Analisi Matematica 1 - 8/1/14

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 12) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1-x)e^{-\frac{1}{x}} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

(b) (p. 1.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) (p. 3*) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;

(d) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

(e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di $f|]0,+\infty[$ in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0 (non sono necessari tutti i passaggi formali);

(f) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.62$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.63$, $f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \approx 4.86$, $f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) \approx 0.08$, $\frac{1}{3} \approx 0.33$, $f(\frac{1}{3}) \approx 0.03$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^7+3}}{\sqrt{n}+n^7} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n-3}{n!} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è convergente e, per tali x, determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+|x|)^n .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3+1}{x^5-1}\, dx .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^3 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin(x^2\sqrt{\cos x})\ ;$$

(a) determinare il dominio naturale di f;

(b) calcolare la derivata di f in un punto x interno al dominio;

(c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e, in caso affermativo, determinare la derivata rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in tali punti.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin x - x\sqrt{1+x}\right)^3}{1 - \cos x^3}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

4

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\log x}}{x}\, dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato)

$$\int_1^2 \log\left(x+\frac{1}{x^2}\right) dx\,.$$

NB 1. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\, dx = a\log\sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2-4q<0$.

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^*$

b) Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = +\infty$$

c) Si ha

$$f(x) = (1-x)\, e^{-\frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} -x$$

Per $y \to 0$ si ha

$$e^y = 1 + y + o(y)$$

Quindi per $x \to +\infty$ si ha

$$e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \left((1-x)\, e^{-\frac{1}{x}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left((1-x)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - x + 1 + o(1) + x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(2 + o(1)\right) = 2$$

Quindi f ammette asintoto per $x \to +\infty$ e l'asintoto di f per $x \to +\infty$ è la retta

$$y = -x + 2$$

Analogamente si vede che f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e che l'asintoto di f per $x \to -\infty$ è ancora la retta

$$y = -x + 2$$

d) Per ogni $x \in \mathbb{R}^*$ si ha

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + (1-x)\, e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}}\left(-1 + \frac{1-x}{x^2}\right) =$$

$$= -e^{-\frac{1}{x}} \frac{x^2 + x - 1}{x^2}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 + x - 1 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ o $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Quindi f è strettamente crescente su $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0\right[$ e su $\left]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

f è strettamente decrescente su $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ e su $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

Si ha quindi

$$m(\nearrow) = \left\{ \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0\right[, \left]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \right\}$$

$$m(\rightarrow) = \emptyset$$

$$m(\searrow) = \left\{ \left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right], \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[\right\}$$

e) Il prolungamento continuo di $f|\,]0,+\infty[$ in 0 è la funzione

$$g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x>0 \\ 0 & \text{per } x=0 \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} -e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0+} -e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\,(x^2+x+1)$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} (x^2+x-1) = -1$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} -e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2} = \lim_{y\to+\infty} -e^{-y}y^2 = \lim_{y\to+\infty} -\frac{y^2}{e^y} = 0$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0+} -e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\,(x^2+x-1) = 0\cdot(-1) = 0$$

Quindi g è derivabile in 0 e si ha $g'(0)=0$

f) Per ogni $x \in \mathbb{R}^*$ si ha

$$f''(x) = -\left(e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\,\frac{x^2+x-1}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}}\,\frac{(2x+1)x^2-2x(x^2+x-1)}{x^4}\right) =$$

$$= -e^{-\frac{1}{x}}\,\frac{x^2+x-1+2x^3+x^2-2x^3-2x^2+2x}{x^4} =$$

$$-e^{-\frac{1}{x}}\,\frac{3x-1}{x^4}$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{3}$, $f''(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{1}{3}$, $f''(x) < 0$ se e solo se $x > \frac{1}{3}$

Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty, 0[$ e su $]0, \frac{1}{3}]$, strettamente concava su $[\frac{1}{3}, +\infty[$

Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{]-\infty, 0[,\ ]0, \tfrac{1}{3}] \right\}, \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [\tfrac{1}{3}, +\infty[\right\}$$

