Analisi Matematica 1 - 8/2/12 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 9) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = (2x^2 - 1)e^{|2x+1|} ,$$
rispondendo alle seguenti domande:
   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;
   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
   (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
   (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in $-\frac{1}{2}$;
   (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni $e \approx 2.72$, $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0.37$, $f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}) \approx -4.14$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$. (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

   Svolgimento e risposta.

2

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n+1} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = -7 + i .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^4 = 20i .$$

Suggerimento: per ottenere le soluzioni per radicali si usino le formule di bisezione.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin(x^3 \sqrt{\sin(3x)}) ;$$

(a) (domanda non assegnata) (determinare il dominio naturale di f);

(b) (determinare l'insieme D degli $x \in \mathrm{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e in tali x) (p. 1) calcolare la derivata di f (rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$).

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia

$$f : [0,3] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{per } 1 < x < 2 \\ x & \text{per } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} ;$$

(a) disegnare approssimativamente il grafico di f;

(b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua;

(c) determinare l'insieme dei punti ove f è derivabile;

motivare adeguatamente la risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{e^{-x}} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x}\,\sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x}\cos(2x)}{1 - \cos(2x)} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_4^{16} \frac{x}{\sqrt{x}+1}\, dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^{2} \frac{2x+3}{x^2+3x}\, dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 5) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x}\, dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (2x^2-1)\, e^{2x+1} & \text{per } x \geq -\frac{1}{2} \\ (2x^2-1)\, e^{-2x-1} & \text{per } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Supponiamo $x > -\frac{1}{2}$. Si ha

$$f'(x) = 4x\, e^{2x+1} + (2x^2-1)\, e^{2x+1} \cdot 2 = 2\, e^{2x+1}(2x^2+2x-1)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2x^2+2x-1=0$, cioè se e solo se $x = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$ se e solo se $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2+2x-1 > 0$, cioè $x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ o $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, cioè $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $-\frac{1}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Si ha quindi f strettamente crescente su $\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, f strettamente decrescente su $\left[-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$

Supponiamo $x < -\frac{1}{2}$. Si ha

$$f'(x) = 4x\, e^{-2x-1} + (2x^2-1)\, e^{-2x-1}(-2) = -2e^{-2x-1}(2x^2-2x-1)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2x^2-2x-1=0$, cioè se e solo se $x = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

Essendo $x < -\frac{1}{2}$, mai.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2 - 2x - 1 < 0$, cioè se e solo se $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, quindi mai.

Si ha $f'(x) < 0$ per $x < -\frac{1}{2}$.

Quindi f è strettamente decrescente su $]-\infty, -\frac{1}{2}]$.

Quindi f è strettamente decrescente su $]-\infty, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$.

Si ha quindi $\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ \left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[\right\}$, $\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$

$\mathcal{M}(\searrow) = \left\{ \left] -\infty, \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right] \right\}$.

d) Si ha $\lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2}^+ \\ x > -\frac{1}{2}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} 2e^{2x+1}(2x^2+2x-1) = -3$

Quindi f è derivabile da destra in $-\frac{1}{2}$ e $f'_+(-\frac{1}{2}) = -3$

Si ha $\lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2}^- \\ x < -\frac{1}{2}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2}^- \\ x < -\frac{1}{2}}} -2e^{-2x-1}(2x^2-2x-1) = -1$

Quindi f è derivabile da sinistra in $-\frac{1}{2}$ e $f'_-(-\frac{1}{2}) = -1$

Essendo $f'_+(-\frac{1}{2}) \neq f'_-(-\frac{1}{2})$, f non è derivabile in $\frac{1}{2}$

e) Sia $x > -\frac{1}{2}$. Si ha

$f''(x) = 2\left((4x+2)e^{2x+1} + (2x^2+2x-1)e^{2x+1} \cdot 2\right) =$

$4e^{2x+1}(2x+1+2x^2+2x-1) = 4e^{2x+1}(2x^2+4x) =$

$= 8e^{2x+1}(x^2+2x)$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ o $x = -2$; quindi, essendo $x > -\frac{1}{2}$, se e solo se $x = 0$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x^2 + 2x = 0$, cioè se e solo se $x < -2$ o $x > 0$; quindi essendo $x > -\frac{1}{2}$, se e solo se $x > 0$

