

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{5^{-|x+1|}}{x^2 - 9},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. 2*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 1.8*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 5*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità di f in -1 .

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{-1-\sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5} \approx -3.69$, $\frac{-1+\sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5} \approx 2.44$, $\frac{1-\sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5} \approx -2.44$, $\frac{1+\sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5} \approx 3.69$, $f\left(\frac{-1+\sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5}\right) \approx -0.0013$, $f\left(\frac{1-\sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5}\right) \approx -0.032$, $f(0) \approx -0.022$, $f(-1) \approx -0.13$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 + 1}{n!} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log n} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^5 = -1 - 2i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = 14 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(x^2 \cos x^3) ;$$

calcolare la derivata di f in un punto x del dominio, dove f è derivabile.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)^2}{x^3 \log(1 + 2x^3)} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(e^x - 1) - \log(1 + x^2) - 2x}{1 - \cos x^2} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+2)^3 \cos(2x+1) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $(ax+b)^n \cos(\alpha x + \beta)$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\frac{ax+b}{x^2+bx+c}$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\frac{ax+b}{x^2+bx+c}$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

b) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5^{-x-1}}{x^2-9} & \text{per } x \geq -1, x \neq 3 \\ \frac{5^{x+1}}{x^2-9} & \text{per } x < -1, x \neq -3 \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{-x-1}}{x^2-9} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x+1}}{x^2-9} = 0$$

Si ha $x^2-9 > 0$ se e solo se $x < -3$ o $x > 3$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$$

c) Se $x > -1$; si ha

$$f'(x) = \frac{5^{-x-1} \log 5 (-1) (x^2-9) - 2x 5^{-x-1}}{(x^2-9)^2} =$$

$$= \frac{5^{-x-1}}{(x^2-9)^2} \left(-(\log 5)x^2 + 9 \log 5 - 2x \right) =$$

$$= - \frac{5^{-x-1}}{(x^2-9)^2} \left((\log 5)x^2 + 2x - 9 \log 5 \right)$$

Si ha

$$f'(x) = 0 \text{ se e solo se } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5};$$

$$\text{Si ha } \frac{-1 + \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5} > 0 > -1.$$

Si ha

$$\frac{-1 - \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5} < -1 \text{ se e solo se}$$

$$-1 - \sqrt{1+9\log 5} < -\log 5, \text{ cioè se e solo se}$$

$$1 + \sqrt{1+9\log 5} > \log 5, \text{ cioè se e solo se}$$

$$\sqrt{1+9\log 5} > \log 5 - 1, \text{ cioè se e solo se}$$

$$1+9\log^2 5 > \log^2 5 - 2\log 5 + 1, \text{ cioè se e solo se}$$

$$8\log^2 5 > -2\log 5 \quad \text{e ciò è vero}$$

$$\text{Si ha quindi } f'(x) = 0 \text{ se e solo se } x = \frac{-1 + \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5}$$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se

$$\frac{-1 - \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5} < x < \frac{-1 + \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5}$$

Quindi se e solo se

$$-1 < x < \frac{-1 + \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5}$$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se

$$x > \frac{-1 + \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5}$$

Sicché

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}{\log 5} < 3 \quad \text{se e solo se}$$

$$-1 + \sqrt{1 + 9 \log^2 5} < 3 \log 5, \quad \text{cioè se e solo se}$$

$$\sqrt{1 + 9 \log^2 5} < 3 \log 5 + 1, \quad \text{cioè se e solo se}$$

$$1 + 9 \log^2 5 < 9 \log^2 5 + 6 \log 5 + 1, \quad \text{cioè se e solo se}$$

$$6 \log 5 > 0 \quad \text{e ciò è vero.}$$

Sicché quindi f strettamente decrescente su

$$\left[-1, \frac{-1 + \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}{\log 5}\right] \quad \text{e } f \text{ strettamente}$$

crescente su

$$\left[\frac{-1 + \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}{\log 5}, 3\right] \quad \text{e su }]3, +\infty[$$

Sia $x < -1$, $x \neq -3$

Sicché

$$f'(x) = \frac{5^{x+1} \log 5 (x^2 - 9) - 2x 5^{x+1}}{(x^2 - 9)^2} =$$

$$= \frac{5^{x+1}}{(x^2 - 9)^2} ((\log 5)x^2 - 2x - 9 \log 5)$$

Sicché

$$f'(x) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}{\log 5}$$

Sicché $\frac{1 + \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}{\log 5} > 0 > -1$

