

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log^6 x}{x},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. .9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\ddagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $e^6 \approx 403.43$, $f(e^6) \approx 115.65$, $e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}} \approx 9.10$, $f(e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}}) \approx 12.75$, $e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}} \approx 890.06$, $f(e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}}) \approx 110.23$. Si possono disegnare 2 grafici: uno per gli x "piccoli" e uno per gli x "grandi", o, se si vuole, un unico grafico, senza tenere conto della proporzionalità.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^9 = -5.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = 5 - 14i.$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin(\log(x^2 + 3));$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 2) Sia

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sin x + 2 \cos x;$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
(b) in caso affermativo, determinarli (risultato semplificato).

Suggerimento. Per confrontare i valori e semplificare il risultato si possono utilizzare le formule $\sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ e $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \log(1+x^2)}{\sin x^4}.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)}.$$

Svolgimento e risposta.

- 4
11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+2)^2 \sin(3x+1) dx .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+2)\sqrt{2x+1} dx .$$

Svolgimento e risposta.

13. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

14. (p. 5) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx .$$

NB 1. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2 - 4q < 0$.

NB 2. Nel calcolo del valore si può agire per "analogia" (o per simmetria), calcolando un solo integrale improprio, invece che due integrali impropri.

Svolgimento e risposta. (Per lo svolgimento di questo esercizio può essere chiesto un ulteriore foglio.)

Vernone 1

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) =]0, +\infty[$

b) Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c) Per ogni $x \in]0, +\infty[$ si ha

$$f'(x) = \frac{6 \log^5 x \cdot \frac{1}{x} x - \log^6 x}{x^2} = \frac{\log^5 x (6 - \log x)}{x^2}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$ o $6 - \log x = 0$,
cioè se e solo se $x = 1$ o $\log x = 6$, cioè se e solo
se $x = 1$ o $x = e^6$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $1 < x < e^6$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < 1$ o $x > e^6$

Quindi f è strettamente crescente su $[1, e^6]$,
strettamente decrescente su $]0, 1]$ e su $[e^6, +\infty[$

Si ha quindi

$$m(\nearrow) = \{ [1, e^6] \}, \quad m(\rightarrow) = \emptyset$$

$$m(\searrow) = \{]0, 1], [e^6, +\infty[\}$$

d) Sia $x \in]0, +\infty[$. Si ha

$$f''(x) = \frac{(30 \log^4 x \cdot \frac{1}{x} - 6 \log^5 x \cdot \frac{1}{x^2}) x^2 - 2x (6 \log^5 x - \log^6 x)}{x^4}$$

$$= \frac{x \log^4 x (30 - 6 \log x - 12 \log x + 2 \log^2 x)}{x^4} =$$

$$= \frac{2 \times \log^4 x (\log^2 x - 9 \log x + 15)}{x^4}$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se

$$\log x = \frac{9 \pm \sqrt{81-60}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \text{o} \quad \log x = 0$$

cioe se e solo se

$$x = e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}} \quad \text{o} \quad x = e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}} \quad \text{o} \quad x = 1$$

$$\text{Si ha } 0 < \frac{9-\sqrt{21}}{2}; \text{ quindi } 1 = e^0 < e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}}$$

Si ha quindi $f''(x) > 0$ se e solo se

$$0 < x < 1 \quad \text{o} \quad 1 < x < e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}} \quad \text{o} \quad x > e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}}$$

$$\text{Si ha } f''(x) < 0 \text{ se e solo se } e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}} < x < e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}}$$

quindi f è strettamente convessa su

$$]0, 1], \text{ su } [1, e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}}], \text{ e su } [e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}}, +\infty[$$

Essendo $f'_-(1) = f'_+(1)$, f è strettamente

$$\text{convessa su }]0, e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}}]$$

$$f \text{ è strettamente concava su } [e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}}, e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}}]$$

Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{]0, e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}}], [e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}}, +\infty[\right\}$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}}, e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}}] \right\}$$