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $-\frac{1}{2} < x < 0$

Quindi f è strettamente convessa su $[0, +\infty[$, strettamente concava su $[-\frac{1}{2}, 0]$

Sia $x < -\frac{1}{2}$. Si ha

$$f''(x) = -2\left((4x-2)e^{-2x-1} + (2x^2-2x-1)e^{-2x-1}(-2)\right) =$$
$$= 4e^{-2x-1}\left(-2x+1 \quad +2x^2-2x-1\right) = 4e^{-2x-1}(2x^2-4x)$$
$$= 8e^{-2x-1}(x^2-2x)$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ o $x = 2$; quindi, essendo $x < -\frac{1}{2}$, mai.

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < 0$ o $x > 2$; quindi, essendo $x < -\frac{1}{2}$ sempre.

Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty, -\frac{1}{2}]$

Si ha quindi

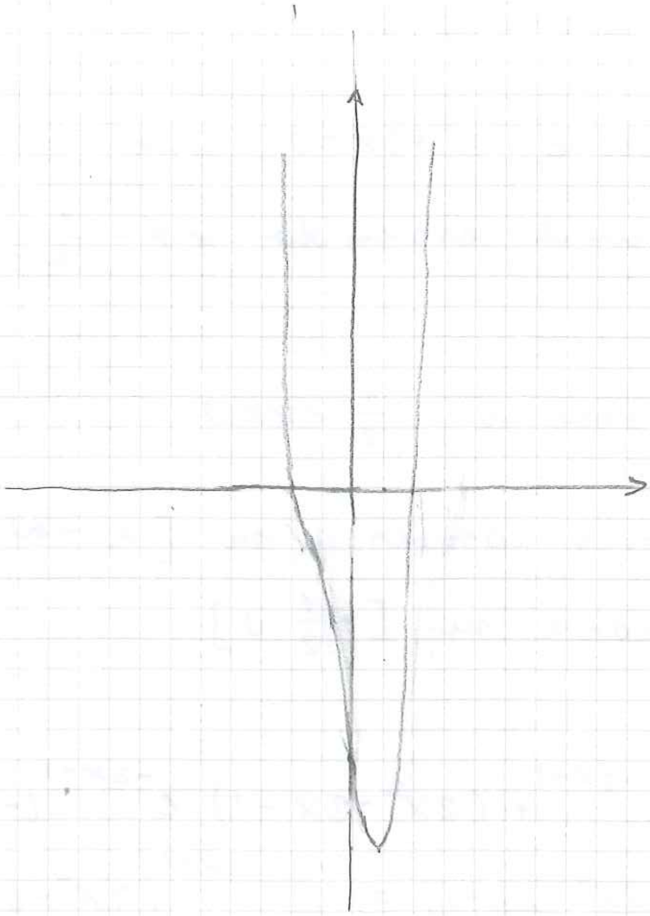
$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{]-\infty, -\frac{1}{2}], [0, +\infty[\right\}, \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [-\frac{1}{2}, 0] \right\}$$

Si ha

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0.37, \quad f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\sqrt{3}}(1-\sqrt{3}) \approx -4.14$$

$f(0) = -e \approx -2,72$ $\quad f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} = 0,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{n^2+1}{3^n+1} \sim \frac{n^2}{3^n} = n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

quindi la serie è convergente

Esercizio 3

Si ha

$|-7+i| = \sqrt{50}$ e $-\operatorname{Arctg}\frac{1}{7} + \pi \in \arg.(-7+i)$

Si ha quindi

$z = \log\sqrt{50} + i\left(-\operatorname{Arctg}\frac{1}{7} + \pi + 2k\pi\right)$ per un $k \in \mathbb{Z}$

