

Analisi Matematica 1 - 10/7/13

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = xe^{|x+2|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. .9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità di f in -2 ;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Suggerimento. Si può tenere conto della seguente approssimazione $e \approx 2.72$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^3} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente serie è convergente e, in caso affermativo, determinarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot 5^{n+1}}{2^{4n+1}} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x + 1) dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^3 = -7 + i .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$e^z = 5 + 5i .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = 2^{x \log \sin x} ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 2) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x}{x-2} > |x-2| .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{\operatorname{tg}^4(6x)} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 3} \left(\sqrt{1+x} \cdot e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x+3} \right) .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 e^x \sqrt{1+e^x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \log \frac{1+x}{3+x} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{x(\log x + 2)} dx .$$

Suggerimento. Per togliere il valore assoluto si spezzi l'integrale in due integrali.

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive dell'integrale e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

c) Sia $x \in \mathbb{R}$; si ha

$$f(x) = \begin{cases} x e^{x+2} & \text{per } x \geq -2 \\ x e^{-x-2} & \text{per } x < -2 \end{cases}$$

Sia $x > -2$. Si ha

$$f'(x) = e^{x+2} + x e^{x+2} = e^{x+2} (1+x)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $1+x = 0$, cioè se e solo se $x = -1$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x > -1$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $-2 < x < -1$

Quindi f è strettamente crescente su $[-1, +\infty[$,

strettamente decrescente su $[-2, -1]$

Sia $x < -2$. Si ha

$$f'(x) = e^{-x-2} + x e^{-x-2} (-1) = e^{-x-2} (1-x)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $1-x = 0$, cioè se e solo se $x = 1$; essendo $x < -2$, mai.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $1-x > 0$, cioè $x < 1$; quindi sempre

Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, -2]$.

Si ha quindi $m(\nearrow) = \{]-\infty, -2], [-1, +\infty[\}$, $m(\rightarrow) = \emptyset$, $m(\searrow) = \{[-2, -1]\}$

d) Si ha

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2+ \\ x > -2}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2+ \\ x > -2}} e^{x+2} (1+x) = -1$$

Quindi f è derivabile da destra in 0 e si ha

$$f'_+(0) = -1$$

Si ha

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2- \\ x < -2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} e^{-x-2} (1-x) = 3$$

Quindi f è derivabile da sinistra in -2 e si ha $f'_-(-2) = 3$

Essendo $f'_-(-2) \neq f'_+(-2)$, f non è derivabile in -2 .

c) Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > -2$. Si ha

$$f''(x) = e^{x+2} + e^{x+2} + x e^{x+2} = e^{x+2} (2+x)$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $2+x=0$, cioè $x=-2$; essendo $x > -2$, mai.

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $2+x > 0$, cioè $x > -2$; quindi sempre.

Quindi f è strettamente convessa in $[-2, +\infty[$

Sia $x \in \mathbb{R}$, $x < -2$. Si ha

$$f''(x) = -e^{-x-2} - e^{-x-2} + x e^{-x-2} = e^{-x-2} (x-2)$$

Si ha $x-2 < 0$ se e solo se $x < 2$; quindi sempre.

Quindi $f''(x) < 0$.

