Analisi Matematica 1 - 23/1/13 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = \frac{\log^6 x}{x} \ ,$$
rispondendo alle seguenti domande:

   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

   (b) (p. .9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\to)$;

   (d) (p. 3*) studiare la convessitàdi f determinando gli gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $e^6 \approx 403.43$, $f(e^6) \approx 115.65$, $e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}} \approx 9.10$, $f(e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}}) \approx 12.75$, $e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}} \approx 890.06$, $f(e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}}) \approx 110.23$. Si possono disegnare 2 grafici: uno per gli x "piccoli" e uno per gli x "grandi", o, se si vuole, un unico grafico, senza tenere conto della proporzionalità.

   NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^9 = -5 .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = 5 - 14i .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin(\log(x^2 + 3)) ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\, dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 2) Sia

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sin x + 2\cos x\ ;$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinarli (risultato semplificato).

Suggerimento. Per confrontare i valori e semplificare il risultato si possono utilizzare le formule $\sin x = \pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ e $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \log(1+x^2)}{\sin x^4}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +0} \frac{\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)}\ .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+2)^2 \sin(3x+1)\, dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+2)\sqrt{2x+1}\, dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

13. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x}\, dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

14. (p. 5) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx\ .$$

NB 1. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\, dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2 - 4q < 0$.

NB 2. Nel calcolo del valore si può agire per "analogia" (o per simmetria), calcolando un solo integrale improprio, invece che due integrali impropri.

Svolgimento e risposta.(Per lo svolgimento di questo esercizio può essere chiesto un ulteriore foglio.)

Analisi Matematica 1 - 23/1/13 - Compito 2 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log^3 x}{x^2} \ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

   (b) (p. .9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

   (d) (p. 3*) studiare la convessitàdi f determinando gli gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $e^{\frac{3}{2}} \approx 4.48$, $f(e^{\frac{3}{2}}) \approx 0.17$, $e^{\frac{1}{2}} \approx 1.65$, $f(e^{\frac{1}{2}}) \approx 0.05$, $e^2 \approx 7.39$, $f(e^2) \approx 0.15$. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

   NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+2}} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+1} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^8 = -5i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = 4 - 2i .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin(5 \cos x^2) ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{x}}{x}\, dx \, .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 2) Sia

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2\sin x + \cos x \; ;$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinarli (risultato semplificato).

Suggerimento. Per confrontare i valori e semplificare il risultato si possono utilizzare le formule $\sin x = \pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ e $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\operatorname{sh} x - x)\log(1+x^2)}{1-\cos x^3} \, .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +0} \frac{\operatorname{sh}(e^x - 1) + \log(1+x) - 2x}{\sin(3x) - 3x} \, .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+2)^2 \cos(2x+1)\, dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+3)\sqrt{3x+1}\, dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

13. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\, dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

14. (p. 5) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx\ .$$

NB 1. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\, dx = a \log\sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2 - 4q < 0$.

NB 2. Nel calcolo del valore si può agire per "analogia" (o per simmetria), calcolando un solo integrale improprio, invece che due integrali impropri.

Svolgimento e risposta.(Per lo svolgimento di questo esercizio può essere chiesto un ulteriore foglio.)

Analisi Matematica 1 - 23/1/13 - Compito 2 - Versione 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = \frac{\log^2 x}{x^3} ,$$
rispondendo alle seguenti domande:
   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;
   (b) (p. .9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
   (d) (p. 3*) studiare la convessitàdi f determinando gli gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $e^{\frac{2}{3}} \approx 1.95$, $f(e^{\frac{2}{3}}) \approx 0.06$, $e^{\frac{1}{6}} \approx 1.18$, $f(e^{\frac{1}{6}}) \approx 0.02$, $e \approx 2.72$, $f(e) \approx 0.05$. Si possono usare unità di misura differenti per i due assi.

   NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+5^n} \ .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+1}{n} z^n \ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^8 = 5i \ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = 2 - 4i \ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arctg} \sin x^2 \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 2) Sia

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2\sin x + 3\cos x\ ;$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinarli (risultato semplificato).

Suggerimento. Per confrontare i valori e semplificare il risultato si possono utilizzare le formule $\sin x = \pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ e $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\log(1+x^3)}{\operatorname{Arctg} x^4 \operatorname{sh} x}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +0} \frac{2\sin(1-e^x) + 2\operatorname{Arctg} x + x^2}{3x - \sin(3x)}\ .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+1)^2 \operatorname{sh}(4x+1)\, dx \ .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+5)\sqrt{5x+1}\, dx \ .$$

Svolgimento e risposta.

13. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx \ .$$

Svolgimento e risposta.

14. (p. 5) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2+x^2}{1+x^4}\, dx \ .$$

NB 1. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\, dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2 - 4q < 0$.

NB 2. Nel calcolo del valore si può agire per “analogia” (o per simmetria), calcolando un solo integrale improprio, invece che due integrali impropri.

Svolgimento e risposta.(Per lo svolgimento di questo esercizio può essere chiesto un ulteriore foglio.)