

# Analisi Matematica 1 - 8/1/13 - Compito 1 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 12) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - x)e^{-\frac{1}{2+x}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. 1\*) determinare il dominio di  $f$ ;
- (b) (p. 1.9\*) calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3\*) dire se  $f$  ammette asintoti in  $+\infty$  e in  $-\infty$  e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3\*) studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- (e) (p. 1\*) determinare il prolungamento continuo di  $f|] - 2, +\infty[$  in  $-2$  e studiarne la derivabilità rispetto a  $\bar{\mathbf{R}}$  in  $-2$ ;
- (f) (p. 3\*) studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\ddagger)$ .

**Disegnare** approssimativamente il grafico di  $f$ . Per disegnare il grafico di  $f$  si può tenere conto delle seguenti approssimazioni  $f(0) \approx 0.61$ ,  $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \approx -4.30$ ,  $f(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}) \approx 8.19$ ,  $\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \approx -0.70$ ,  $f(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}) \approx 0.79$ ,  $-\frac{11}{7} \approx -1.57$ ,  $f(-\frac{11}{7}) \approx 0.25$ .

**NB** (\* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

**Svolgimento e risposta.**

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^n}{e^{n^2}} .$$

**Svolgimento e risposta.**

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} .$$

**Svolgimento e risposta.**

4. (p. 1) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!+1} z^n .$$

**Svolgimento e risposta.**

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$iz^2 + 12z - 3 = 0 .$$

**Svolgimento e risposta.**

6. (p. 1) Calcolare la derivata della seguente funzione, in un punto generico  $x$  del dominio, ove  $f$  è derivabile:

$$f(x) = \operatorname{tg}(\log(x \sin x)) .$$

**Svolgimento e risposta.**

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{x^6 - x^5 + x^4 + 1} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[1000]{x} - \log x}{\sqrt[1000]{x} + \log x} .$$

**Svolgimento e risposta.**

9. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \operatorname{ch} x)^3}{(x - \operatorname{Arctg} x)^2} .$$

**Svolgimento e risposta.**

10. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2^x} dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente l'integrale indefinito della funzione o formule simili.

**Svolgimento e risposta.**

11. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+3}} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(2x) dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano gli integrali  $\int x \operatorname{Arctg}(mx) dx$ ,  $\int \frac{1}{ax^2+1} dx$  per  $a \neq 1$  o formule simili.

**Svolgimento e risposta.**

# Analisi Matematica 1 - 8/1/13 - Compito 1 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 12) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (x - 2)e^{\frac{2x-3}{3x-2}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1\*) determinare il dominio di  $f$ ;
- (b) (p. 1.9\*) calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3\*) dire se  $f$  ammette asintoti in  $+\infty$  e in  $-\infty$  e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3\*) studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- (e) (p. 1\*) determinare il prolungamento continuo di  $f$ ]  $\frac{3}{2}$ ,  $+\infty$ [ in  $\frac{3}{2}$  e studiarne la derivabilità rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  in  $\frac{3}{2}$ ;
- (f) (p. 3\*) studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\ddagger)$ .

**Disegnare** approssimativamente il grafico di  $f$ . Per disegnare il grafico di  $f$  si può tenere conto delle seguenti approssimazioni  $\frac{2}{3} \approx 0.67$ ,  $f(0) \approx -9.00$ ,  $-\frac{23}{9}e^{\frac{2}{3}} \approx -4.98$ ,  $e^{\frac{2}{3}} \approx 1.95$ ,  $\frac{7-\sqrt{265}}{18} \approx -0.65$ ,  $f(\frac{7-\sqrt{265}}{18}) \approx -7.84$ ,  $\frac{7+\sqrt{265}}{18} \approx 1.29$ ,  $f(\frac{7+\sqrt{265}}{18}) \approx -0.57$ ,  $\frac{26}{29} \approx 0.90$ ,  $f(\frac{26}{29}) \approx -0.19$ .

**NB** (\* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

**Svolgimento e risposta.**

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}} .$$

**Svolgimento e risposta.**

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n + 3^n} .$$

**Svolgimento e risposta.**

4. (p. 1) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - n^2}{n!} z^n .$$

**Svolgimento e risposta.**

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$iz^2 - 2z + 2 = 0 .$$

**Svolgimento e risposta.**

6. (p. 1) Calcolare la derivata della seguente funzione, in un punto generico  $x$  del dominio, ove  $f$  è derivabile:

$$f(x) = \log(\sin(x^2 \log x)) .$$

**Svolgimento e risposta.**

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^0 \sqrt{\frac{3-x}{x^2+1}} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x} - \sin x}{x - \sqrt[4]{x} + 2x^3} .$$

**Svolgimento e risposta.**

9. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \operatorname{sh} x)^2}{\cos x^3 - 1} .$$

**Svolgimento e risposta.**

10. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{2+3^x} dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente l'integrale indefinito della funzione o formule simili.

**Svolgimento e risposta.**

11. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^4+1}} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(3x) dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano gli integrali  $\int x \operatorname{Arctg}(mx) dx$ ,  $\int \frac{1}{ax^2+1} dx$  per  $a \neq 1$  o formule simili.

**Svolgimento e risposta.**

# Analisi Matematica 1 - 8/1/13 - Compito 1 - Versione 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 12) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (x + 3)e^{-\frac{2x+1}{x}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. 1\*) determinare il dominio di  $f$ ;
- (b) (p. 1.9\*) calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3\*) dire se  $f$  ammette asintoti in  $+\infty$  e in  $-\infty$  e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3\*) studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- (e) (p. 1\*) determinare il prolungamento continuo di  $f$ ]0,  $+\infty$ [ in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  in 0;
- (f) (p. 3\*) studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\ddagger)$ .

**Disegnare** approssimativamente il grafico di  $f$ . Per disegnare il grafico di  $f$  si può tenere conto delle seguenti approssimazioni  $e^{-2} \approx 0.14$ ,  $2e^{-2} \approx 0.27$ ,  $\frac{3}{5} = 0.6$ ,  $f(\frac{3}{5}) \approx 0,09$ . Si possono usare unità di misura diversa per i due assi. **NB** (\* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

**Svolgimento e risposta.**

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^n}{n^{\frac{n}{2}}}.$$

**Svolgimento e risposta.**

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n}.$$

**Svolgimento e risposta.**

4. (p. 1) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! - 2^n}{3^n + n} z^n.$$

**Svolgimento e risposta.**

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$iz^2 + 6iz + 3 = 0.$$

**Svolgimento e risposta.**

6. (p. 1) Calcolare la derivata della seguente funzione, in un punto generico  $x$  del dominio, ove  $f$  è derivabile:

$$f(x) = \operatorname{Arccos}(\sqrt{\sin x} \cos x) .$$

**Svolgimento e risposta.**

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{3-x}}{x^2+1} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - x + 3}{x + \sin x} .$$

**Svolgimento e risposta.**

9. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - \log(1+x))^3}{(x - \sin x)^2} .$$

**Svolgimento e risposta.**

10. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{3 + 5^x} dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente l'integrale indefinito della funzione o formule simili.

**Svolgimento e risposta.**

11. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[5]{x^5 + 1}} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(4x) dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano gli integrali  $\int x \operatorname{Arctg}(mx) dx$ ,  $\int \frac{1}{ax^2+1} dx$  per  $a \neq 1$  o formule simili.

**Svolgimento e risposta.**