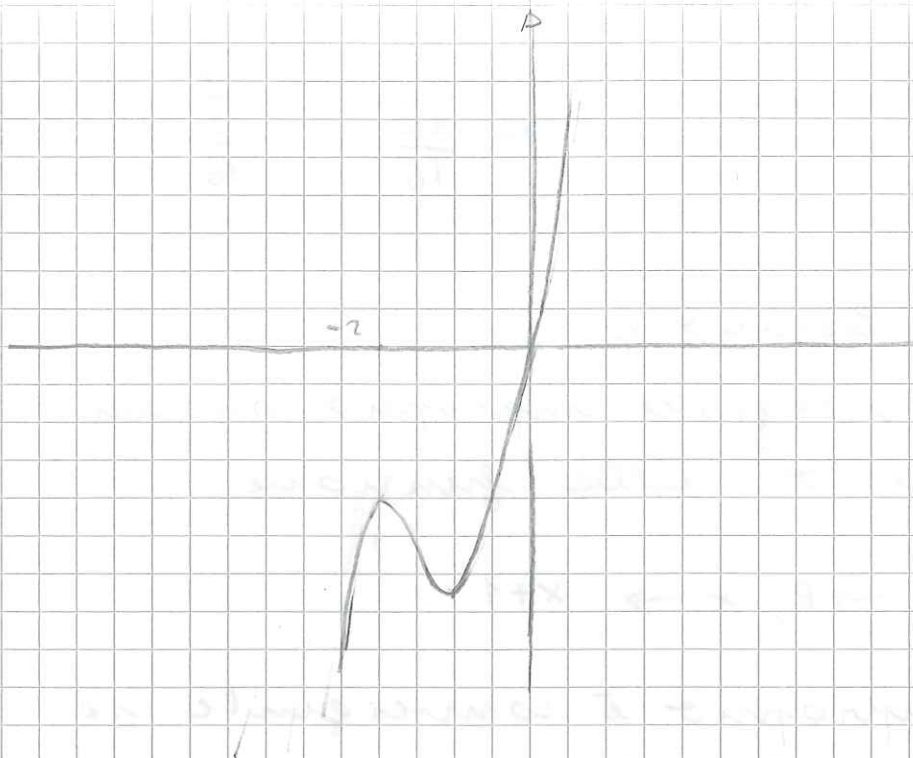
Quindi f è strettamente concava in $] -\infty, -2]$

Si ha quindi:

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{ [-2, +\infty[\}, \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\infty, -2] \}$$

Si ha

$$f(-2) = -2, \quad f(0) = 0, \quad f(-1) = -e \approx -2.72$$



Esercizio 2

Sicché

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3} \sim \frac{\sqrt{n^2}}{n^3} = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Quindi la serie è convergente

Esercizio 3

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{3^n \cdot 5^{n+1}}{2^{4n+1}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3^n \cdot 5^n}{(16)^n} = \frac{5}{2} \left(\frac{15}{16} \right)^n$$

La serie assegnata è quindi una serie geometrica di ragione $\frac{15}{16}$ e di primo termine $\frac{5}{2}$

Essendo $-1 < \frac{15}{16} < 1$, la serie è convergente

La somma della serie è $\frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{15}{16}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{16}} = 40$

Esercizio 4

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f:]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x+1$$

L'integrale improprio è convergente se sono convergenti i due integrali impropri.

$$\int_{-\infty}^0 (x+1) dx \quad e \quad \int_0^{+\infty} (x+1) dx$$

Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$; quindi $1 < x+1$
 $x \rightarrow +\infty$

Quindi l'integrale improprio su una semiretta positiva

$$\int_0^{+\infty} (x+1) dx$$

è divergente positivamente.

Quindi l'integrale improprio assegnato non è convergente

Esercizio 5

Si ha $|-7+i| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$; si ha

$$\operatorname{Arctg} \frac{1}{-7} + \pi = -\operatorname{Arctg} \frac{1}{7} + \pi \in \arg(-7+i)$$

Si ha quindi:

$$z = \sqrt[3]{\sqrt{50}} e^{i \frac{-\operatorname{Arctg} \frac{1}{7} + \pi + 2k\pi}{3}} = \sqrt[6]{50} e^{i \frac{-\operatorname{Arctg} \frac{1}{7} + \pi + 2k\pi}{3}}$$

per $k = 0, 1, 2$

Esercizio 6

Si ha $|5+5i| = 5|1+i| = 5\sqrt{2}$; si ha

$$\frac{\pi}{4} \in \arg(5+5i)$$

Quindi si ha

$$z = \log(5\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 7

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$\sin x > 0$; quindi tali che

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad 2k\pi < x < 2k\pi + \pi$$

Si ha quindi:

$$\operatorname{dom}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$$

b) Per ogni $x \in \operatorname{dom}(f)$ si ha

$$f'(x) = 2^{x \log \sin x} \log 2 \left(\log \sin x + x \frac{1}{\sin x} \cos x \right) =$$

$$= 2^{x \log \sin x} \log 2 (\log \sin x + x \operatorname{ctg} x)$$

Esercizio 8

La disuguaglianza è assegnata per $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$