Si ha

$$e^6 \approx 403.43, \quad f(e^6) = \frac{46656}{e^6} \approx 115.65$$

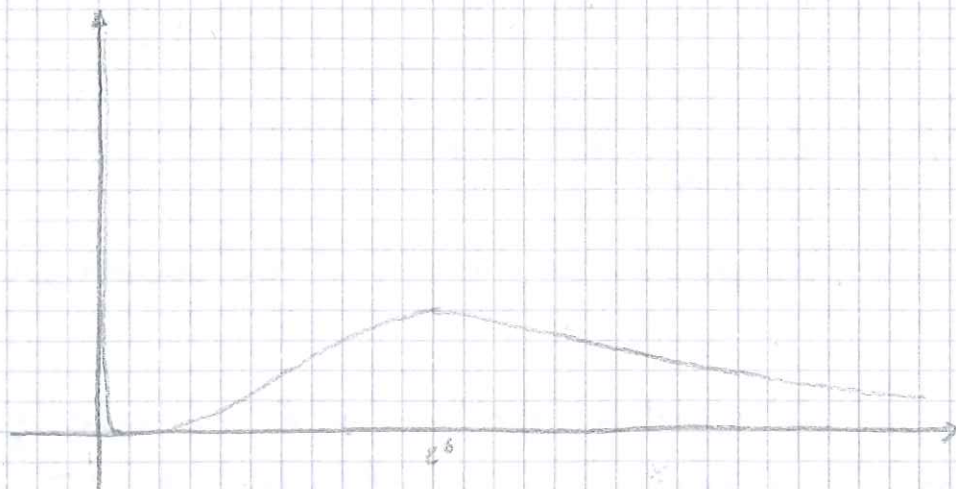
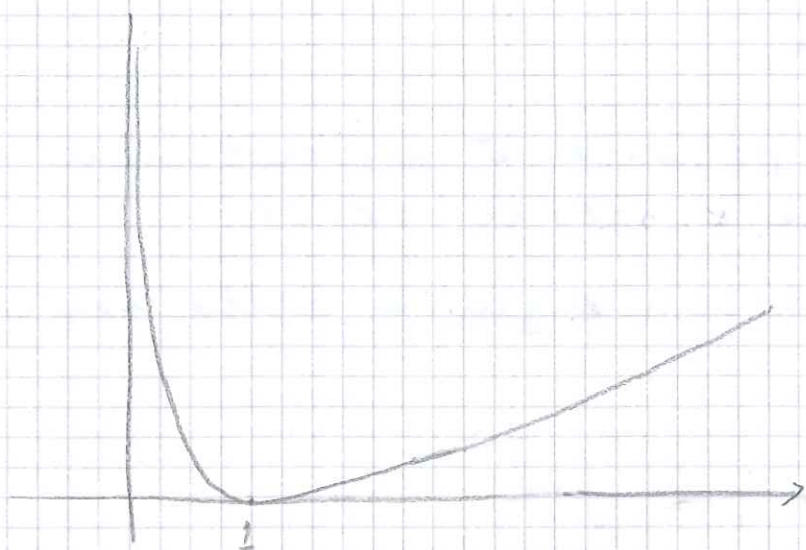
$$f(1) = 0$$

$$e^{\frac{9-\sqrt{21}}{2}} \approx 9.10$$

$$f\left(\frac{9-\sqrt{21}}{2}\right) = 49113 e^{\frac{-9+\sqrt{21}}{2}} - 10692\sqrt{21} e^{\frac{-9+\sqrt{21}}{2}} \approx 12.75$$

$$e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}} \approx 890.06$$

$$f\left(e^{\frac{9+\sqrt{21}}{2}}\right) = 49113 e^{\frac{-9-\sqrt{21}}{2}} + 10692\sqrt{21} e^{\frac{-9-\sqrt{21}}{2}} \approx 110.23$$



Esercizio 2

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$$

Quindi la serie è divergente positivamente

Esercizio 3

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$|n^2 z^n| = n^2 |z|^n$$

Quindi la serie di potenze è assolutamente convergente in z se e solo se $|z| < 1$.

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$R = 1$$

Si è $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n^2 z^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$$

Quindi la serie di potenze non è convergente in z .

