

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 12) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - x)e^{-\frac{1}{2+x}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. 1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 1.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di $f|]-2, +\infty[$ in -2 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in -2 ;
- (f) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Per disegnare il grafico di f si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $f(0) \approx 0.61$, $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \approx -4.30$, $f(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}) \approx 8.19$, $\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \approx -0.70$, $f(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}) \approx 0.79$, $-\frac{11}{7} \approx -1.57$, $f(-\frac{11}{7}) \approx 0.25$.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^n}{e^{n^2}}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! + 1} z^n.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$iz^2 + 12z - 3 = 0.$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Calcolare la derivata della seguente funzione, in un punto generico x del dominio, ove f è derivabile:

$$f(x) = \operatorname{tg}(\log(x \sin x)) .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{x^6 - x^5 + x^4 + 1} dx .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[1000]{x} - \log x}{\sqrt[1000]{x} + \log x} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \operatorname{ch} x)^3}{(x - \operatorname{Arctg} x)^2} .$$

Svolgimento e risposta.

4 10. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2^x} dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente l'integrale indefinito della funzione o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+3}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(2x) dx .$$

Si chiede di non usare formule che diano gli integrali $\int x \operatorname{Arctg}(mx) dx$, $\int \frac{1}{ax^2+1} dx$ per $a \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

b) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

c) Si ha

$$f(x) \sim -x \quad e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((1-x) e^{-\frac{1}{2+x}} + x \right) =$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$e^y = 1 + y + o(y)$$

Quindi per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$e^{-\frac{1}{2+x}} = 1 - \frac{1}{2+x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((1-x) e^{-\frac{1}{2+x}} + x \right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((-x+1) \left(1 - \frac{1}{2+x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) + x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{x}{2+x} + o(1) + 1 + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2+x} + 1 + o(1) \right) = 2 \end{aligned}$$

Quindi f ammette asintoto per $x \rightarrow +\infty$ e l'asintoto è la retta

$$y = -x + 2$$

Procedendo nello stesso modo si vede che f ammette
asintoto per $x \rightarrow -\infty$ e che l'asintoto è la retta

$$y = -x + 2$$

d) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-\frac{1}{2+x}} + (1-x) e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{1}{(2+x)^2} = \\ &= e^{-\frac{1}{2+x}} \left(\frac{1-x}{(2+x)^2} - 1 \right) = e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{1-x-4-4x-x^2}{(2+x)^2} = \\ &= -e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2+5x+3}{(2+x)^2} \end{aligned}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 + 5x + 3 = 0$, cioè se
e solo se $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2 + 5x + 3 < 0$, cioè
se e solo se $\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$ o
 $x > \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$

Quindi f è strettamente crescente su

$$\left[\frac{-5 - \sqrt{13}}{2}, -2 \right] \text{ e su } \left[-2, \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \right]$$

f è strettamente decrescente su

$$\left] -\infty, \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \right] \text{ e su } \left[\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, +\infty \right[$$

Si ha quindi:

$$m(\nearrow) = \left\{ \left[\frac{-5 - \sqrt{13}}{2}, -2 \right], \left[-2, \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \right] \right\}$$

$$M(\rightarrow) = \emptyset$$

$$M(\searrow) = \left\{ \right] -\infty, \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \left] , \left[\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, +\infty \right[\right\}$$

(e) Il prolungamento continuo di $f|]-2, +\infty[$ in -2 è la funzione

$$g:]-2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in]-2, +\infty[\\ 0 & \text{per } x = -2 \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x \neq -2}} g'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x \neq -2}} \left(-e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2 + 5x + 3}{(2+x)^2} \right) =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x \neq -2}} \left(-e^{-\frac{1}{2+x}} \left(-\frac{1}{(2+x)} \right)^2 (x^2 + 5x + 3) \right) :$$

Si ha

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x \neq -2}} -e^{-\frac{1}{2+x}} \left(-\frac{1}{2+x} \right)^2 = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot y^2 = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x + 3) = -3$$