Per $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, si ha

$$\frac{x}{x-2} > |x-2|$$

se e solo se

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-1| \\ x < 2 \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} \frac{x}{x-2} > x-2 \\ x > 2 \end{cases}, \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} - x + 2 > 0 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{, se e solo se} \quad \begin{cases} \frac{x - x^2 + 4x - 4}{x-2} \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x-2} < 0 \\ x > 2 \end{cases} \quad ; \text{ tenendo conto delle seconde}$$

condizione, si e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ x > 2 \end{cases}, \text{ se e solo se } \begin{cases} 1 < x < 4 \\ x > 2 \end{cases}, \text{ se e solo se}$$

$$2 < x < 4$$

Si ha

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x < 2 \end{cases}, \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x}{x-2} > -x+2 \\ x < 2 \end{cases},$$

$$\text{se e solo se } \begin{cases} \frac{x}{x-2} + x - 2 > 0 \\ x < 2 \end{cases}, \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} \frac{x + x^2 - 4x + 4}{x-2} > 0 \\ x < 2 \end{cases}, \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 4}{x-2} > 0 \\ x < 2 \end{cases};$$

tenendo conto della seconda condizione, se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 < 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

Il polinomio $x^2 - 3x + 4$ ha discriminante

$$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$$

quindi la disuguaglianza $x^2 - 3x + 4 < 0$ non è mai soddisfatta.

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 < 0 \\ x < 2 \end{cases} \text{ non ha quindi soluzioni.}$$

La disuguaglianza assegnata è quindi equivalente
a $2 < x < 4$

Esercizio 9

Si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^x - 1 - x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$(e^x - 1 - x)^2 \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^4$$

$$L_8^4(6x) \sim (6x)^4 = 1296x^4$$

$$\frac{(e^x - 1 - x)^2}{L_8^4(6x)} \sim \frac{\frac{1}{4}x^4}{1296x^4} = \frac{1}{5184}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{L_8^4(6x)} = \frac{1}{5184}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\sqrt{x^3 + 3} \sim \sqrt{x^3} \sim x^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{1+x} e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x+3} = x^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + 1} e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \right)$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$

quindi

$$x \sqrt{\frac{1}{x} + 1} = x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2} y^2 + o(y^2)$$

Quindi

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Quindi

$$\sqrt{\frac{1}{x} + 1} e^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^2} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + \frac{7}{8} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Si ha

$$\sqrt{1 + \frac{3}{x}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{3}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} - \frac{9}{8} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$x^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + 1} e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \right) =$$

$$x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + \frac{7}{8} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x} + \frac{9}{8} \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$x^{\frac{1}{2}} \left(2 \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \sim x^{\frac{1}{2}} \frac{2}{x^2} = 2 x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{x^3+3} \left(\sqrt{1+x} e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x+3} \right) \sim x^{\frac{3}{2}} 2 x^{-\frac{3}{2}} = 2$$

zu den:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3+3} \left(\sqrt{1+x} e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x+3} \right) = 2$$

Übung 11

Siehe

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x \sqrt{1+e^x} dx &= \int_0^1 (1+e^x)^{\frac{1}{2}} e^x dx = \\ \left[\frac{(1+e^x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 &= \frac{2}{3} \left((1+e)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

Übung 12 (10 Punkte)

Siehe

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log \frac{1+x}{3+x} dx &= \\ = \left[x \log \frac{1+x}{3+x} \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{3+x}{1+x} \cdot \frac{3+x - (1+x)}{(3+x)^2} dx &= \\ = \left[x \log \frac{1+x}{3+x} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+3)} dx & \end{aligned}$$

Es seien $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$

Siehe

$$X = A(x+3) + B(x+1)$$

Per $x = -1$ si ha $-1 = A \cdot 2$; quindi $A = -\frac{1}{2}$

Per $x = -3$ si ha $-3 = B(-2)$; quindi $B = \frac{3}{2}$

Si ha quindi

$$\frac{x}{(x+1)(x+3)} = \frac{3}{2} \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$$