Sicché

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 9\log^2 5}}{\log 5} < -1 \text{ se e solo se } 1 - \sqrt{1 + 9\log^2 5} < -\log 5$$

$$\text{cioè se e solo se } -\sqrt{1 + 9\log^2 5} < -1 - \log 5, \text{ cioè se e}$$

$$\text{solo se } \sqrt{1 + 9\log^2 5} > 1 + \log 5, \text{ cioè se e solo se}$$

$$1 + 9\log^2 5 > 1 + 2\log 5 + \log^2 5, \text{ cioè se e solo se}$$

$$8\log^2 5 > 2\log 5, \text{ cioè se e solo se } 4\log 5 > 1$$

e ciò è vero

Si ha quindi $f'(x) = 0$ se e solo se

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 + 9\log^2 5}}{\log 5}$$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se

$$x < \frac{1 - \sqrt{1 + 9\log^2 5}}{\log 5} \quad \text{o} \quad x > \frac{1 + \sqrt{1 + 9\log^2 5}}{\log 5}$$

cioè se e solo se

$$x < \frac{1 - \sqrt{1 + 9\log^2 5}}{\log 5}$$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 9\log^2 5}}{\log 5} < x < -1$$

Si ha

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 9\log^2 5}}{\log 5} > -3 \text{ se e solo se}$$

$$1 - \sqrt{1 + 9\log^2 5} > -3\log 5, \text{ cioè se e solo se}$$

$$-\sqrt{1 + 9\log^2 5} > -1 - 3\log 5, \text{ cioè se e solo se}$$

$$\sqrt{1+9\log^2 5} < 1+3\log 5, \text{ cioè se e solo se}$$

$$1+9\log^2 5 < 1+9\log^2 5+6\log 5, \text{ cioè se e solo se}$$

$$6\log 5 > 0 \text{ e ciò è vero, si ha quindi}$$

$$-3 < \frac{1 - \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5} < -1$$

Si ha quindi f strettamente crescente su

$$]-\infty, -3[\text{ e su }]-3, \frac{1 - \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5}] \text{ e}$$

f strettamente decrescente su

$$\left[\frac{1 - \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5}, -1 \right]$$

Si ha quindi

$$m(\nearrow) = \left\{]-\infty, -3[,]-3, \frac{1 - \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5}] , \left[-1, \frac{-1 + \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5} \right] \right\}$$

$$m(\rightarrow) = \emptyset$$

$$m(\searrow) = \left\{ \left[-1, \frac{1 - \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5} \right], \left[\frac{-1 + \sqrt{1+9\log^2 5}}{\log 5}, 3 \right], [3, +\infty[\right\}$$

d) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow -1+ \\ x > -1}} f'(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1+ \\ x > -1}} - \frac{5^{-x-1}}{(x^2-9)^2} ((\log 5) x^2 + 2x - 9 \log 5) = \\ &= \frac{4 \log 5 + 1}{32} \end{aligned}$$

Quindi f è derivabile in -1 da destra e si ha

6

$$f'_+(-1) = \frac{4 \log 5 + 1}{32}$$

3. h1

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1- \\ x < -1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1- \\ x < -1}} \frac{5^{x+1}}{(x^2-9)^2} \left((\log 5) x^2 - 2x - 9 \log 5 \right) =$$

$$= - \frac{4 \log 5 - 1}{32}$$

Quindi f è derivabile da sinistra in -1 e vale

$$f'_-(-1) = - \frac{4 \log 5 - 1}{32}$$

Essendo $f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$, f non è derivabile rispetto a $\mathbb{R}$ in -1 .