Si ha quindi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x \neq -2}} g'(x) = -0 \cdot (-3) = 0$$

Quindi g è derivabile in -2 e $g'(-2) = 0$

f) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= - \left(e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{1}{(2+x)^2} \frac{x^2+5x+3}{(2+x)^2} + e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{(2x+5)(2+x)^2 - 2(2+x)(x^2+5x+3)}{(2+x)^4} \right) = \\
 &= - e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2+5x+3 + (2x+5)(4+4x+x^2) - (4+2x)(x^2+5x+3)}{(2+x)^4} = \\
 &= - e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2+5x+3+8x+8x^2+2x^3+20+20x+5x^2-4x^2-20x-12-2x^3-10x^2-6x}{(2+x)^4} = \\
 &= - e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{7x+11}{(2+x)^4}
 \end{aligned}$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $7x+11=0$, cioè se e solo se $x = -\frac{11}{7}$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $7x+11 < 0$, cioè se e solo se $x < -\frac{11}{7}$

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x > -\frac{11}{7}$

Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty, -2[$ e su $]-2, -\frac{11}{7}]$, f è strettamente concava su $[-\frac{11}{7}, +\infty[$

Si ha quindi:

$$C(\uparrow) = \left\{]-\infty, -2[,]-2, -\frac{11}{7}] \right\}$$

$$C(\downarrow) = \emptyset$$

$$C(\downarrow) = \left\{ [-\frac{11}{7}, +\infty[\right\}$$

$$\text{siehe } f(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$$

5

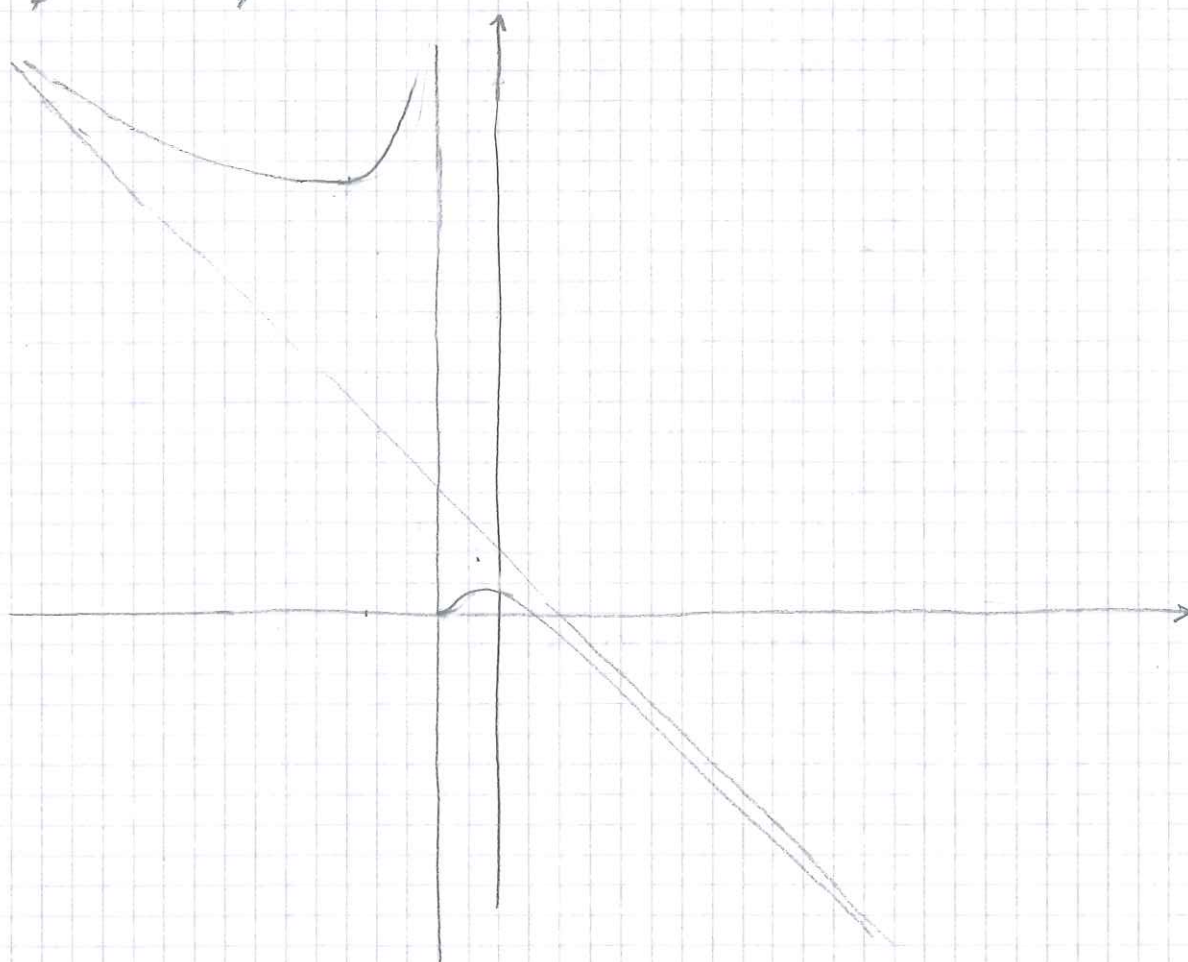
$$\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \approx -4.30, \quad \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \approx -0.70$$

