

Analisi Matematica 1 - 23/1/14 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{2}{e} \approx 0.74$, $\frac{10}{e^3} \approx 0.50$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n! + 3^n} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è assegnata ed è convergente e, per tali x , determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x+3}{x+2} \right)^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^3 = -64 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \cos(x^2 \sqrt{\cos(5x)}) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x interno al dominio;
- (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e, in caso affermativo, determinare la derivata rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in tali punti.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x + \sqrt{1 - x^2} ;$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinarli.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \log x}{x - \sqrt{x}} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[8]{1 + x^4} \sqrt[4]{x^4 + x^6} - x^2 \right) .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3+2x^2}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{Arctg}(2x) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (è sufficiente fermarsi alla variazione, senza calcolarla)

$$\int_{-\frac{8}{7}}^1 \sqrt{\frac{2x+3}{x+4}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 23/1/14 - Compito 2 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 + x + x^2)e^{x+1},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\ddagger)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{3}{e} \approx 1.10$, $\frac{-5-\sqrt{5}}{2} \approx -3.62$, $\frac{-5+\sqrt{5}}{2} \approx -1.38$, $f(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}) \approx 0.76$, $f(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}) \approx 1.04$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{n!} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è assegnata ed è convergente e, per tali x , determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3x + 2}{x + 4} \right)^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 3}{\sqrt[4]{x^6 + x^5}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^8 = 256 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \cos(x\sqrt{\cos(2x)});$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x interno al dominio;
- (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e, in caso affermativo, determinare la derivata rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in tali punti.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia

$$f : [0, 2] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x + \sqrt{4 - x^2};$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinarli.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2+7}}{x^2+3}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[6]{1+x^3} \sqrt[8]{x^{10}+x^{12}} - x^2 \right).$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+3x^3}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x^4 \operatorname{Arctg} x dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (è sufficiente fermarsi alla variazione, senza calcolarla)

$$\int_0^6 \sqrt{\frac{5x+2}{x+2}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 23/1/14 - Compito 2 - Versione 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^2 e^{-x+2},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $2 - \sqrt{2} \approx 0.59$, $2 + \sqrt{2} \approx 3.41$, $f(2 - \sqrt{2}) \approx 1.41$, $f(2 + \sqrt{2}) \approx 2.83$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n+5}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è assegnata ed è convergente e, per tali x , determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5x+1}{2x+1} \right)^n.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{x+5}{\sqrt{x^2+x}} dx.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 = 1 + \sqrt{3}i.$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \cos(x^3 \sqrt{\cos(3x)}) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x interno al dominio;
- (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e, in caso affermativo, determinare la derivata rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in tali punti.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia

$$f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow 2x + \sqrt{1 - 4x^2} ;$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinarli.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+7}}{x^4} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{1 + x^4} \sqrt{x^2 + x^4} - x^2 \right) .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{5+4x^4}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 (x^2 + x^4) \operatorname{Arctg} x dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (è sufficiente fermarsi alla variazione, senza calcolarla)

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{4x+1}{x+3}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.