{x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} \int_{2}^{3} \frac{1}{x^2-1}\,(2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log|x^2-1|\right]_2^3 = \frac{1}{2}(\log 8 - \log 3) = \frac{1}{2}\log\frac{8}{3}$$

Esercizio 12

Si ha

$$\int_0^2 \log(3x+2)\,dx = \left[x\log(3x+2)\right]_0^2 - \int_0^2 x\frac{1}{3x+2}\cdot 3\,dx =$$

$$= \left[x\log(3x+2)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{3x+2-2}{3x+2}\,dx =$$

$$= \left[x\log(3x+2)\right]_0^2 - \int_0^2 \left(1-\frac{2}{3x+2}\right)dx =$$

$$= \left[x\log(3x+2)\right]_0^2 - \int_0^2 dx + 2\int_0^2 \frac{1}{3x+2}\,dx =$$

$$= \left[x\log(3x+2) - x + \frac{2}{3}\log(3x+2)\right]_0^2 =$$

$$= 2\log 8 - 2 + \frac{2}{3}\log 8 - \frac{2}{3}\log 2 =$$

$$= 6\log 2 + 2\log 2 - \frac{2}{3}\log 2 - 2 = \frac{22}{3}\log 2 - 2$$

Esercizio 13

Poniamo $\sqrt{2x+1} = t$.

Si ha $2x+1 = t^2$; quindi $x = \frac{1}{2}(t^2-1)$

Si ha $\frac{dx}{dt} = t$.

Per $x=0$, si ha $t=1$; per $x=\frac{3}{2}$, si ha $t=2$

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x^2+3x+1)\sqrt{2x+1}}\,dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{\left(2\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + 3\,\frac{t^2-1}{2} + 1\right) t}\, t \quad dt =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{\frac{t^4-2t^2+1}{2} + \frac{3t^2-3}{2} + 1}\, dt =$$

$$= \int_1^2 \frac{2}{t^4-2t^2+1+3t^2-3+2}\, dt = 2\int_1^2 \frac{1}{t^4+t^2}\, dt$$

Si ha $t^4+t^2 = t^2(t^2+1)$

Esistono $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

Si ha

$$1 = At(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)t^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per $t=0$ si ha $1 = B$, cioè $B=1$

Si ha quindi

$1 = At(t^2+1) + t^2+1 + (Ct+D)t^2$; quindi

$-t^2 = At(t^2+1) + (Ct+D)t^2$; quindi

$-t = A(t^2+1) + (Ct+D)t$

Per $t=0$ si ha $0 = A$; quindi $A=0$

Si ha quindi

$-t = (Ct + D)t$; quindi

$-1 = Ct + D$

Quindi $C = 0$ e $D = -1$

Si ha quindi

$$\frac{1}{t^4+t^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}$$

Si ha quindi

$$2\int_1^2 \frac{1}{t^4+t^2}\,dt = 2\int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= 2\left[-\frac{1}{t} - \operatorname{Arctg} t\right]_1^2 =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} - \operatorname{Arctg} 2 + 1 + \operatorname{Arctg} 1\right) =$$

$$2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \operatorname{Arctg} 2\right) = \frac{\pi}{2} + 1 - 2\operatorname{Arctg} 2$$