3. h2

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}{\log 5} \approx 2.44$$

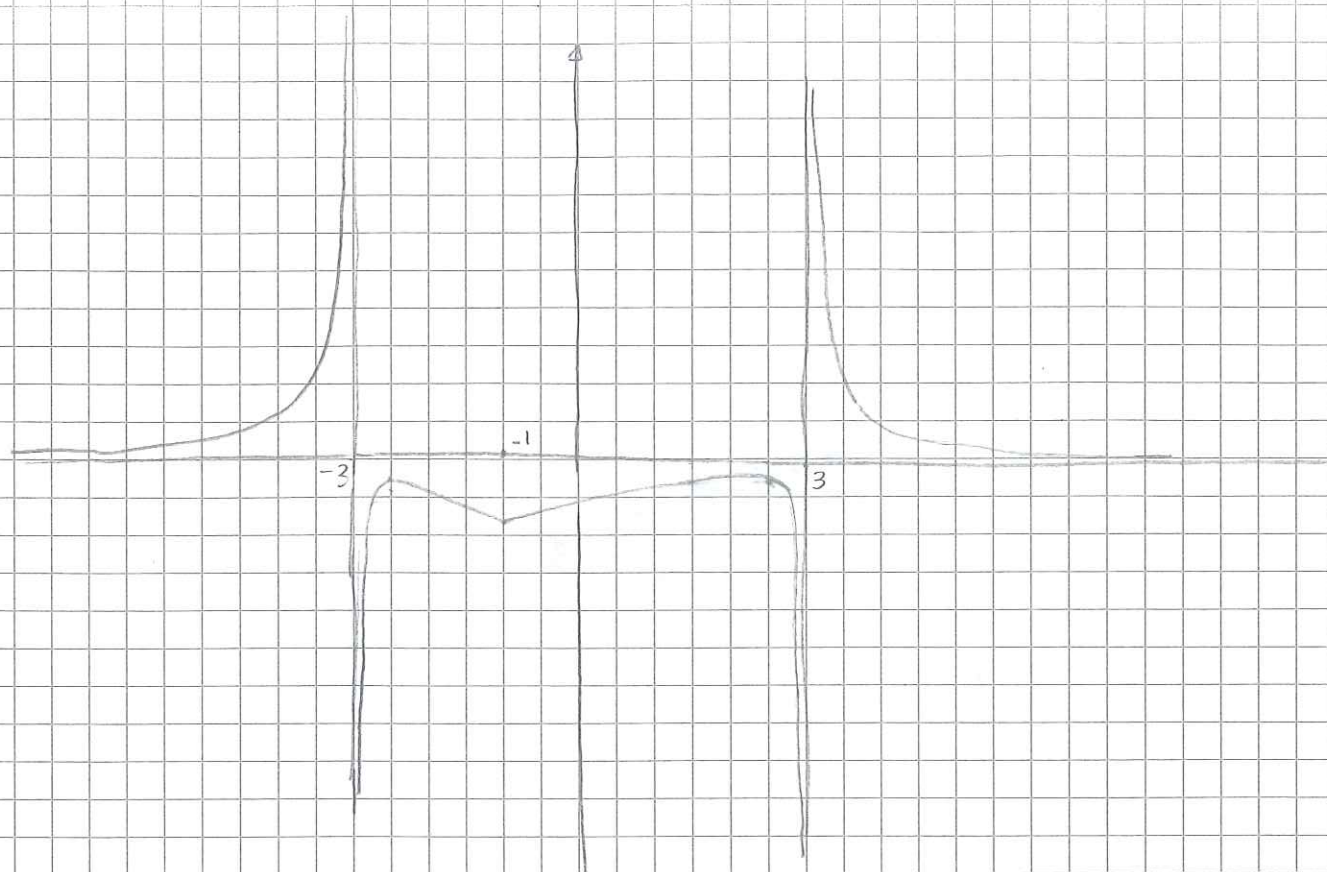
$$f\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}{\log 5}\right) = \frac{\log^2 5 \cdot e^{1 - \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}}{10(1 - \sqrt{1 + 9 \log^2 5})} \approx -0.0013$$

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}{\log 5} \approx -2.44$$

$$f\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}{\log 5}\right) = \frac{5 \log^2 5 \cdot e^{1 - \sqrt{1 + 9 \log^2 5}}}{2(1 - \sqrt{1 + 9 \log^2 5})} \approx -0.032$$

$$f(0) = -\frac{1}{45} \approx 0.022$$

$$f(-1) = -\frac{1}{8} = -0.125$$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{n^5 + 1}{n!} \sim \frac{n^5}{n!}$$

Quindi la serie è convergente.

Esercizio 3

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log n} = +\infty$$

Quindi la serie è divergente positivamente.

