Analisi Matematica 1 - 9/9/13 - Compito 7

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 12) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{-|x^2-1|}}{x},$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

(b) (p. 1.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) (p. 5*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

(d) (p. 1*) studiare la derivabilità $\overline{\mathbf{R}}$ di f in 1 e in -1;

(e) (p. 4*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$, $\sqrt{\frac{2}{e}} \approx 0.86$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}-n}{\sqrt{n^5+2}} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_1^5 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{5-x}}\, dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^8 = -3 .$$

Suggerimento. Si applichino le formule di bisezione e si tenga conto della posizione delle radici sulla circonferenza.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \log\log\log x \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

   Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{100} - x} \ .$$

   Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \sin(2x) + 2\,\mathrm{sh}^2\, x - 2 + 2\cos(2x)}{\mathrm{Arcsin}(2x)(x - \mathrm{Arctg}\, x)} \ .$$

   Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \log(2x+\sqrt{4x^2+1}\,)\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive dell'integrale e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha: $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^*$

b) Si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$

c) Per $x \in \mathbb{R}^*$ si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2+1}}{x} & \text{per } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \dfrac{e^{x^2-1}}{x} & \text{per } -1 < x < 1, \ x \neq 0 \end{cases}$$

Supponiamo $x < -1$. Si ha

$$f(x) = \frac{e^{-x^2+1}}{x}$$

Quindi

$$f'(x) = \frac{e^{-x^2+1}(-2x)\cdot x - e^{-x^2+1}}{x^2} =$$

$$= -e^{-x^2+1}\frac{2x^2+1}{x^2}$$

Si ha $f'(x) < 0$.

Quindi f è strettamente su $]-\infty, -1]$ e su $[1, +\infty[$

Supponiamo $-1 < x < 1$, $x \neq 0$. Si ha

$$f(x) = \frac{e^{x^2-1}}{x}$$

Quindi

$$f'(x) = \frac{e^{x^2-1}(2x)\cdot x - e^{x^2-1}}{x^2} = e^{x^2-1}\frac{2x^2-1}{x^2}$$

Si ha $f'(x)=0$ se e solo se $2x^2-1=0$, cioè

$x^2=\frac{1}{2}$, cioè $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si ha $f'(x)>0$ se e solo se $2x^2-1>0$, cioè

$x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si ha $f'(x)<0$ se e solo se $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

Quindi f è strettamente crescente su

$[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ e su $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, strettamente

decrescente su $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[$ e su $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Si ha quindi

$m(\nearrow)=\{[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}], [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]\}$, $m(\rightarrow)=\emptyset$

$m(\searrow)=\{]-\infty,-1], [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[,]0, \frac{\sqrt{2}}{2}], [1,+\infty[\}$

d) Si ha

$$\lim_{\substack{x\to 1+\\ x\neq 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1+\\ x\neq}} -e^{-x^2+1}\,\frac{2x^2+1}{x^2} = -3$$

Quindi f è derivabile da destra in 1 e si ha

$f'_+(1)=-3$

Si ha

$$\lim_{\substack{x\to 1-\\ x\neq 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1-\\ x\neq 1}} e^{x^2-1}\,\frac{2x^2-1}{x^2} = 1$$

Quindi f è derivabile da sinistra in 1 e si ha $f'(1)=1$

Essendo $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, f non è derivabile in 1

Si ha

$$\lim_{\substack{x \to -1+ \\ x \neq -1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -1+ \\ x \neq -1}} e^{x^2-1} \frac{2x^2-1}{x^2} = 1$$

Quindi f è derivabile da destra in -1 e si ha $f'_+(-1) = 1$

Si ha

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x \neq -1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -1- \\ x \neq -1}} -e^{-x^2+1} \frac{2x^2+1}{x^2} = -3$$

Quindi f è derivabile da sinistra in -1 e si ha

$f'_-(-1) = -3$

Essendo $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$, f non è derivabile in -1

d) Sia $x < -1$ o $x > 1$. Si ha

$$f'(x) = -\frac{2x^2 e^{-x^2+1} + e^{-x^2+1}}{x^2}$$

Quindi

$$f''(x) = -\frac{\left(4x e^{-x^2+1} + 2x^2 e^{-x^2+1}(-2x) + e^{-x^2+1}(-2x)\right)x^2 - 2x\left(2x^2 e^{-x^2+1} + e^{-x^2+1}\right)}{x^4}$$

$$= -e^{-x^2+1} \frac{(4x - 4x^3 - 2x) \cdot x - 2(2x^2+1)}{x^3} =$$

$$= -e^{-x^2+1} \frac{2x^2 - 4x^4 - 4x^2 - 2}{x^3} =$$

$$= e^{-x^2+1} \frac{4x^4 + 2x^2 + 2}{x^3} = 2e^{-x^2+1} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3}$$

Per ogni $x \in R$ si ha $2x^4 + x^2 + 1 > 0$.

Si ha quindi $f''(x)>0$ per $x>0$, $f''(x)<0$ per $x<0$.

Quindi f è strettamente convessa su $[1,+\infty[$

strettamente concava su $]-\infty,-1]$.