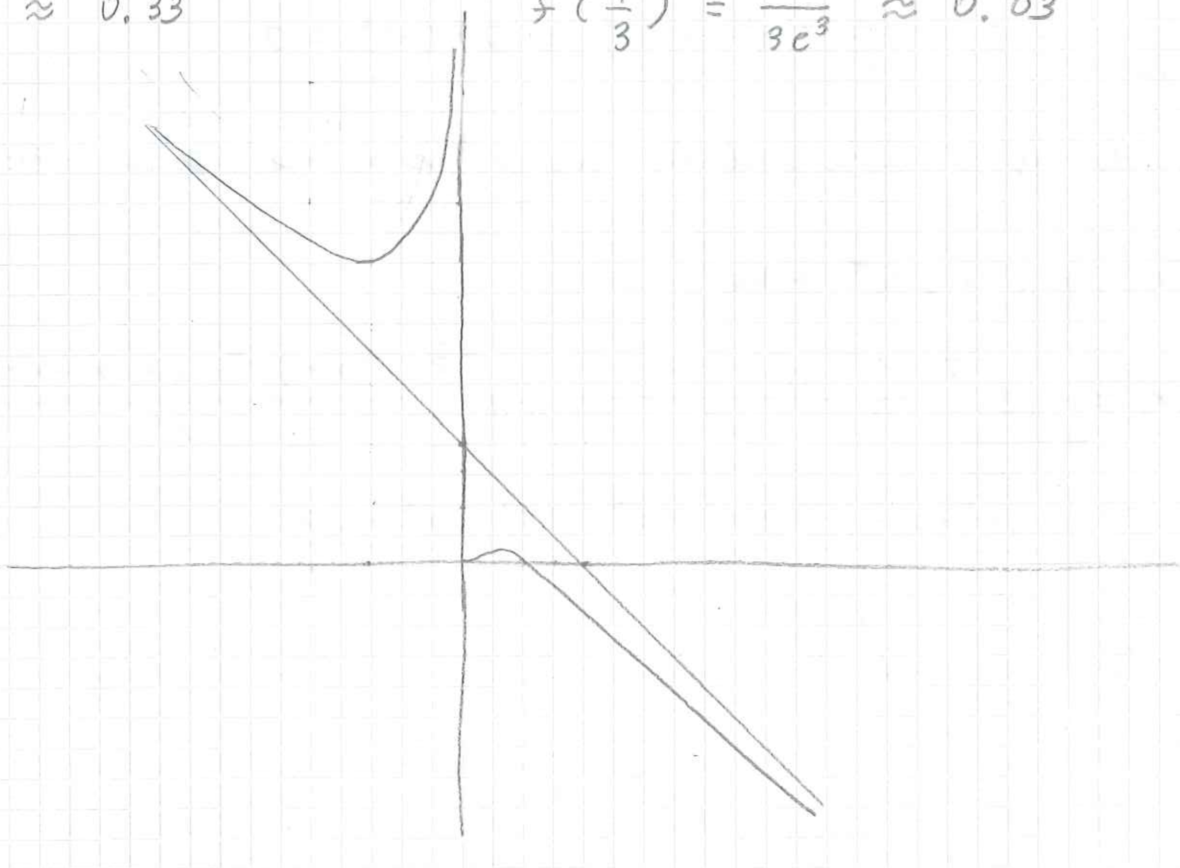
Si ha

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.62, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.63$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \approx 4.86$$

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{2}{1-\sqrt{5}}} \approx 0.08$$

$$\frac{1}{3} \approx 0.33 \qquad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3e^{3}} \approx 0.03$$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{\sqrt{n^7+3}}{\sqrt{n}+n^7} \sim \frac{n^{\frac{7}{2}}}{n^7} = \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$$

Essendo $\frac{7}{2} > 1$, la serie è convergente

Esercizio 3

Si ha

$$\frac{2^n + n - 3}{n!} \sim \frac{2^n}{n!}$$

Quindi la serie è convergente

Esercizio 4

Si tratta di una serie geometrica di ragione $x + |x|$

La serie è convergente se e solo se

$$-1 < x + |x| < 1$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} -1 < x + |x| \\ x + |x| < 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} -1 < x + |x| \\ x - x < 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{cases} -1 < x + |x| \\ x + |x| < 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} -1 < x + x \\ x + x < 1 \\ x \geq 0 \end{cases},$$

cioè
$$\begin{cases} 2x > -1 \\ 2x < 1 \\ x \geq 0 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

Si ha

$$\begin{cases} x + |x| > -1 \\ x + |x| < 1 \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} x - x > -1 \\ x - x < 1 \\ x < 0 \end{cases}, \quad \text{cioè}$$

$x < 0$

La serie è quindi convergente se e solo se $x < \frac{1}{2}$

L'insieme degli elementi $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie è convergente è quindi
$]-\infty, \frac{1}{2}[$

Sia $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$; si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x + |x|)^n = \frac{1}{1 - x - |x|} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-2x} & \text{per } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 5

Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta negativa della funzione

$$f :]-\infty, 0] \longrightarrow R, \quad x \longrightarrow \frac{x^3+1}{x^5-1}$$

Si ha

$$\frac{x^3+1}{x^5-1} \underset{x \to -\infty}{\sim} \frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2}$$