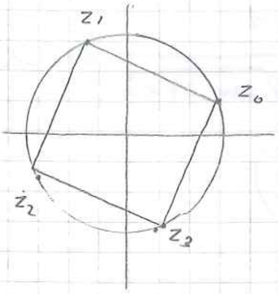
Esercizio 4

Si ha

$|20i| = 20$ e $\frac{\pi}{2} \in \arg(20i)$

Si ha quindi

$$z_k = \sqrt[4]{20}\, e^{i\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{per un } k=0,1,2,3$$



Si ha

$$z_0 = \sqrt[4]{20}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{20}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[4]{20}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{20}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}\right) = \sqrt[4]{20}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{20}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{20}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{20}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$$

Esercizio 5

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$\sin(3x) \geq 0$ cioè tali che

$(\exists k \in \mathbb{Z})\quad 2k\pi \leq 3x \leq \pi + 2k\pi$

cioè tali che

$\exists\, k \in \mathbb{Z} \quad \frac{2}{3} k\pi \le x \le \frac{1}{3}(2k+1)\pi$

Si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2}{3} k\pi, \frac{1}{3}(2k+1)\pi \right]$$

b) Supponiamo $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{2}{3} k\pi, \frac{1}{3}(2k+1)\pi \right[$, si ha

$$f'(x) = \cos\left(x^3 \sqrt{\sin(3x)}\right)\left(3x^2\sqrt{\sin(3x)} + x^3 \frac{1}{2\sqrt{\sin(3x)}}\cos(3x)\cdot 3\right)$$

$$= 3x^2 \cos\left(x^3\sqrt{\sin(3x)}\right)\left(\sqrt{\sin(3x)} + \frac{x\cos(3x)}{2\sqrt{\sin(3x)}}\right)$$

Sia $k \in \mathbb{Z}$ e $a = \frac{2}{3} k\pi$; si ha $3a = 2k\pi$;

quindi $\sin(3a) = 0$ e $\cos(3a) = 1$

Supponiamo $k > 0$. Si ha $a > 0$.

Si ha $\lim_{x \to a} \frac{x\cos(3x)}{2\sqrt{\sin(3x)}} = +\infty$

Da ciò segue subito che si ha

$$\lim_{x \to a} f'(x) = +\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in a e si ha

$f'(a) = +\infty$

Supponiamo $k < 0$; si ha $a < 0$

Si ha $\lim_{x \to a} \frac{x\cos(3x)}{2\sqrt{\sin(3x)}} = -\infty$

Da ciò segue subito che si ha

$$\lim_{x \to a} f'(x) = -\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in a e si ha
$f'(a) = -\infty$

Supponiamo $k = 0$

Si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos(3x)}{2\sqrt{\sin(3x)}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2\sqrt{3}\sqrt{x}} = 0$$

Da ciò segue subito che

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$$

Quindi f è derivabile in 0 e si ha $f'(0) = 0$

Sia $k \in \mathbb{Z}$ e sia $b = \frac{1}{3}(2k+1)\pi$; si ha $3b = 2k\pi + \pi$

si ha quindi, $\sin(3b) = 0$ e $\cos(3b) = -1$

Supponiamo $k \geq 0$; si ha $b > 0$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to b} \frac{x \cos(3x)}{2\sqrt{\sin(3x)}} = -\infty$$

Da ciò segue subito che si ha

$$\lim_{x \to b} f'(x) = -\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in b e si ha
$f'(b) = -\infty$

Supponiamo $k < 0$; si ha $b < 0$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to b} \frac{x \cos(3x)}{2\sqrt{\sin(3x)}} = +\infty$$

