

# Analisi Matematica 1 - 8/2/12 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 9) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (2x^2 - 1)e^{|2x+1|} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1\*) determinare il dominio di  $f$ ;
- (b) (p. 0.9\*) calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 4\*) studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- (d) (p. 1\*) studiare la derivabilità rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  di  $f$  in  $-\frac{1}{2}$ ;
- (e) (p. 3\*) studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downdownarrows)$ .

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ . **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni  $e \approx 2.72$ ,  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0.37$ ,  $f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}) \approx -4.14$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$ . (\* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

**Svolgimento e risposta.**

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{3^n + 1} .$$

**Svolgimento e risposta.**

3. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = -7 + i .$$

**Svolgimento e risposta.**

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^4 = 20i .$$

**Suggerimento:** per ottenere le soluzioni per radicali si usino le formule di bisezione.

**Svolgimento e risposta.**

5. (p. 1) Sia  $f$  la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin(x^3 \sqrt{\sin(3x)}) ;$$

- (a) (domanda non assegnata) (determinare il dominio naturale di  $f$ );  
(b) (determinare l'insieme  $D$  degli  $x \in \text{dom}(f)$  nei quali  $f$  è derivabile rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  e in tali  $x$ ) (p. 1) calcolare la derivata di  $f$  (rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$ ).

**Svolgimento e risposta.**

6. (p. 2) Sia

$$f : [0, 3] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{per } 1 < x < 2 \\ x & \text{per } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ ;
- (b) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è continua;
- (c) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è derivabile;

motivare adeguatamente la risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{e^{-x}} .$$

**Svolgimento e risposta.**

8. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} \sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x)}{1 - \cos(2x)} .$$

**Svolgimento e risposta.**

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_4^{16} \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

11. (p. 5) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

# Analisi Matematica 1 - 8/2/12 - Compito 3 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 9) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - 2x^2)e^{|1-2x|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1\*) determinare il dominio di  $f$ ;
- (b) (p. 0.9\*) calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 4\*) studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- (d) (p. 1\*) studiare la derivabilità rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  di  $f$  in  $\frac{1}{2}$ ;
- (e) (p. 3\*) studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downdownarrows)$ .

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ . **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni  $e \approx 2.72$ ,  $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx -0.37$ ,  $f(\frac{1-\sqrt{3}}{2}) \approx 4.14$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$ . (\* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

**Svolgimento e risposta.**

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2^n} .$$

**Svolgimento e risposta.**

3. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = -1 - 3i .$$

**Svolgimento e risposta.**

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^4 = -12i .$$

**Suggerimento:** per ottenere le soluzioni per radicali si usino le formule di bisezione.

**Svolgimento e risposta.**

5. (p. 1) Sia  $f$  la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \cos(x^2 \sqrt{\cos(2x)}) ;$$

- (a) (domanda non assegnata) (determinare il dominio naturale di  $f$ );  
(b) (determinare l'insieme  $D$  degli  $x \in \text{dom}(f)$  nei quali  $f$  è derivabile rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  e in tali  $x$ ) (p. 1) calcolare la derivata di  $f$  (rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$ ).

**Svolgimento e risposta.**

6. (p. 2) Sia

$$f : [-2, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} -1 & \text{per } -2 \leq x < -1 \\ x^2 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ ;
- (b) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è continua;
- (c) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è derivabile;

motivare adeguatamente la risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2^x}{x^2 - 2^x} .$$

**Svolgimento e risposta.**

8. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1-3x} \sqrt[8]{1+2x^2} - e^{-\frac{3}{4}x} \operatorname{ch}(3x)}{\operatorname{ch}(4x) - 1} .$$

**Svolgimento e risposta.**

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3+2} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

11. (p. 5) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3+x} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**