

# Analisi Matematica 1 - 7/9/12 - Compito 7

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = e^{x^2+4x+4},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1\*) determinare il dominio di  $f$ ;
- (b) (p. .9\*) calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3\*) studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- (d) (p. 2\*) studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\ddagger)$ .

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ . **NB** (\* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

**Svolgimento e risposta.**

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

**Svolgimento e risposta.**

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + n}{\sqrt{n} + 1}.$$

**Svolgimento e risposta.**

4. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} z^n.$$

**Svolgimento e risposta.**

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 = -\sqrt{3} + i.$$

**Suggerimento.** Si osservi che  $\frac{5}{12}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ ; si utilizzino le formule della trigonometria e in particolare le formule di bisezione.

**Svolgimento e risposta.**

6. (p. 2) Sia  $f$  la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt[6]{\operatorname{Arctg} x^2}$$

- (a) determinare il dominio naturale di  $f$ ;
- (b) determinare l'insieme  $D$  degli  $x \in \operatorname{dom}(f)$  nei quali  $f$  è derivabile rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  e in tali  $x$  calcolare la derivata di  $f$  rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$ .

**Svolgimento e risposta.**

7. (p. 2) Sia

$$f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} |x| & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases} ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ ;
- (b) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è continua;
- (c) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è derivabile;

motivare adeguatamente la risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x} .$$

**Svolgimento e risposta.**

9. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - \sqrt[4]{x^4 + x^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{x} \right) .$$

**Svolgimento e risposta.**

10. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x})^3}{1 - \cos x^3} .$$

**Svolgimento e risposta.**

11. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctg} x \, dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+2)} \, dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

13. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^4 \frac{2x - x\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \, dx .$$

**Svolgimento e risposta.**