L'espressione sopra è quindi uguale a

$$\begin{aligned} & \left[x \log \frac{1+x}{3+x} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \left(\frac{3}{2} \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ & = \left[x \log \frac{1+x}{3+x} \right]_0^1 - \left[3 \log(x+3) - \log(x+1) \right]_0^1 = \\ & = \left[x \log \frac{1+x}{3+x} + \log \frac{x+1}{(x+3)^3} \right]_0^1 = \\ & = \log \frac{1}{2} + \log \frac{1}{32} - \log \frac{1}{27} = -6 \log 2 + 3 \log 3 = 3 \log \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 12 (2° modulo)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \log \frac{1+x}{3+x} dx = \\ & \left[(x+1) \log \frac{1+x}{3+x} \right]_0^1 - \int_0^1 (x+1) \frac{3+x}{1+x} \frac{3+x-(1+x)}{(3+x)^2} dx = \\ & = \left[(x+1) \log \frac{1+x}{3+x} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{3+x} dx = \\ & = \left[(x+1) \log \frac{1+x}{3+x} - 2 \log(3+x) \right]_0^1 = 2 \log \frac{1}{2} - 2 \log 4 - \log \frac{1}{3} + 2 \log 3 = \\ & = -6 \log 2 + 3 \log 3 = 3 \log \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Übung 13

S. he

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{x (\log x + 2)} dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{\log x + 2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

Pomomo $y = \log x$. S. he

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{\log x + 2} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^2 \frac{|y|}{y + 2} dy =$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{|y|}{y + 2} dy + \int_0^2 \frac{|y|}{y + 2} dy =$$

$$= - \int_{-1}^0 \frac{y}{y + 2} dy + \int_0^2 \frac{y}{y + 2} dy =$$

$$= - \int_{-1}^0 \frac{y + 2 - 2}{y + 2} dy + \int_0^2 \frac{y + 2 - 2}{y + 2} dy =$$

$$= - \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{2}{y + 2} \right) dy + \int_0^2 \left(1 - \frac{2}{y + 2} \right) dy =$$

$$= - \left[y - 2 \log(y + 2) \right]_{-1}^0 + \left[y - 2 \log(y + 2) \right]_0^2 =$$

$$= - \left(-2 \log 2 + 1 \right) + 2 - 2 \log 4 + 2 \log 2 =$$

$$= 2 \log 2 - 1 + 2 - 4 \log 2 + 2 \log 2 = 1$$

Esercizio 8 (2° modo)

La disuguaglianza è assegnata per $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$

Per $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ si ha

$$\frac{x}{x-2} > |x-2| \quad \text{se e solo se}$$

$$|x-2| < \frac{x}{x-2} \quad \text{se e solo se}$$

$$\begin{cases} x-2 < \frac{x}{x-2} \\ x-2 > -\frac{x}{x-2} \end{cases} \quad \text{se e solo se}$$

$$\begin{cases} x-2 - \frac{x}{x-2} < 0 \\ x-2 + \frac{x}{x-2} > 0 \end{cases} \quad \text{se e solo se}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2 - x}{x-2} < 0 \\ \frac{(x-2)^2 + x}{x-2} > 0 \end{cases} \quad \text{se e solo se}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x-2} < 0 \\ \frac{x^2 - 3x + 4}{x-2} > 0 \end{cases}$$

Il polinomio $x^2 - 3x + 4$ ha discriminante $\Delta = 9 - 16 < 0$
quindi si ha $x^2 - 3x + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Il polinomio $x^2 - 5x + 4$ ha radici 1 e 4;
quindi si ha $x^2 - 5x + 4 > 0$ se e solo se $x < 1$ o $x > 4$

Se sistema è sopra è quindi nero se e solo se

$$\begin{cases} x < 1 \text{ o } 2 < x < 4 \\ x > 2 \end{cases}$$

, cioè se e solo se

$$2 < x < 4$$