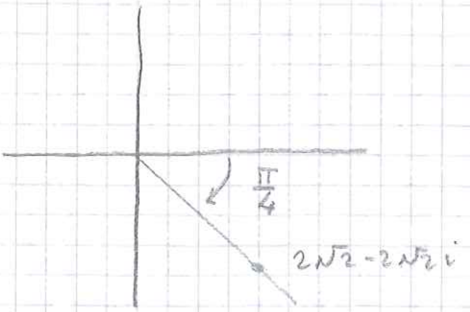
Essendo $2>1$, l'integrale improprio è convergente

Esercizio 6

Si ha

$$|2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i| = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4 \qquad e$$

$$-\frac{\pi}{4} \in \arg(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2})$$



Si ha quindi

$$z = \sqrt[3]{4}\; e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}} \quad , \text{per} \quad k = 0, 1, 2$$

Esercizio 7

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in R$ tali che $\cos x \geq 0$, quindi dagli $x \in R$ per i quali esiste $k \in Z$ tale che $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

b) Sia $k \in \mathbb{Z}$ e sia $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;

f è derivabile in x e si ha

$$f'(x) = \cos\left(x^2 \sqrt{\cos x}\right)\left(2x\sqrt{\cos x} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}(-\sin x)\right) =$$

$$= \cos\left(x^2 \sqrt{\cos x}\right)\left(2x\sqrt{\cos x} - x^2 \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\right)$$

c) Sia $k \in \mathbb{Z}$ e sia $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Si ha

$$\lim_{x \to a} \cos\left(x^2 \sqrt{\cos x}\right) = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \to a} 2x\sqrt{\cos x} = 0$$

$$\lim_{x \to a} -x^2 \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} = -\infty$$

Si ha quindi $\lim_{x \to a} f'(x) = -\infty$; quindi f è

derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in a e si ha $f'(a) = -\infty$

Sia $a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Si ha

$$\lim_{x \to a} \cos\left(x^2 \sqrt{\cos x}\right) = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \to a} 2x\sqrt{\cos x} = 0$$

$$\lim_{x \to a} -x^2 \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} = +\infty$$

Si ha quindi $\lim\limits_{x\to e} f'(x) = +\infty$; quindi f

è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in e e si ha $f'(e) = +\infty$

Esercizio 8

Si ha $\log(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \underset{x\to 0}{\ll} \sqrt{x}$. Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = 1$$

Esercizio 9

Si ha

$$1 - \cos x^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}(x^3)^2 = \frac{1}{2}x^6$$

Si ha

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

$$x\sqrt{1+x} = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\sin x - x\sqrt{1+x} = x + o(x^2) - x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{(\sin x - x\sqrt{1+x})^3}{1-\cos x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^3}{\frac{1}{2}x^6} = -\frac{1}{4}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x\sqrt{1+x})^3}{1-\cos x^3} = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\log x}}{x}\, dx = \int_1^2 (\log x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\, dx =$$

$$\left[\frac{(\log x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \log 2 \sqrt{\log 2}$$

Esercizio 11

Poniamo $\sqrt[6]{x} = t$; si ha $x = t^6$; quindi $\frac{dx}{dt} = 6\, t^5$. Per $x = 1$, si ha $t = 1$; per $x = 64$ si ha $t = 2$

Si ha quindi

$$\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{t^3 + t^2}\, 6\, t^5\, dt =$$

$$= 6 \int_1^2 \frac{t^5}{t^2 (t+1)}\, dt = 6 \int_1^2 \frac{t^3}{t+1}\, dt$$

La divisione $t^3 : (t+1)$ ha quoziente $Q(t) = t^2 - t + 1$ e resto $R(t) = -1$

Si ha quindi

$$t^3 = (t+1)(t^2 - t + 1) - 1 \;;$$

quindi

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$$

Si ha quindi

$$6\int_1^2 \frac{t^3}{t+1}\,dt = 6\int_1^2 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \log(t+1)\right]_1^2 =$$

$$= 6\left(\frac{8}{3} - 2 + 2 - \log 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + \log 2\right) =$$

$$6\left(\frac{11}{6} + \log\frac{2}{3}\right) = 11 + 6\log\frac{2}{3}$$

Esercizio 12 (1° modo)

Si ha

$$\int_1^2 \log\left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^2 \log\frac{1+x^3}{x^2}\,dx =$$

$$= \left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{x^2}{1+x^3}\,\frac{3x^2\cdot x^2 - 2x(1+x^3)}{x^4}\,dx =$$

$$= \left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3x^4 - 2x(1+x^3)}{(1+x^3)\,x}\,dx =$$

$$= \left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3x^3 - 2 - 2x^3}{1+x^3}\,dx =$$

$$= \left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3 - 2}{x^3+1}\,dx =$$

$$= \left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3 + 1 - 3}{x^3+1}\,dx =$$

$$= \left[x\log\frac{1+x^3}{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \left(1 - \frac{3}{x^3+1}\right) dx =$$

$$= \left[x \log \frac{1+x^3}{x^2} - x \right]_1^2 + 3 \int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\, dx$$

