Analisi Matematica 1 - 14/6/13

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log^2 x}{x},$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

(b) (p. .9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

(d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $e^2 \approx 7.39$, $\frac{4}{e^2} \approx 0.54$, $e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \approx 1.47$, $e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 13.71$, $f(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}) \approx 0.10$, $f(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}) \approx 0.50$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-2}}{\sqrt{n}+1}\,.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n+3}\,.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} z^n\,.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^5 - 8iz^2 = 0\,.$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arctg}(x^2 \sin x^2) ;$$

(a) determinare il dominio naturale di f;

(b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^5 - 1}\, dx .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x \operatorname{tg}^2 x} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^6 + x^3 + 3} \left(\sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} - \sqrt[4]{16x^4 + 1} - \sin \frac{1}{x} \right) .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 3) Sia

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{5+5x^2} - x \; ;$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinarli.

Suggerimento. Si possono utilizzare le approssimazioni $\sqrt{5} \approx 2.24$, $\sqrt{10} - 1 \approx 2.16$.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}} \, dx \; .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(2x) \, dx \; .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive dell'integrale e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $\mathrm{dom}(f) =]0, +\infty[$

b) Si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) Per ogni $x \in]0, +\infty[$ si ha

$$f'(x) = \frac{2 \log x \frac{1}{x} \cdot x - \log^2 x}{x^2} = \frac{\log x (2 - \log x)}{x^2}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$ o $2 - \log x = 0$

cioè se e solo se $x = 1$ o $x = e^2$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $\log x (2 - \log x) > 0$, cioè se e solo se $1 < x < e^2$.

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $0 < x < 1$ o $x > e^2$

Quindi f è strettamente crescente su $[1, e^2]$, strettamente decrescente su $]0, 1]$ e su $[e^2, +\infty[$

Si ha quindi

$m(\nearrow) = \{ [1, e^2] \}$, $m(\rightarrow) = \emptyset$

$m(\searrow) = \{]0, 1], [e^2, +\infty[\}$

d) Per ogni $x \in]0, +\infty[$ si ha

$$f''(x) = \frac{(2 \frac{1}{x} - 2 \log x \frac{1}{x}) x^2 - 2x (2 \log x - \log^2 x)}{x^4} =$$

$$= \frac{2x (1 - \log x - 2 \log x + \log^2 x)}{x^4} = \frac{2}{x^3} (\log^2 x - 3 \log x + 1)$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $\log^2 x - 3 \log x + 1 = 0$

cioè $\log x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, cioè $x = e^{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$ o

$x = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ o $x = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ o $x > e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} < x < e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

Quindi f è strettamente convessa su $]0, e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}]$ e su $[e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, +\infty[$, strettamente concava su $[e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}]$

Si ha quindi:

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{]0, e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}], [e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, +\infty[\right\}$$

$$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}] \right\}$$

Si ha e

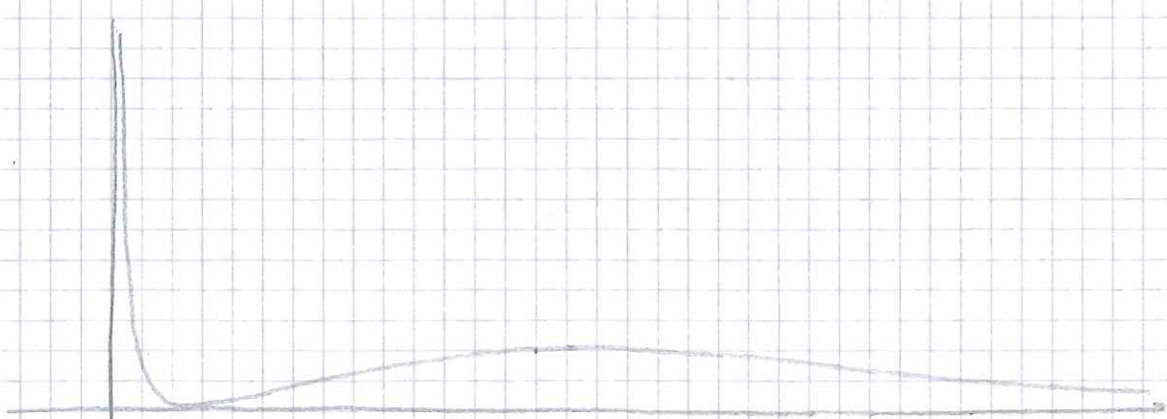
$e^2 \approx 7.39$

$f(e^2) = \dfrac{4}{e^2} \approx 0.54$

$e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \approx 1.47$, $e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 13.71$