$$f\left(\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}\right) = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} e^{-\frac{2}{1 + \sqrt{13}}} \approx 8.19$$

$$f\left(\frac{-5 - \sqrt{13}}{2}\right) = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} e^{-\frac{2}{1 - \sqrt{13}}} \approx 0.79$$

$$-\frac{11}{7} \approx -1.57$$

$$f\left(-\frac{11}{7}\right) = \frac{18}{7} e^{-\frac{7}{3}} \approx 0.25$$



Esercizio 2

Sicché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\log n)^n}{e^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\log n}{e^n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{e^n} = 0$$

Quindi per il criterio della radice la serie è convergente

Esercizio 3

Sicché

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1$ la serie è divergente e non uniformemente

Esercizio 4

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\left| \frac{1}{n!+1} z^n \right| \sim \left| \frac{1}{n!} z^n \right| = \frac{|z|^n}{n!}$$

Quindi la serie è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $+\infty$

Esercizio 5

L'equazione

$$z^2 + 12z - 3 = 0$$

è equivalente a

$$z^2 - 12iz + 3i = 0$$

Il polinomio $z^2 - 12iz + 3i$ ha discriminante Δ tale che

$$\frac{\Delta}{4} = (-6i)^2 - 3i = -36 - 3i = 3(-12 - i)$$

Consideriamo l'equazione

$$w^2 = 3(-12 - i)$$

Si ha

$$|3(-12 - i)| = 3|-12 - i| = 3\sqrt{145}$$

e

$$-\arccos \frac{3(-12)}{\sqrt{145}} = -\arccos\left(-\frac{12}{\sqrt{145}}\right) \in \arg(3(-12 - i))$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} w &= \pm \sqrt{3\sqrt{145}} \left(\cos\left(-\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{12}{\sqrt{145}}\right)\right) + i \sin\left(-\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{12}{\sqrt{145}}\right)\right) \right) = \\ &= \pm \sqrt{3\sqrt{145}} \left(\cos\left(\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{12}{\sqrt{145}}\right)\right) - i \sin\left(\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{12}{\sqrt{145}}\right)\right) \right) = \\ &= \pm \sqrt{3\sqrt{145}} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \arccos\left(-\frac{12}{\sqrt{145}}\right)}{2}} - i \sqrt{\frac{1 - \cos \arccos\left(-\frac{12}{\sqrt{145}}\right)}{2}} \right) = \\ &= \pm \sqrt{3\sqrt{145}} \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{12}{\sqrt{145}}}{2}} - i \sqrt{\frac{1 + \frac{12}{\sqrt{145}}}{2}} \right) = \end{aligned}$$

$$= \pm \sqrt{3\sqrt{145}} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{145}-12}{2\sqrt{145}}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{145}+12}{2\sqrt{145}}} \right) =$$

$$= \pm \sqrt{3} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{145}-12}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{145}+12}{2}} \right) =$$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{3\sqrt{145}-36}{2}} - i \sqrt{\frac{3\sqrt{145}+36}{2}} \right)$$