Quindi la serie di potenze non è convergente in alcun punto della circonferenza $|z| = 1$

Esercizio 4

Si ha $|-5| = 5$ e $\pi \in \arg(-5)$

Si ha quindi:

$$z = \sqrt[9]{5} e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{9}} \quad \text{per un } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Esercizio 5

Si ha

$$|5 - 14i| = \sqrt{25 + 196} = \sqrt{221} \quad e$$

$$-\operatorname{Arctg} \frac{14}{5} \in \arg(5 - 14i)$$

Si ha quindi:

$$z = \log \sqrt{221} + i \left(-\operatorname{Arctg} \frac{14}{5} + 2k\pi \right)$$

per un $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio 6

a) Si ha $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\log(x^2 + 3)) \cdot \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x = \\ &= \frac{2x \cos(\log(x^2 + 3))}{x^2 + 3} \end{aligned}$$

Esercizio 7

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x^2}$$

Si che $\frac{\sin x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

quindi l'integrale improprio è divergente positivamente

Esercizio 8

a) Essendo $\text{dom}(f)$ compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo di f

Sia $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Si che $f'(x) = \cos x - 2 \sin x$

Si che $f'(x) = 0$ se e solo se $\cos x - 2 \sin x = 0$

ovvero se e solo se $\tan x = \frac{1}{2}$, ovvero, essendo

$x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, se e solo se $x = \text{Arctg} \frac{1}{2}$

Si che quindi

$$E \subset \left\{ \text{Arctg} \frac{1}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \right\}$$

Si che

$$f(0) = 2,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f\left(\text{Arctg} \frac{1}{2}\right) = \sin \text{Arctg} \frac{1}{2} + 2 \cos \text{Arctg} \frac{1}{2}$$

Essendo $0 < \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, si ha $\sin \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} > 0$
e $\cos \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} &= \frac{\operatorname{tg} \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$f\left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5} \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

Si ha $\sqrt{5} > 2$

Quindi si ha

$$\max(f) = \sqrt{5}, \quad \min(f) = 1$$

Esercizio 9

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \log(1+x^2)}{\sin x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$$

Thema 10

Sche

$$2x - \sin(2x) \sim \frac{1}{6} (2x)^3 = \frac{4}{3} x^3$$

Sche

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$e^x - 1 = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$\sin y = y - \frac{1}{6} y^3 + o(y^3) \quad \text{für } y \rightarrow 0$$

$$\sin(e^x - 1) = \sin\left(x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6} \left(x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6} x^3 = x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^3)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2 =$$

$$x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^3) - x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - x^2 = -\frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\sim \frac{1}{3} x^3$$

Sche quindi

$$\frac{\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)} \sim \frac{-\frac{1}{3} x^3}{\frac{4}{3} x^3} = -\frac{1}{4}$$

Sche quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)} = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 11

Sic h 2

$$\int_0^1 (x+2)^2 \sin(3x+1) dx =$$

$$\left[(x+2)^2 \left(-\frac{1}{3} \cos(3x+1) \right) \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{3} \cos(3x+1) 2(x+2) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3} (x+2)^2 \cos(3x+1) \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 (x+2) \cos(3x+1) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3} (x+2)^2 \cos(3x+1) \right]_0^1 + \frac{2}{3} \left(\left[(x+2) \frac{1}{3} \sin(3x+1) \right]_0^1 + \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \frac{1}{3} \sin(3x+1) dx \right) =$$

$$= \left[-\frac{1}{3} (x+2)^2 \cos(3x+1) + \frac{2}{9} (x+2) \sin(3x+1) \right]_0^1 +$$

$$- \frac{2}{9} \left[-\frac{1}{9} \cos(3x+1) \right]_0^1 =$$

$$= \left[-\frac{1}{3} (x+2)^2 \cos(3x+1) + \frac{2}{9} (x+2) \sin(3x+1) + \frac{2}{27} \cos(3x+1) \right]_0^1 =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3} x^2 - \frac{4}{3} x - \frac{34}{27} \right) \cos(3x+1) + \left(\frac{2}{9} x + \frac{4}{9} \right) \sin(3x+1) \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{29}{27} \cos 4 + \frac{2}{3} \sin 4 + \frac{34}{27} \cos 1 - \frac{4}{9} \sin 1$$