Si ha

$$x^3+1 = (x+1)\,(x^2-x+1)$$

Esistono $A, B, C \in R$ tali che

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Si ha

$$1 = A\,(x^2-x+1) + (Bx+C)\,(x+1)$$

Per $x=-1$, si ha $1 = 3A$; quindi $A = \frac{1}{3}$

Si ha quindi

$$1 = \frac{1}{3}(x^2-x+1) + (Bx+C)\,(x+1) \;;$$

quindi

$$3 = x^2-x+1 + 3\,(Bx+C)\,(x+1) \;;$$

quindi

$$-x^2+x+2 = 3\,(Bx+C)\,(x+1);$$

quindi

$$-(x+1)(x-2) = 3\,(Bx+C)\,(x+1) \;;$$

quindi

$$-x+2 = 3Bx+3C \;;$$

quindi

$$\begin{cases} 3B = -1 \\ 3C = 2 \end{cases} ;$$

quindi

$$B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\,\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

L'espressione sopra è quindi uguale a

$$\left[x \log \frac{1+x^3}{x^2} - x\right]_1^2 + 3\int_1^2 \left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\,\frac{x-2}{x^2-x+1}\right) dx =$$

$$= \left[x \log \frac{1+x^3}{x^2} - x + \log(x+1)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x-2}{x^2-x+1}\, dx =$$

$$= \left[x \log \frac{1+x^3}{x^2} - x + \log(x+1) - \log\sqrt{x^2-x+1} - \frac{-3}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_1^2 =$$

$$= \left[x \log \frac{1+x^3}{x^2} - x + \log \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_1^2 =$$

$$= 2\log\frac{9}{4} - 2 + \log\frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\,\sqrt{3} - \log 2 + 1$$

$$- \log 2 - \sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{9}{2}\log 3 - 6\log 2 - 1 + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6} =$$

$$= \log\frac{81\sqrt{3}}{64} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

Esercizio 12 (2° modo)

Si ha

$$\int_1^2 \log\left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^2 \log\frac{1+x^3}{x^2}\, dx =$$

$$= \int_1^2 \log(1+x^3)\, dx + \int_1^2 \log x^2\, dx =$$

$$= \int_1^2 \log\big((1+x)(x^2-x+1)\big)\,dx - 2\int_1^2 \log x\,dx =$$

$$= \int_1^2 \log(1+x)\,dx + \int_1^2 \log(x^2-x+1)\,dx - 2\int_1^2 \log x\,dx =$$

$$= \Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_1^2 - \int_1^2 (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx +$$

$$+ \Big[x\log(x^2-x+1)\Big]_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{1}{x^2-x+1}(2x-1)\,dx$$

$$-2\left(\Big[x\log x\Big]_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{1}{x}\,dx\right) =$$

$$= \Big[(x+1)\log(x+1) + x\log(x^2-x+1) - 2x\log x\Big]_1^2$$

$$- \int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{2x^2-x}{x^2-x+1}\,dx + 2\int_1^2 dx =$$

$$= \Big[(x+1)\log(x+1) + x\log(x^2-x+1) - 2x\log x + x\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{2x^2-x}{x^2-x+1}\,dx$$

Eseguendo la divisione $(2x^2-x):(x^2-x+1)$
si trova il quoziente $Q(x)=2$ e il resto $R(x)=x-2$

Si ha quindi

$2x^2-x = 2(x^2-x+1) + x-2$; quindi

$$\frac{2x^2-x}{x^2-x+1} = 2 + \frac{x-2}{x^2-x+2}$$

L'espressione sopra è quindi uguale a

$$= \Big[(x+1)\log(x+1) + x\log(x^2-x+1) - 2x\log x + x \Big]_1^2 - \int_1^2 \left(2 + \frac{x-2}{x^2-x+1}\right) dx$$

$$= \Big[(x+1)\log(x+1) + x\log(x^2-x+1) - 2x\log x - x \Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{x-2}{x^2-x+1}\, dx =$$

$$= \Big[(x+1)\log(x+1) + x\log(x^2-x+1) - 2x\log x - x - \log\sqrt{x^2-x+1}$$

$$+ \sqrt{3}\ \mathrm{Arctg}\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big]_1^2 =$$

$$= 3\log 3 + 2\log 3 - 4\log 2 - 2 - \log\sqrt{3} + \sqrt{3}\ \mathrm{Arctg}\ \sqrt{3}$$

$$- 2\log 2 + 1 - \sqrt{3}\ \mathrm{Arctg}\ \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{9}{2}\log 3 - 6\log 2 - 1 + \sqrt{3}\ \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\ \frac{\pi}{6} =$$

$$\log \frac{81\sqrt{3}}{64} - 1 + \frac{\pi}{6}$$