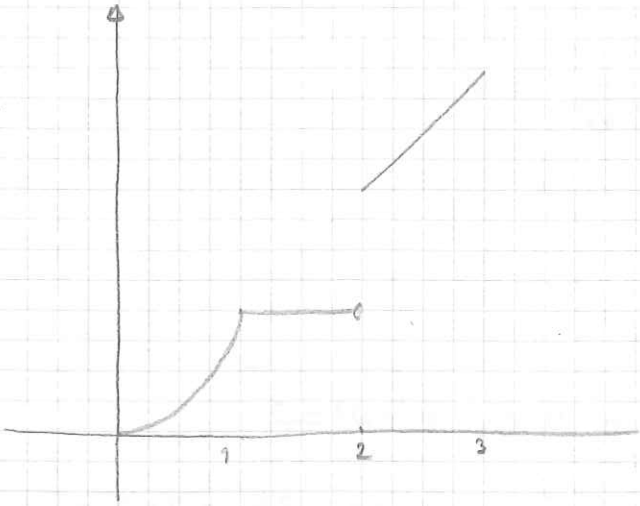
Da ciò segue subito che si ha

$$\lim_{x \to b} f'(x) = +\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\bar{R}$ in b e si ha $f'(b) = +\infty$

Esercizio 6

a)



b) Per il carattere locale della continuità f è continua su $[0,1[\ \cup\ ]1,2[\ \cup\ ]1,3]$

Si ha

$$\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x\neq 1}} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1^+\\ x\neq 1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}} 1 = 1$$

$f(1) = 1$

Quindi f è continua in 1

Si ha

$$\lim_{\substack{x\to 2^-\\ x\neq 2}} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 2^+\\ x\neq 2}} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2$$

Quindi f non è continua in 2

L'insieme dei punti ove f è continua è quindi

$[0, 2[\cup]2, 3]$

c) Per il carattere locale della derivabilità f è derivabile su $[0, 1[\cup]1, 2[\cup]2, 3]$

In 2 f non è derivabile in quanto non è continua

Si ha

$$\lim_{\substack{x \to 1- \\ x \neq 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1- \\ x \neq 1}} 2x = 2$$

Quindi f è derivabile da sinistra in 1 anche $f'_-(1) = 2$

Si ha

$$\lim_{\substack{x \to 1+ \\ x \neq 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1+ \\ x \neq 1}} 0 = 0$$

Quindi f è derivabile da destra in 1 anche $f'_+(1) = 0$

Essendo $f_-(1) \neq f'_+(1)$, f non è derivabile in 1

L'insieme dei punti ove f è derivabile è quindi $[0, 1[\cup]1, 2[\cup]2, 3]$

Esercizio 7

Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{\left(\frac{1}{e}\right)^x} = 0$$

Esercizio 8

Si ha

$$1 - \cos(2x) \sim \frac{1}{2} (2x)^2 = 2x^2$$

$$(1+y)^{\frac{1}{5}} = 1+\frac{1}{5}y+\binom{\frac{1}{5}}{2}y^2+o(y) = 1+\frac{1}{5}y-\frac{2}{25}y^2+o(y^2)$$

$$\sqrt[5]{1+2x} = 1+\frac{1}{5}(2x)-\frac{2}{25}(2x)^2+o(x^2) = 1+\frac{2}{5}x-\frac{8}{25}x^2+o(x^2)$$

$$(1+y)^{\frac{1}{6}} = 1+\frac{1}{6}y+o(y)$$

$$\sqrt[6]{1+3x^2} = 1+\frac{1}{6}(3x^2)+o(x^2) = 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt[5]{1+2x}\,\sqrt[6]{1+3x^2} = \left(1+\frac{2}{5}x-\frac{8}{25}x^2+o(x^2)\right)\left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) =$$

$$= 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+\frac{2}{5}x-\frac{8}{25}x^2 = 1+\frac{2}{5}x+\frac{9}{50}x^2+o(x^2)$$

$$e^y = 1+y+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)$$

$$e^{\frac{2}{5}x} = 1+\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}x\right)^2+o(x^2) = 1+\frac{2}{5}x+\frac{2}{25}x^2+o(x^2)$$

$$\cos y = 1-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)$$

$$\cos(2x) = 1-\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2) = 1-2x^2+o(x^2)$$

$$e^{\frac{2}{5}x}\cos(2x) = \left(1+\frac{2}{5}x+\frac{2}{25}x^2+o(x^2)\right)\left(1-2x^2+o(x^2)\right) =$$