$f(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}) = \dfrac{1}{4}(3-\sqrt{5})^2 e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \approx 0.10$

$f(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}) = \dfrac{1}{4}(3+\sqrt{5})^2 e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \approx 0.50$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{\sqrt{n^2-2}}{\sqrt{n}+1} \sim \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n^{1/2}} = n^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Quindi la serie è divergente positivamente

Esercizio 3

Si ha

$$\frac{n}{2^n+3} \sim \frac{n}{2^n} = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1$ la serie è convergente

Esercizio 4

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\left|\frac{n}{n^3+1} z^n\right| \sim \left|\frac{n}{n^3} z^n\right| = \frac{1}{n^2} |z|^n$$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} z^n$ è assolutamente convergente se e solo se $|z| \leq 1$

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è uguale a 1

Per $|z|=1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} z^n$ è assolutamente convergente e quindi convergente

Esercizio 5

Per $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$z^5 - 8i z^2 = 0$$

se e solo se

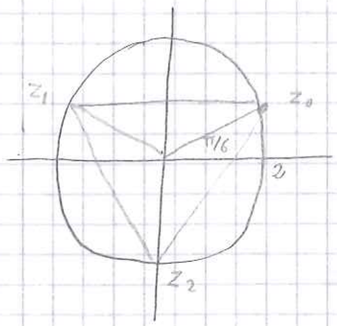
$$z^2(z^3 - 8i) = 0$$

Quindi se e solo se $z^2 = 0$ o $z^3 - 8i = 0$; quindi se e solo se $z = 0$ o $z^3 = 8i$

Risolviamo l'equazione

$$z^3 = 8i$$

Si ha $|8i| = 8$ e $\frac{\pi}{2} \in \arg(8i)$



Si ha $z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

$$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = -2i$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\{0, \sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i, -2i\}$$

Esercizio 6

a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 \sin x^2)^2} \left(2x \sin x^2 + x^2 \cos x^2 \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{2x\left(\sin x^2 + x^2 \cos x^2\right)}{1 + x^4 \sin^2 x^2}$$

Esercizio 7

Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta negativa della funzione

$$f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R},\ x \to \frac{x}{x^5 - 1}$$

Si ha

$$\frac{x}{x^5-1} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{x}{x^5} = \frac{1}{x^4}$$

Essendo $4>1$, l'integrale improprio è convergente

Esercizio 8

Si ha

$$x\, tg^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x\cdot x^2 = x^3$$

Si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$2e^x = 2 + 2x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$2e^x - 2 - 2x - x^2 = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}x^3$$

$$\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x\, tg^2 x} \sim \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x-2-2x-x^2}{x\, tg^2 x} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 9

Si ha

$$\sqrt{4x^6+x^3+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{4x^6} = 2x^3$$

$$\sqrt[4]{16x^4+32x^2+64} = 2x\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}}$$

Per $y\to 0$ si ha

$$\sqrt[4]{1+y} = 1 + \frac{1}{4}y + \binom{\frac{1}{4}}{2} y^2 + o(y^2) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{32}y^2 + o(y^2)$$

Quindi:

$$2x\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}} =$$

$$= 2x\left(1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right) - \frac{3}{32}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) =$$

$$= 2x\left(1+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{3}{8}\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = 2x\left(1+\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

$$= 2x + \frac{1}{x} + \frac{5}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Si ha

$$\sqrt[4]{16x^4+1} = 2x\sqrt[4]{1+\frac{1}{16x^4}}$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\sqrt[4]{1+y} = 1 + \frac{1}{4}y + o(y)$$

Quindi

$$2x\sqrt[4]{1+\frac{1}{16x^4}} = 2x\left(1+\frac{1}{4}\frac{1}{16x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) =$$

$$= 2x\left(1+\frac{1}{64x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = 2x + \frac{1}{32x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$$