Si ha quindi:

$$z = 6i \pm \left(\sqrt{\frac{3\sqrt{145}-36}{2}} - i \sqrt{\frac{3\sqrt{145}+36}{2}} \right)$$

Le soluzioni sono quindi:

$$z_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{145}-36}{2}} + i \left(6 - \sqrt{\frac{3\sqrt{145}+36}{2}} \right)$$

e

$$z_2 = -\sqrt{\frac{3\sqrt{145}-36}{2}} + i \left(6 + \sqrt{\frac{3\sqrt{145}+36}{2}} \right)$$

Esercizio 6

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \log(x \sin x)} \cdot \frac{1}{x \sin x} (\sin x + x \cos x) = \frac{1}{\cos^2 \log(x \sin x)} \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x \right)$$

Esercizio 7

Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta negativa della funzione

$$f:]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{x^6 - x^5 + x^4 + 1}$$

Se h2

$$\frac{x^2}{x^6 - x^5 + x^4 + 1} \sim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4}$$

Essendo $4 > 1$, l'integrale improprio è convergente

Esercizio 8

Se h e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[1000]{x} - \log x}{\sqrt[1000]{x} + \log x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{1000}} - \log x}{x^{\frac{1}{1000}} + \log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{1000}}}{x^{\frac{1}{1000}}} = 1 \end{aligned}$$

Esercizio 9

Se h e

$$x - \operatorname{Arctg} x \sim \frac{1}{3} x^3$$

Se h e

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x - \operatorname{ch} x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2) - 1 - \frac{1}{2} x^2 =$$

$$= -x^2 + o(x^2) \sim -x^2$$

Se h e quindi

$$\frac{(\cos x - \cosh x)^3}{(x - \operatorname{Arctg} x)^2} \sim \frac{(-x^2)^3}{\left(\frac{1}{3}x^3\right)^2} = \frac{-1}{\frac{1}{9}} = -9$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \cosh x)^3}{(x - \operatorname{Arctg} x)^2} = -9$$

Esercizio 10

Poniamo $2^x = t$; si ha $x = \log_2 t$;

quindi si ha

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{t}$$

Per $x = 0$, si ha $t = 1$; per $x = 1$, si ha $t = 2$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+2^x} dx &= \int_1^2 \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} dt \end{aligned}$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

Si ha

$$1 = A(t+1) + Bt$$

Per $t=0$ si ha $1=A$; quindi $A=1$.

Per $t=-1$ si ha $1=-B$; quindi $B=-1$

Si ha quindi

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt &= \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{\log 2} \left[\log t - \log(t+1) \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{\log 2} (\log 2 - \log 3 + \log 2) = \\ &= \frac{1}{\log 2} (2 \log 2 - \log 3) = 2 - \frac{\log 3}{\log 2} \end{aligned}$$

Esercizio 11

Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+3}} dx &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^3+3)^{-\frac{1}{3}} \cdot 3x^2 dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{(x^3+3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \left(4^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{2}{3}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{9}}{2} \end{aligned}$$

Zerunur 12

Sche

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 x \operatorname{Arctg}(2x) dx = \\
& = \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2 dx = \\
& = \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{4x^2+1} dx = \\
& = \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4x^2}{4x^2+1} dx = \\
& = \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4x^2+1-1}{4x^2+1} dx = \\
& = \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{4x^2+1} \right) dx = \\
& = \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{4x^2+1} dx = \\
& = \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{4} x \right]_0^1 + \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{1}{(2x)^2+1} \cdot 2 dx = \\
& = \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^1 = \\
& = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{Arctg} 2 = \frac{5}{8} \operatorname{Arctg} 2 - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$