$$= 1-2x^2+o(x^2)+\frac{2}{5}x+\frac{2}{25}x^2 = 1+\frac{2}{5}x-\frac{48}{25}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt[5]{1+2x}\,\sqrt[6]{1+3x^2}-e^{\frac{2}{5}x}\cos(2x) =$$

$$= 1+\frac{2}{5}x+\frac{9}{50}x^2+o(x^2)-1-\frac{2}{5}x+\frac{48}{25}x^2 = \frac{21}{10}x^2+o(x^2)$$

$$\sim \frac{21}{10}x^2$$

$$\frac{\sqrt[5]{1+2x}\,\sqrt[6]{1+3x^2}-e^{\frac{2}{5}x}\cos(2x)}{1-\cos(2x)} \sim \frac{\frac{21}{10}x^2}{2x^2} = \frac{21}{20}$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+2x}\,\sqrt[6]{1+3x^2}-e^{\frac{2}{5}x}\cos(2x)}{1-\cos(2x)} = \frac{21}{20}$$

Esercizio 9

Poniamo $\sqrt{x} = t$. Si ha $x = t^2$; quindi

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

Per $x = 4$, si ha $t = 2$. Per $x = 16$ si ha $t = 4$

Si ha quindi

$$\int_4^{16} \frac{x}{\sqrt{x}+1}\, dx = \int_2^4 \frac{t^2}{t+1}\, 2t\, dt =$$

$$= 2\int_2^4 \frac{t^3}{t+1}\, dt =$$

La divisione $t^3 : (t+1)$ ha quoziente $t^2 - t + 1$ e resto -1

Si ha quindi

$$t^3 = (t^2 - t + 1)(t+1) - 1$$

Si ha quindi

$$2\int_2^4 \frac{t^3}{t+1}\, dt = 2\int_2^4 \frac{(t^2-t+1)(t+1)-1}{t+1}\, dt =$$

$$= 2\int_2^4 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \log|t+1|\right]_2^4$$

$$= 2\left(\frac{64}{3} - 8 + 4 - \log 5 - \frac{8}{3} + 2 - 2 + \log 3\right) =$$

$$= 2\left(\frac{56}{3} - 4 + \log\frac{3}{5}\right) = 2\left(\frac{44}{3} + \log\frac{3}{5}\right) =$$

$$= \frac{88}{3} + \log\frac{9}{25}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2+3x}(2x+3)\, dx =$$

$$= \left[\log(x^2+3x) \right]_1^2 = \log(10) - \log 4 = \log \frac{5}{2}$$

Esercizio 11

Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f: [1, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \to \frac{x-1}{x^3+x}$$

Essendo $\frac{x-1}{x^3+x} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$, l'integrale improprio è convergente

Si ha $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x}\, dx = \lim_{y \to +\infty} \int_1^y \frac{x-1}{x^3+x}\, dy$.

Si ha

$$x^3 + x = x(x^2+1)$$

Esistono $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x-1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Si ha

$$x - 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$$

Per $x = 0$ si ha $-1 = A$; quindi $A = -1$

Si ha quindi:

$$x - 1 = -x^2 - 1 + (Bx + C)x$$

$$x^2 + x = (Bx + C)x$$

$$x(x+1) = (Bx+C)x$$

$$x + 1 = Bx + C$$

Quindi $B = 1$, $C = 1$

Si ha quindi

$$\frac{x-1}{x^3+x} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

Si ha quindi

$$\int_1^y \frac{x-1}{x^3+x}\,dx = \int_1^y \left(-\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \int_1^y \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \left[-\log x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{Arctg} x\right]_1^y =$$

$$= \left[\log\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \operatorname{Arctg} x\right]_1^y =$$

$$= \log\frac{\sqrt{y^2+1}}{y} + \operatorname{Arctg} y - \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$$

Si ha quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\left(\log\frac{\sqrt{y^2+1}}{y} + \operatorname{Arctg} y - \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$