Esercizio 12

Poniamo $\sqrt{2x+1} = t$. Per cui $2x+1 = t^2$,

quindi $x = \frac{t^2-1}{2}$. Per cui quindi

$$\frac{dx}{dt} = t.$$

Per $x = 0$ si ha $t = 1$; per $x = 1$, si ha $t = \sqrt{3}$

Per cui quindi

$$\int_0^1 (x+2)\sqrt{2x+1} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{t^2-1}{2} + 2 \right) \cdot t \cdot t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} (t^2+3) \cdot t^2 dt = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} (t^4 + 3t^2) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} t^5 + t^3 \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{5} \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \frac{1}{5} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{24}{5} \sqrt{3} - \frac{6}{5} \right) = \frac{12}{5} \sqrt{3} - \frac{3}{5}$$

Esercizio 13

Per cui

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x} \operatorname{ch} x dx =$$

$$= \left[\operatorname{Arctg} \operatorname{sh} x \right]_0^1 = \operatorname{Arctg} \operatorname{sh} 1$$

Esercizio 14

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f:]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$$

L'integrale improprio assegnato è convergente se sono convergenti gli integrali impropri:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4} dx$$

Si ha $\frac{1}{1+x^4} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$

Quindi l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

è convergente.

Si ha $\frac{1}{1+x^4} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$

Quindi l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4} dx$$

è convergente.

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

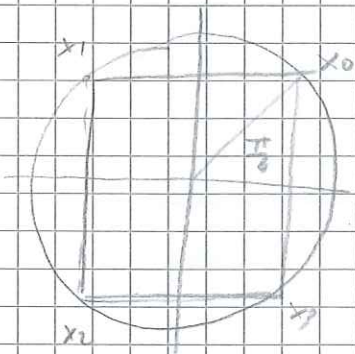
Per il valore, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

Per fattorizzare il polinomio x^4+1 determiniamo le radici complesse di

$$x^4 = -1$$

Si ha $|-1|=1$ e $\pi \in \arg(-1)$



Le radici sono

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si ha

$$x^4 + 1 = (x - x_0)(x - x_3)(x - x_1)(x - x_2) =$$

$$= \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \left(\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \left(\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

Esistono A, B, C, D tali che

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

So we

$$1 = (Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

2 unknown

$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0 \\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases}, \text{ we get}$$

$$\begin{cases} C=-A \\ D=1-B \\ \sqrt{2}A+B+\sqrt{2}A+1-B=0 \\ A+\sqrt{2}B-A-\sqrt{2}(1-B)=0 \end{cases}, \text{ we get}$$

$$\begin{cases} C=-A \\ D=1-B \\ 2\sqrt{2}A = -1 \\ 2\sqrt{2}B = \sqrt{2} \end{cases}, \text{ we get}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ C = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ B = \frac{1}{2} \\ D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4} \frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4+1} dx &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{2} \log \sqrt{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{4-2}{\sqrt{4-2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{2} \log \sqrt{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{-4+2}{\sqrt{4-2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} \right) \right) + C = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{2} \log \sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) + C = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\log \sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}} + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}x+1) + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}x-1) \right) + C \end{aligned}$$

Per ogni $y > 0$ si ha quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{1}{x^4+1} dx &= \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\log \sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}} + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}x+1) + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}x-1) \right]_0^y &= \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y + 1) + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y - 1) - \operatorname{Arctg} 1 - \operatorname{Arctg}(-1) \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y + 1) + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y - 1) \right)$$

Se ha quindi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y + 1) + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y - 1) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

Per ogni $y < 0$ si ha:

$$\int_y^0 \frac{1}{x^4 + 1} dx =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \left[\log \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}x - 1) \right]_y^0 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\operatorname{Arctg} 1 + \operatorname{Arctg}(-1) \right) - \log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} - \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y + 1) - \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y - 1)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} - \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y + 1) - \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y - 1) \right)$$

So he quendi:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^4+1} dx =$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} - \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y + 1) - \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y - 1) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

So he quendi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi + \frac{\sqrt{2}}{4} \pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$