Quindi:

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o(x^3)$$

Si ha quindi

$$\sqrt[4]{16x^4+32x^2+64} - \sqrt[4]{16x^4+1} - \sin\frac{1}{x} =$$

$$= 2x + \frac{1}{x} + \frac{5}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 2x - \frac{1}{32x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} =$$

$$\frac{133}{96}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \sim \frac{133}{96}\frac{1}{x^3}$$

Quindi

$$\sqrt{4x^6+x^3+3}\left(\sqrt[4]{16x^4+32x^2+64} - \sqrt[4]{16x^4+1} - \sin\frac{1}{x}\right) \sim 2x^3\frac{133}{96}\frac{1}{x^3} =$$

$$= \frac{133}{48}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^6+x^3+3}\left(\sqrt[4]{16x^4+32x^2+64} - \sqrt[4]{16x^4+1} - \sin\frac{1}{x}\right) = \frac{133}{48}$$

Esercizio 10

a) Essendo dom(f) compatto ed essendo f continua f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo di f.

Sia $x \in]0,1[$. Si ha

$$f'(x) = \frac{10x}{2\sqrt{5+5x^2}} - 1 = \frac{5x}{\sqrt{5+5x^2}} - 1 = \frac{5x - \sqrt{5+5x^2}}{\sqrt{5+5x^2}}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se

$5x - \sqrt{5+5x^2} = 0$, cioè se e solo se

$5x = \sqrt{5+5x^2}$, cioè, essendo $x>0$, se e solo se

$25x^2 = 5+5x^2$, cioè se e solo se

$5x^2 = 1 + x^2$, cioè se e solo se

$4x^2 = 1$, cioè se e solo se

$x^2 = \frac{1}{4}$, cioè se e solo se

$x = \pm \frac{1}{2}$, cioè, essendo $x > 0$, se e solo se

$x = \frac{1}{2}$

Si ha quindi

$E \cap]0, 1[\subset \{ \frac{1}{2} \}$

Si ha quindi

$E \subset \{ \frac{1}{2}, 0, 1 \}$

Si ha

$f(0) = \sqrt{5}$

$f(1) = \sqrt{10} - 1$

$f(\frac{1}{2}) = 2$

Si ha

$\sqrt{5} > \sqrt{10} - 1$ se e solo se $5 > 10 + 1 - 2\sqrt{10}$, cioè se e solo se

$2\sqrt{10} > 6$, cioè se e solo se $\sqrt{10} > 3$ cioè se e solo se $10 > 9$;

ciò è vero; quindi si ha $\sqrt{5} > \sqrt{10} - 1$

Si ha $2 < \sqrt{10} - 1$ se e solo se $3 < \sqrt{10}$, cioè se e solo se

$9 < 10$; ciò è vero; quindi si ha $2 < \sqrt{10} - 1$

Si ha quindi $2 < \sqrt{10} - 1 < \sqrt{5}$

Si ha quindi

$\min(f) = 2$ e $\max(f) = \sqrt{5}$

Esercizio 11

Poniamo $e^{2x} = t$. Si ha $2x = \log t$; quindi

$x = \frac{1}{2}\log t$; quindi $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{t}$

Per $x = 0$ si ha $t = 1$; per $x = 1$, si ha $t = e^2$.

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{1+t}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{1}{t(t+1)}\,dt$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

Si ha

$$1 = A(t+1) + Bt$$

Per $t = 0$, si ha $A = 1$; per $t = -1$, si ha $1 = -B$;

quindi $B = -1$.

Si ha quindi

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2}\left[\log t - \log(t+1)\right]_1^{e^2} = \frac{1}{2}\left[\log\frac{t}{t+1}\right]_1^{e^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log\frac{e^2}{1+e^2} - \log\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{2e^2}{1+e^2}$$

Esercizio 12

Si ha

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg}(2x)\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{1+4x^2}\, 2\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+4x^2}\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^2+1-1}{4x^2+1}\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{4x^2+1}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{4x^2+1}\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{4}x\right]_0^1 + \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{1}{(2x)^2+1}\, 2\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{Arctg} 2 = \frac{5}{8}\operatorname{Arctg} 2 - \frac{1}{4}$$