

Analisi Matematica 1 - 14/6/13 - Compito 4 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log^2 x}{x},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. .9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\Downarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $e^2 \approx 7.39$, $\frac{4}{e^2} \approx 0.54$, $e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \approx 1.47$, $e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 13.71$, $f(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}) \approx 0.10$, $f(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}) \approx 0.50$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 2}}{\sqrt{n} + 1} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n + 3} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^5 - 8iz^2 = 0 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arctg}(x^2 \sin x^2);$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^5 - 1} dx .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x \operatorname{tg}^2 x} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^6 + x^3 + 3} \left(\sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} - \sqrt[4]{16x^4 + 1} - \sin \frac{1}{x} \right) .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 3) Sia

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{5 + 5x^2} - x ;$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinarli.

Suggerimento. Si possono utilizzare le approssimazioni $\sqrt{5} \approx 2.24$, $\sqrt{10} - 1 \approx 2.16$.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + e^{2x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(2x) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive dell'integrale e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 14/6/13 - Compito 4 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. .9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\Downarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $e^{\frac{1}{2}} \approx 1.65$, $\frac{1}{2e} \approx 0.18$, $e^{\frac{5}{6}} \approx 2.30$, $f(e^{\frac{5}{6}}) \approx 0.16$,

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 2}}{n^2 + 1} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n - 3^n} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^5 + 16z = 0 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = e^{x^3 \operatorname{Arctg} x^3};$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{x^5 + 1} dx.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(1+x) - 2x + x^2}{x \operatorname{Arctg}^2(2x)}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{27x^9 + 2x^6 + 3} \left(\sqrt[4]{256x^4 + 128x^2 + 64} - \sqrt[4]{256x^4 + 128} - \operatorname{sh} \frac{1}{2x} \right).$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 3) Sia

$$f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow 2x - \sqrt{5 + 20x^2};$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinarli.

Suggerimento. Si possono utilizzare le approssimazioni $-\sqrt{5} \approx -2.24$, $1 - \sqrt{10} \approx -2.16$.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{3x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(3x) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive dell'integrale e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.