

# Analisi Matematica 1 - 10/7/12 - Compito 6

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log(2x+3)}{\sqrt{2x+3}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .5\*) determinare il dominio di  $f$ ;
- (b) (p. 1.5\*) calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3\*) studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- (d) (p. 3\*) studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\updownarrow)$ .

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ . **NB** Per tracciare il grafico si possono tenere conto delle approssimazioni  $\frac{e^2-3}{2} \approx 2.19$ ,  $f(\frac{e^2-3}{2}) \approx 0.74$ ,  $\frac{e^{\frac{8}{3}}-3}{2} \approx 5.70$ ,  $f(\frac{e^{\frac{8}{3}}-3}{2}) \approx 0.70$ ,  $f(0) \approx 0.63$ . (\* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

**Suggerimento.** Per calcolare la derivata seconda, si utilizzino, nell'espressione della derivata prima, le proprietà delle potenze.

**Svolgimento e risposta.**

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5 + 3} - n}{n^5 + 1}.$$

**Svolgimento e risposta.**

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

**Svolgimento e risposta.**

4. (p. 1) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n.$$

**Svolgimento e risposta.**

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 = -\sqrt{3} - i.$$

**Suggerimento.** Si osservi che  $\frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$  o che  $\frac{5}{12}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ ; si utilizzino le formule della trigonometria e in particolare le formule di bisezione.

**Svolgimento e risposta.**

6. (p. 1) Sia  $f$  la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3 \cos(7x)}$$

(radice di indice dispari);

(a) determinare il dominio naturale di  $f$  (non assegnata);

(b) determinare l'insieme  $D$  degli  $x \in \text{dom}(f)$  nei quali  $f$  è derivabile rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  e in tali  $x$  calcolare la derivata di  $f$  rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  (assegnata solo per il calcolo della derivata nei punti  $x$ , dove  $f$  è derivabile).

**Svolgimento e risposta.**

7. (p. 2) Sia

$$f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} |x| & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases} ;$$

(a) disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ ;

(b) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è continua;

(c) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è derivabile;

motivare adeguatamente la risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sqrt{x}) \log x .$$

**Svolgimento e risposta.**

9. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^2(1+x) \sqrt{1+x} - x e^x + x}{x - \sin x} .$$

**Svolgimento e risposta.**

10. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x}{\operatorname{tg} x}.$$

**Svolgimento e risposta.**

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (è sufficiente fermarsi alla variazione):

$$\int_1^{64} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx.$$

**Svolgimento e risposta.**

12. (p. 5) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 2} dx.$$

**NB.** Si può utilizzare la formula  $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2 + px + q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$ , dove  $p^2 - 4q < 0$ .

**Suggerimento.** Per determinare i coefficienti della scomposizione in fratti semplici, si consiglia di usare il principio di identità dei polinomi.

**Svolgimento e risposta.** (Per lo svolgimento di questo esercizio può essere chiesto un ulteriore foglio.)