Supponiamo $-1<x<1$, $x\neq 0$

Si ha

$$f'(x)=\frac{2x^2e^{x^2-1}-e^{x^2-1}}{x^2}$$

Si ha quindi

$$f''(x)=\frac{(4xe^{x^2-1}+2x^2e^{x^2-1}(2x)-e^{x^2-1}(2x))x^2-2x(2x^2e^{x^2-1}-e^{x^2-1})}{x^4}=$$

$$=e^{x^2-1}\frac{(4x+4x^3-2x)x-2(2x^2-1)}{x^3}=$$

$$=e^{x^2-1}\frac{4x^4+2x^2-4x^2+2}{x^3}=$$

$$=e^{x^2-1}\frac{4x^4-2x^2+2}{x^3}=2e^{x^2-1}\frac{2x^4-x^2+1}{x^3}$$

Nel polinomio $2x^4-x^2+1$ poniamo $x^2=y$; si ottiene il polinomio $2y^2-y+1$; tale polinomio ha discriminante $\Delta=1-8=-7<0$; si ha quindi $2y^2-y+1>0$ per ogni $y\in\mathbb{R}$; si ha quindi $2x^4-x^2+1>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Si ha quindi

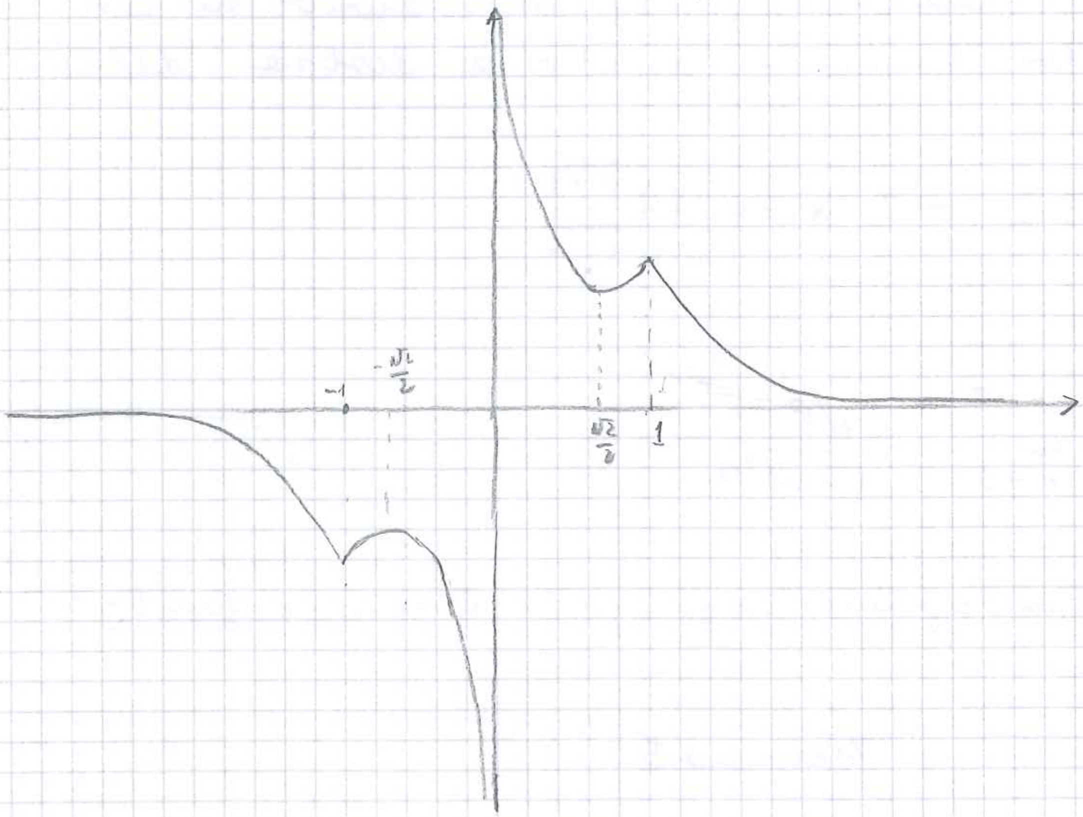
$f''(x)>0$ per $x>0$, $f''(x)<0$ per $x<0$;

Si ha quindi f strettamente convessa su $]0,1]$,

f strettamente concava su $[-1, 0[$

Si ha $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.71$

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{\frac{2}{e}} \approx 0.86$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{\frac{2}{e}} \approx -0.86$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{\sqrt{n+3} - n}{\sqrt{n^5+2}} \sim \frac{-n}{n^{5/2}} = -\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Quindi la serie è convergente

Esercizio 3

Si ha

$$\frac{n+1}{n!} \sim \frac{n}{n!}$$

Essendo la serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p a^n}{n!}$, la serie è convergente

Esercizio 4

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra della funzione

$$f: [1, 5[\to \mathbb{R}, \; x \to \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{5-x}}$$

