

Analisi Matematica 1 - 25/6/12- Compito 5

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 9) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x-1}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. 1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 1*) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in $]-\infty, 1[$ e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 1;
- (f) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\ddagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.38$, $f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) \approx 0.08$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.62$, $f(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) \approx 4.86$, $\frac{2}{3} \approx 0.67$, $f(\frac{2}{3}) \approx 0.03$. (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n + 1}{n^5 - n + 3}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 3}{n!}.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^4 = -256.$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = x^3 e^{\cos x};$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f .

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Sia

$$f : [-2, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{per } -2 \leq x \leq -1 \\ 2 \int_0^x t dt & \text{per } -1 < x \leq 1 \end{cases};$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di f ;
- (b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua;
- (c) determinare l'insieme dei punti ove f è derivabile;

motivare adeguatamente la risposta.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{1+x^2} e^{\frac{1}{3x}} - \sqrt[3]{x^3+x^2}).$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x \sin x \log(1 + x^2)} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 5) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3 + 2} dx .$$

NB. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2 + px + q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2 - 4q < 0$.

Suggerimento. Per determinare i coefficienti della scomposizione in fratti semplici, si consiglia di usare il principio di identità dei polinomi.

Svolgimento e risposta. (Passaggi fondamentali. Per lo svolgimento di questo esercizio può essere chiesto un ulteriore foglio.)