Esercizio 4

Si ha

$$|-1-2i| = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \operatorname{Arctg} 2 + \pi \in \arg(-1+2i)$$

Si ha quindi

$$z = \sqrt[5]{\sqrt{5}} e^{i \frac{\operatorname{Arctg} 2 + \pi + 2k\pi}{5}} = \sqrt[10]{5} e^{i \frac{\operatorname{Arctg} 2 + \pi + 2k\pi}{5}}$$

$$\text{con } k=0, 1, 2, 3, 4$$

Esercizio 5

$$\text{Si ha } |14| = 14 \quad \text{e} \quad 0 \in \arg 14$$

Si ha quindi

$$z = \log 14 + i 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 6

Si ha

$$\operatorname{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} ; -1 \leq x^2 \cos x^3 \leq 1\}$$

Per $x \in \operatorname{dom}(f)$ vale che $x^2 \cos x^3 = -1$ e
 $x^2 \cos x^3 \neq 1$ o che

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 \cos^2 x^3}} \left(2x \cos x^3 + x^2 (-\sin x^3) \cdot 3x^2 \right) = \\ &= \frac{2x \cos x^3 - 3x^4 \sin x^3}{\sqrt{1 - x^4 \cos^2 x^3}} \end{aligned}$$

Esercizio 7

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo privo di un punto della funzione

$$f: [-1, 1] - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

L'integrale improprio assegnato è convergente se sono convergenti i due integrali impropri.

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx \quad e \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$$

Essendo $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, l'integrale improprio è convergente.

Analogamente si vede che l'integrale improprio

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

è convergente.

Quindi è l'integrale improprio

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

è convergente.

Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 x^{-1/2} dx =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_y^1 = 2 \lim_{y \rightarrow 0} (1 - \sqrt{y}) = 2$$

Analogamente si vede che

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2$$

Si ha quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2 + 2 = 4$$

Esercizio 8

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)^2}{x^3 \log(1 + 2x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^3}{6}\right)^2}{x^3 \cdot 2x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{36} x^6}{2x^6} = \frac{1}{72}$$

Esercizio 9

Si ha

$$1 - \cos x^2 \sim \frac{1}{2} (x^2)^2 = \frac{1}{2} x^4$$

Si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$e^x - 1 = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$\sin y = y - \frac{1}{6} y^3 + o(y^4)$$

$$\sin(e^x - 1) = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) - \frac{1}{6} \left(x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) \right)^3 + o(x^4)$$

$$= x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{6} \cdot 3x^2 \cdot \frac{1}{2} x^2 = x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$2 \sin(e^x - 1) = 2x + x^2 - \frac{5}{12} x^4 + o(x^4)$$

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2} y^2 + o(y^2)$$

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2} x^4 + o(x^4)$$

$$2 \sin(e^x - 1) - \log(1+x^2) - 2x =$$

$$2x + x^2 - \frac{5}{12} x^4 + o(x^4) - x^2 + \frac{1}{2} x^4 - 2x = -\frac{1}{12} x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{12} x^4$$

$$\frac{2 \sin(e^x - 1) - \log(1+x^2) - 2x}{1 - \cos x^2} \sim \frac{\frac{1}{12} x^4}{\frac{1}{2} x^2} = \frac{1}{6}$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(e^x - 1) - \log(1+x^2) - 2x}{1 - \cos x^2} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\int_0^1 (x+2)^3 \cos(2x+1) dx =$$

