

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x + e^x}{x},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. .9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Suggerimento. Si può tenere conto della seguente approssimazione $1 + e \approx 3.72$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n - \cos n}{n+1}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arcsin} x + 1}{x} dx.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^4 = -256i.$$

Suggerimento. Per esprimere le soluzioni per radicali si utilizzino le formule di bisezione e si tenga conto della posizione delle radici sulla circonferenza.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin \log \cos x ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + x \sin \frac{x}{2}}{\log(1 + x^4)} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^2 + 1} \left(\sqrt{1 + x} \cdot e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x + 2} \right) .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right)^x .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \log \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive dell'integrale e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^*$

b) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

c) Per ogni $x \in \mathbb{R}^*$ si ha

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)x - (x+e^x)}{x^2} = \frac{x e^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x-1=0$, cioè se e solo se $x=1$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x-1 > 0$, cioè se e solo se $x > 1$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < 1$

Quindi f è strettamente crescente su $[1, +\infty[$,

strettamente decrescente su $] -\infty, 0[$ e su $] 0, 1]$

Si ha quindi:

$$m(\nearrow) = \{ [1, +\infty[\}, \quad m(\rightarrow) = \emptyset$$

$$m(\searrow) = \{] -\infty, 0[,] 0, 1] \}$$

d) Si ha $x \in \mathbb{R}^*$: Si ha

$$f''(x) = \frac{(e^x + x e^x - e^x)x^2 - 2x(x e^x - e^x)}{x^4} =$$

$$= \frac{x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x}{x^3} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

Si che $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2 - 2x + 2 = 0$; il polinomio $x^2 - 2x + 2$ ha discriminante Δ tale che $\frac{\Delta}{4} = 1 - 2 = -1 < 0$

si che quindi $x^2 - 2x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; quindi $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Si che $f''(x) > 0$ se e solo se $x > 0$.

Si che $f''(x) < 0$ se e solo se $x < 0$.

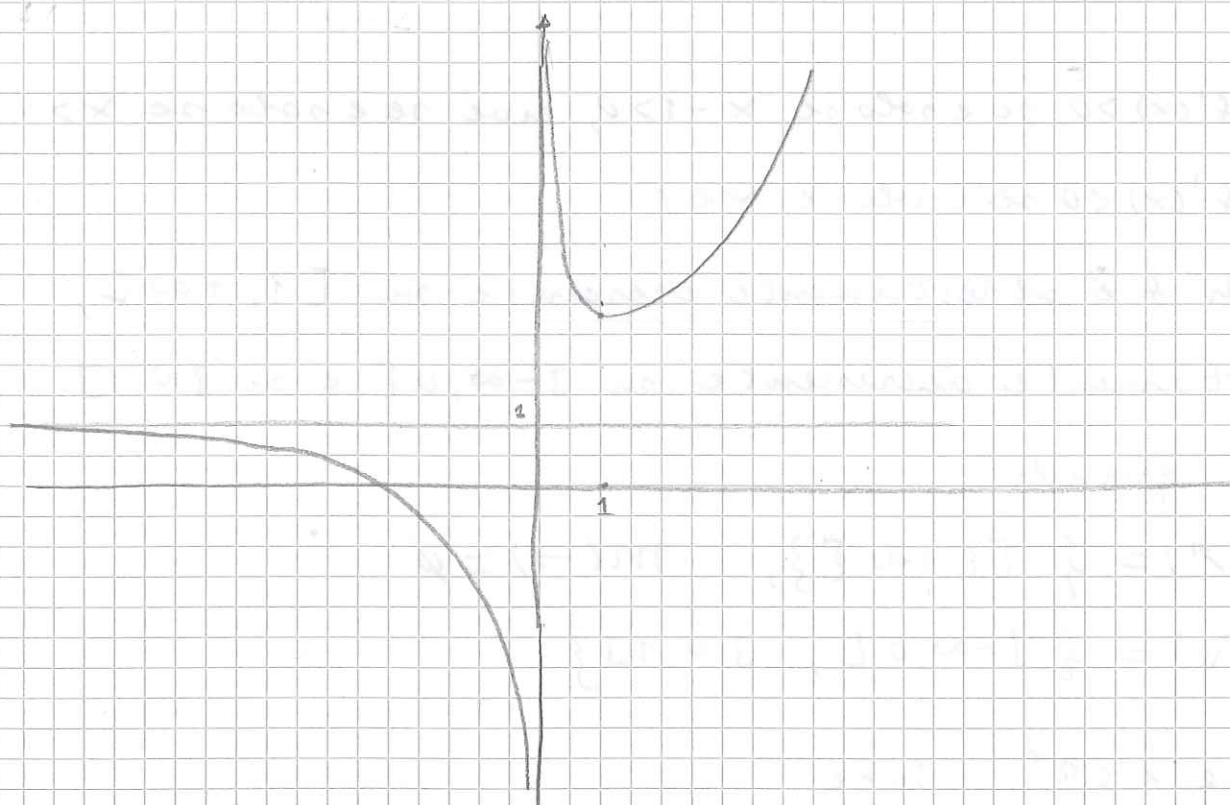
Quindi f è strettamente convessa su $]0, +\infty[$,

strettamente concava su $] -\infty, 0[$.

