

Analisi Matematica 1 - 8/6/'12

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - 2x)e^{-x^2+x},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \approx -0.21$, $f(\frac{1-\sqrt{2}}{2}) \approx 1.10$, $\frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1.21$, $f(\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \approx -1.10$, $\frac{1-\sqrt{6}}{2} \approx -0.72$, $f(\frac{1-\sqrt{6}}{2}) \approx 0.7$, $\frac{1+\sqrt{6}}{2} \approx 1.72$, $f(\frac{1+\sqrt{6}}{2}) \approx -0.7$. (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Suggerimento. Si ha $f''(\frac{1}{2}) = 0$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + n^5 - 10}{\sqrt{n} - n^7 + 3}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n + n}.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1} z^n.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 - 3z + 4i = 0.$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 \sin x^2} \quad (\text{radice di indice dispari}) ;$$

calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Sia

$$f : [-3, 0] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} -1 & \text{per } -3 \leq x < -2 \\ x & \text{per } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \end{cases} ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di f ;
- (b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua;
- (c) determinare l'insieme dei punti ove f è derivabile;

motivare adeguatamente la risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) \log x .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg}(2x)e^x - \sin(2x) - 2x^2}{2x - \sin(2x)} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Calcolare il seguente integrale (è sufficiente fermarsi alla variazione):

$$\int_1^{64} \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 5) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+8} dx .$$

NB. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2 - 4q < 0$.

Svolgimento e risposta.