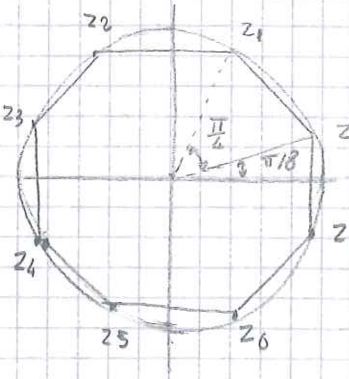
Si ha

$$\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{5-x}} \underset{x \to 5}{\sim} \frac{\sqrt{8}}{(5-x)^{1/2}}$$

Quindi l'integrale improprio è convergente

Esercizio 5

Si ha $|-3| = 3$ e $\pi \in \arg(-3)$



Si ha

$$z_k = \sqrt[8]{3} \; e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{8}}$$

per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Si ha

$$z_0 = \sqrt[8]{3}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt[8]{3} \cos\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right)\Big) =$$

$$= \sqrt[3]{3}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{3}\left(\sqrt{\frac{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}{2}}\right) = \sqrt[3]{3}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

Le radici ottave di -3 si trovano sulla circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[8]{3}$ e si ottengono da z_0 attraverso successive rotazioni di $\frac{\pi}{4}$.

Si trova

$$z_1 = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$z_2 = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$z_3 = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$z_4 = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$z_5 = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$z_6 = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$z_4 = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

Esercizio 6

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x>0 \\ \log x>0 \\ \log\log x>0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x>0 \\ x>1 \\ \log x>1 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x>0 \\ x>1 \\ x>e \end{cases}, \text{ cioè}$$

$x>e$

Si ha quindi $\operatorname{dom}(f) =]e,+\infty[$

b) Per ogni $x \in]e,+\infty[$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\log\log x} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}$$

Esercizio 7

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{100}-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty$$

Esercizio 8

Si ha

$$\operatorname{Arcsin}(2x)\,(x-\operatorname{Arctg} x) \sim 2x\,\frac{1}{3}x^3 = \frac{2}{3}x^4$$

Per $x\to 0$ e per $y\to 0$, si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin x \sin(2x) = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{3}x^4 = 2x^2 - \frac{5}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\operatorname{sh}^2 x = x^2 + \frac{1}{3} x^4 + o(x^4)$$

$$2\operatorname{sh}^2 x = 2x^2 + \frac{2}{3} x^4 + o(x^4)$$

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{24} y^4 + o(y^4)$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3} x^4 + o(x^4)$$

$$2\cos(2x) = 2 - 4x^2 + \frac{4}{3} x^4 + o(x^4)$$

$$\sin x \sin(2x) + 2\operatorname{sh}^2 x - 2 + 2\cos(2x) =$$

$$= 2x^2 - \frac{5}{3} x^4 + o(x^4) + 2x^2 + \frac{2}{3} x^4 - 2 + 2 - 4x^2 + \frac{4}{3} x^4 =$$

$$= \frac{1}{3} x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{3} x^4$$

$$\frac{\sin x \sin(2x) + 2\operatorname{sh}^2 x - 2 + 2\cos x}{\operatorname{Arcsin} x\,(x - \operatorname{Arctg} x)} \sim \frac{\frac{1}{3} x^4}{\frac{2}{3} x^4} = \frac{1}{2}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \sin(2x) + 2\operatorname{sh}^2 x - 2 + 2\cos x}{\operatorname{Arcsin} x\,(x - \operatorname{Arctg} x)} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 9

Si ha

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = \int_0^1 (1+e^x)^{-\frac{1}{2}} e^x\,dx =$$

$$= \left[\frac{(1+e^x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 2\left(\sqrt{1+e} - \sqrt{2}\right)$$

Esercizio 10

Si ha

$$\int_0^1 \log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\,dx =$$

$$= \left[x\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\cdot\left(2+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}\right)dx =$$

$$= \left[x\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\left(2+\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)dx =$$

$$= \left[x\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)dx =$$

$$= \left[x\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\;\frac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx =$$

$$= \left[x\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx =$$

$$= \left[x\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\right]_0^1 - 2\left(\int_0^1 (4x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,8x\,dx\right)\frac{1}{8} =$$

$$= \left[x\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\right]_0^1 - \frac{1}{4}\left[\frac{(4x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left[x\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}\right]_0^1 =$$

$$= \log\left(2+\sqrt{5}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

Esercizio 11 (1° modo)

Poniamo $e^x = t$; si ha $x = \log t$; quindi

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$. Per $x = 0$, si ha $t = 1$; per $x = 1$, si ha $t = e$

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t + \frac{1}{t}}\,\frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \int_1^e \frac{t}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t^2+1}\,dt = \Big[\operatorname{Arctg} t\Big]_1^e =$$

$$= \operatorname{Arctg} e - \operatorname{Arctg} 1 = \operatorname{Arctg} e - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 11 (2° modo)

Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(e^x)^2+1}\,e^x\,dx =$$

$$= \Big[\operatorname{Arctg} e^x\Big]_0^1 = \operatorname{Arctg} e - \operatorname{Arctg} 1 = \operatorname{Arctg} e - \frac{\pi}{4}$$