Si che quindi

$$C(\uparrow) = \{]0, +\infty[\}, \quad C(\downarrow) = \emptyset, \quad C(\downarrow) = \{]-\infty, 0[\}$$

Si che $f(1) = 1 + e \approx 3.72$



Esercizio 2

Si che

$$\frac{n - \cos n}{n+1} \sim \frac{n}{n} = 1$$

Si ha quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \cos n}{n+1} = 1$

quindi la serie è divergente positivamente

Esercizio 3

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

Essendo $\frac{1}{2} \leq 1$, la serie è divergente positivamente

Esercizio 4

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \frac{\arcsin x + 1}{x}$$

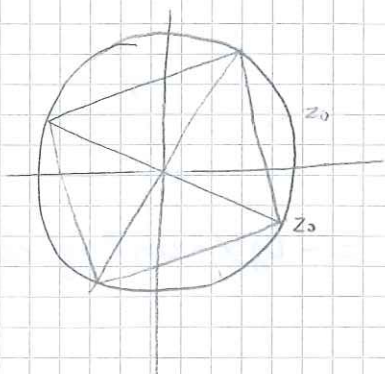
Si ha

$$\frac{\arcsin x + 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

quindi l'integrale improprio è divergente positivamente

Esercizio 5

Si ha $|-256i| = 256$ e $-\frac{\pi}{2} \in \arg(-256i)$



Si ha

$$z_0 = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \right) =$$

$$= 4 \left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right) =$$

$$= 4 \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} - i \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} \right) =$$

$$= 4 \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} - i \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \right) =$$

$$4 \left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} - i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \right) = 2 \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i \sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)$$

$$z_1 = 2 \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)$$

$$z_2 = 2 \left(-\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i \sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)$$

$$z_3 = 2 \left(-\sqrt{2 - \sqrt{2}} - i \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)$$

esercizio 6

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\cos x > 0$$

$$\text{cioè tali che } (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

quindi si ha

$$\text{dom}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$$

b) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$f'(x) = \cos \log \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x \cdot \cos \log \cos x$$

Esercizio 7

Si ha per $x \rightarrow 0$ e per $y \rightarrow 0$

$$\log(1+x^4) \sim x^4$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$

$$x \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{48}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x - 1 + x \sin \frac{x}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{48}x^4 =$$

$$= \frac{1}{48}x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{48}x^4$$

$$\frac{\cos x - 1 + x \sin \frac{x}{2}}{\log(1+x^4)} \sim \frac{\frac{1}{48}x^4}{x^4} = \frac{1}{48}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + x \sin \frac{x}{2}}{\log(1+x^4)} = \frac{1}{48}$$

Esercizio 8

Si ha per $x \rightarrow +\infty$ e per $y \rightarrow 0$

$$\sqrt[4]{x^2+1} \sim \sqrt[4]{x^2} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{1+x} = x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y)$$

$$x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{x} + 1} = x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$e^y = 1 + y + o(y)$$

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} e^{\frac{1}{x}} &= x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \\ &= x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{x} \right) = x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= x^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \\ &= x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{1+x} e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x+2} =$$

$$x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) =$$

$$= x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 - \frac{1}{x} \right) = x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \sim$$

$$\sim x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{x^2+1} (\sqrt{1+x} e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x+2}) \sim x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

So the answer:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^2+1} (\sqrt{1+x} e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x+2}) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 9

Se ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}$$

Se ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$$

Se ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)^x = +\infty$$

Esercizio 10

Poniamo $\sqrt[4]{x} = t$; si ha $x = t^4$; quindi

$$\frac{dx}{dt} = 4t^3; \text{ per } x = 1, \text{ si ha } t = 1; \text{ per } x = 16$$

si ha $t = 2$

Se ha quindi

$$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2 + t} 4t^3 dt =$$

$$= 4 \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} dt$$

Il quoziente della divisione $t^2 : (t+1)$ è $t-1$ e

il resto è 1, se ha quindi

$$t^2 = (t-1)(t+1) + 1 \quad ; \quad \text{quindi}$$

$$\frac{t^2}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1}$$

quindi

$$4 \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} dt = 4 \int_1^2 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2} t^2 - t + \log(1+t) \right]_1^2 = 4 \left(2 - 2 + \log 3 - \frac{1}{2} + 1 - \log 2 \right) =$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} + \log \frac{3}{2} \right) = 2 + 4 \log \frac{3}{2}$$

Esercizio 11

Se ha

$$\int_1^2 \log \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) dx = \int_1^2 \log \frac{1+x^2}{x^2} dx$$

$$= \left[x \log \frac{1+x^2}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 x \frac{x^2}{1+x^2} \frac{2x \cdot x^2 - 2x(1+x^2)}{x^4} dx =$$

$$= \left[x \log \frac{1+x^2}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{x(1+x^2)} dx =$$

$$= \left[x \log \frac{1+x^2}{x^2} \right]_1^2 + 2 \int_1^2 \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \left[x \log \frac{1+x^2}{x^2} + 2 \operatorname{Arctg} x \right]_1^2 =$$

$$= 2 \log \frac{5}{4} + 2 \operatorname{Arctg} 2 - \log 2 - 2 \operatorname{Arctg} 1 = 2 \operatorname{Arctg} 2 + \log \frac{25}{32} - \frac{\pi}{2}$$