$$\left[\frac{1}{2} \sin(2x+1) (x+2)^3 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \sin(2x+1) 3 (x+2)^2 dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin(2x+1) (x+2)^3 \right]_0^1 - \frac{3}{2} \int_0^1 (x+2)^2 \sin(2x+1) dx =$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2} \sin(2x+1)(x+2)^3 \right]_0^1 - \frac{3}{2} \left(\left[-\frac{1}{2} \cos(2x+1)(x+2)^2 \right]_0^1 - \right. \\
& \left. \int_0^1 -\frac{1}{2} \cos(2x+1) 2(x+2) dx \right) = \\
& = \left[\frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4} (x+2)^2 \cos(2x+1) \right]_0^1 - \\
& - \frac{3}{2} \int_0^1 (x+1) \cos(2x+1) dx = \\
& = \left[\frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4} (x+2)^2 \cos(2x+1) \right]_0^1 \\
& - \frac{3}{2} \left(\left[\frac{1}{2} \sin(2x+1)(x+2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \sin(2x+1) \cdot 1 dx \right) = \\
& = \left[\frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4} (x+2)^2 \cos(2x+1) \right. \\
& \left. - \frac{3}{4} (x+2) \sin(2x+1) \right]_0^1 + \frac{3}{4} \int_0^1 \sin(2x+1) dx = \\
& = \left[\frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4} (x+2)^2 \cos(2x+1) \right. \\
& \left. - \frac{3}{4} (x+2) \sin(2x+1) - \frac{3}{8} \cos(2x+1) \right]_0^1 = \\
& = \frac{27}{2} \sin 3 + \frac{27}{4} \cos 3 - \frac{9}{4} \sin 3 - \frac{3}{8} \cos 3 \\
& - 4 \sin 1 - 3 \cos 1 + \frac{3}{2} \sin 1 + \frac{3}{8} \cos 1 =
\end{aligned}$$

$$= \frac{45}{4} \sin 3 + \frac{51}{8} \cos 3 - \frac{5}{2} \sin 1 - \frac{21}{8} \cos 1$$

Esercizio 11

Si ha

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$$

Esistono $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Si ha

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Per $x=1$ si ha $1 = 2A$; quindi $A = \frac{1}{2}$

Si ha quindi

$$1 = \frac{1}{2}(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

quindi

$$2 = x^2+1 + 2(Bx+C)(x-1)$$

quindi

$$-x^2+1 = 2(Bx+C)(x-1)$$

quindi

$$-(x-1)(x+1) = 2(Bx+C)(x-1)$$

quindi

$$-x-1 = 2Bx+2C$$

quindi $-1 = 2B$; quindi $B = -\frac{1}{2}$; quindi $-1 = 2C$; quindi $C = -\frac{1}{2}$

Si ha quindi

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{x+1}{x^2+1}$$

Si ha quindi

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log |x-1| \right]_{-1}^0 - \frac{1}{4} \left[\log (x^2+1) \right]_{-1}^0 - \frac{1}{2} \left[\operatorname{Arctg} x \right]_{-1}^0 =$$

$$= \frac{1}{2} (-\log 2) - \frac{1}{4} (-\log 2) - \frac{1}{2} (-\operatorname{Arctg}(-1)) = -\frac{1}{4} \log 2 - \frac{\pi}{8}$$

Esercizio 12

Poniamo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$; si ha $x = 2 \operatorname{Arctg} t$; quindi $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$

Si ha $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Per $x=0$ si ha $t=0$; per $x = \frac{\pi}{2}$ si ha $t=1$

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{2t + 1 - t^2} dt =$$

$$= -2 \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt$$

Si ha $t^2 - 2t - 1 = 0$ se e solo se $t = 1 \pm \sqrt{2}$

Si ha quindi $t^2 - 2t - 1 = (t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))$

L'espressione sopra è quindi uguale a

$$= -2 \int_0^1 \frac{1}{(t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))} dt$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))} = \frac{A}{t - (1 + \sqrt{2})} + \frac{B}{t - (1 - \sqrt{2})}$$

Su h.e

$$1 = A(t - (1 - \sqrt{2})) + B(t - (1 + \sqrt{2}))$$

Per $t = 1 - \sqrt{2}$ su h.e $1 = B(1 + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2})$, cioè

$$1 = -2\sqrt{2}B \quad \text{quindi} \quad B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Per $t = 1 + \sqrt{2}$ su h.e $1 = A(1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})$; quindi

$$1 = 2\sqrt{2}A \quad ; \quad \text{quindi} \quad A = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Su h.e quindi

$$\frac{1}{(t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - (1 + \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - (1 - \sqrt{2})}$$

Su h.e quindi

$$-2 \int_0^1 \frac{1}{(t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))} dt =$$

$$= -2 \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - 1 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - 1 + \sqrt{2}} \right) dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\log |t - 1 - \sqrt{2}| - \log |t - 1 + \sqrt{2}| \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\log \left| \frac{t - 1 + \sqrt{2}}{t - 1 - \sqrt{2}} \right| \right]_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{-1 - \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log (\sqrt{2} + 1)^2 =$$

$$= \sqrt{2} \log (\sqrt{2} + 1)$$