

Analisi Matematica 1 - 8/1/14 - Compito 1 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 12) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - x)e^{-\frac{1}{x}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 1.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di $f|]0, +\infty[$ in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0 (non sono necessari tutti i passaggi formali);
- (f) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.62$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.63$, $f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \approx 4.86$, $f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) \approx 0.08$, $\frac{1}{3} \approx 0.33$, $f(\frac{1}{3}) \approx 0.03$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^7 + 3}}{\sqrt{n} + n^7} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n - 3}{n!} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è convergente e, per tali x , determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x + |x|)^n .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^3 + 1}{x^5 - 1} dx .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^3 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin(x^2 \sqrt{\cos x}) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x interno al dominio;
- (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e, in caso affermativo, determinare la derivata rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in tali punti.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2) - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x\sqrt{1+x})^3}{1 - \cos x^3} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\log x}}{x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato)

$$\int_1^2 \log \left(x + \frac{1}{x^2} \right) dx .$$

NB 1. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2 - 4q < 0$.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 8/1/14 - Compito 1 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 12) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - x)e^{\frac{x}{x+1}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. 1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 1.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di $f|]-1, +\infty[$ in -1 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in -1 (non sono necessari tutti i passaggi formali);
- (f) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\Downarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $f(-3) \approx 17.93$, $\frac{3}{5} = 0.6$, $f(-\frac{3}{5}) \approx 0.36$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5 + 1}}{n^5 + n} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3}{n} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è convergente e, per tali x , determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x| - x)^n .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^6 + 1}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin(x^4 \sqrt{\cos(2x)}) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x interno al dominio;
- (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e, in caso affermativo, determinare la derivata rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in tali punti.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x} - 2x}{x + 2\sqrt{x}} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{sh} x - x \sqrt[3]{1+2x})^3}{x^2 - \sin x^2} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[4]{\log x}}{x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^{729} \frac{1}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato)

$$\int_1^2 \log \left(x + \frac{8}{x^2} \right) dx .$$

NB 1. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2 - 4q < 0$.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 8/1/14 - Compito 1 - Versione 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 12) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - 2x)e^{-\frac{1}{x-1}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 1.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in $]1, +\infty[$ e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 1 (non sono necessari tutti i passaggi formali);
- (f) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 3}}{\sqrt[3]{n^5 + 3n^4 + 2n^2 + 1}} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n + n^2 + 1}{3^n + 5n^3 + 1} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è convergente e, per tali x , determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x + 2|x|)^n .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3 + x + 1}}{x^5 + 3} dx .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^4 = \sqrt{3} - i .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin(x^6 \sqrt{\cos(3x)}) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x interno al dominio;
- (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e, in caso affermativo, determinare la derivata rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in tali punti.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sin \sqrt{x} - 3 \sin x} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Arctg}(2x) - 2x \sqrt[3]{1+x})^3}{(e^{x^3} - 1)^2} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^{4096} \frac{1}{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato)

$$\int_1^3 \log \left(x + \frac{27}{x^2} \right) dx .$$

NB 1. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2 - 4q < 0$.

Svolgimento e risposta.