Analisi Matematica 1 - 23/1/14

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

(b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

(d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{2}{e} \approx 0.74$, $\frac{10}{e^3} \approx 0.50$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n! + 3^n} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è assegnata ed è convergente e, per tali x, determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x+3}{x+2} \right)^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}\, dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^3 = -64 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \cos(x^2\sqrt{\cos(5x)}) ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;
   (b) calcolare la derivata di f in un punto x interno al dominio;
   (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e, in caso affermativo, determinare la derivata rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in tali punti.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x + \sqrt{1-x^2} ;$$

   (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
   (b) in caso affermativo, determinarli.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - \log x}{x - \sqrt{x}} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[8]{1+x^4}\,\sqrt[4]{x^4+x^6} - x^2\right) .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3+2x^2}}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{Arctg}(2x)\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (è sufficiente fermarsi alla variazione, senza calcolarla)

$$\int_{-\frac{8}{7}}^1 \sqrt{\frac{2x+3}{x+4}}\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Si ha

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2+1)e^{-x}(-1) = -e^{-x}(x^2-2x+1) =$$
$$= -e^{-x}(x-1)^2$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x \neq 1$.

Si ha $f'(x) > 0$ mai

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x \neq 1$

Quindi f è strettamente decrescente su $]-\infty, 1]$ e su $[1, +\infty[$; quindi f è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

Si ha quindi

$m(\nearrow) = \emptyset$, $m(\rightarrow) = \emptyset$, $m(\searrow) = \{\mathbb{R}\}$

d) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f''(x) = -\left(\left(2x-2\right)e^{-x} + (x^2-2x+1)e^{-x}(-1)\right) =$$
$$= -e^{-x}\left(2x-2-x^2+2x-1\right) = e^{-x}(x^2-4x+3)$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2-4x+3=0$, cioè se e solo se $x=1$ o $x=3$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x<1$ o $x>3$

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $1 < x < 3$

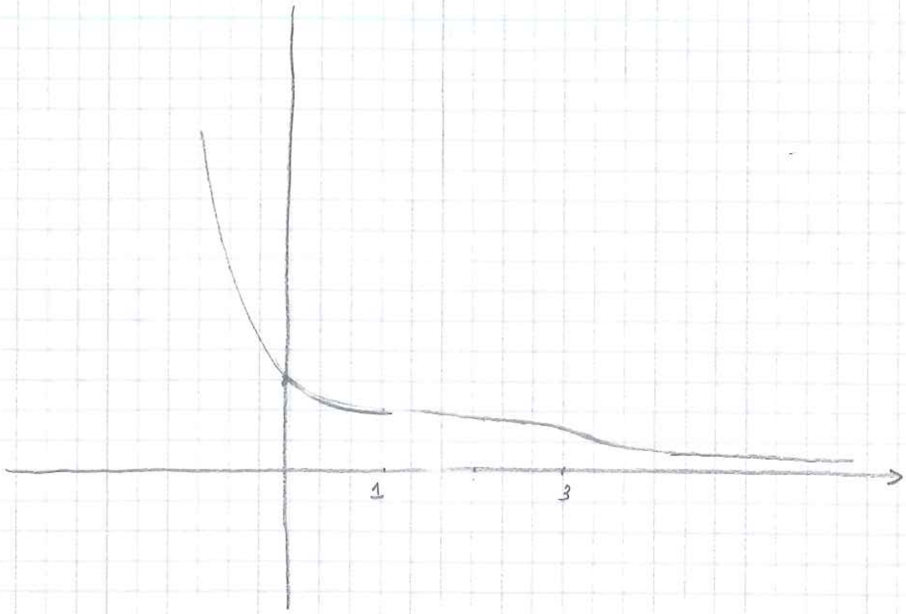
Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty, 1]$ e su $[3, +\infty[$, strettamente concava su $[1, 3]$

Si ha quindi

$\mathcal{C}(\uparrow) = \{\,]-\infty, 1],\ [3, +\infty[\, \}$, $\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset$

$\mathcal{C}(\downarrow) = \{\, [1, 3] \,\}$

Si ha $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{2}{e} \approx 0{,}74$, $f(3) = \frac{10}{e^3} \approx 0{,}50$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{2^n}{n! + 3^n} \sim \frac{2^n}{n!}$$

Quindi la serie è convergente

Esercizio 4

La serie è assegnata per $x \neq -2$

Supposto $x \neq -2$, la serie è una serie geometrica di ragione $\frac{2x+3}{x+2}$; la serie è convergente se e solo se $-1 < \frac{2x+3}{x+2} < 1$, cioè se e solo se

$$\begin{cases} \frac{2x+3}{x+2} < 1 \\ \frac{2x+3}{x+2} > -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \frac{2x+3}{x+2} - 1 < 0 \\ \frac{2x+3}{x+2} + 1 > 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} \frac{2x+3-x-2}{x+2} < 0 \\ \frac{2x+3+x+2}{x+2} > 0 \end{cases}, \text{ cioè} \quad \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} < 0 \\ \frac{3x+5}{x+2} > 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} -2 < x < -1 \\ x < -2 \text{ o } x > -\frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad -\frac{5}{3} < x < -1$$

L'insieme delle x per le quali la serie è convergente è quindi

$$\left]-\frac{5}{3}, -1\right[$$

Per $x \in \left]-\frac{5}{3}, -1\right[$ la somma della serie è

$$\frac{1}{1-\frac{2x+3}{x+2}} = \frac{x+2}{x+2-2x-3} = \frac{x+2}{-x-1} = -\frac{x+2}{x+1}$$

Esercizio 4

Si tratta dell'integrale improprio della funzione

$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}$$

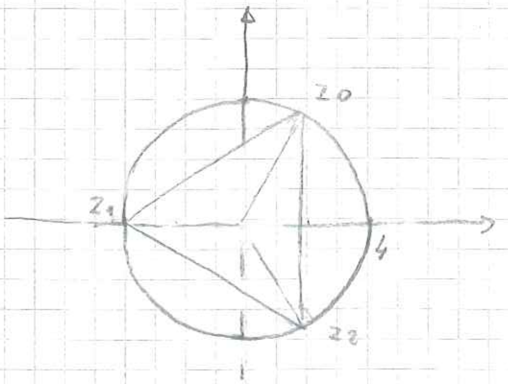
Si ha

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^4+x^2}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{2/3}}$$

Essendo $\frac{2}{3} < 1$, l'integrale improprio è convergente

Esercizio 5

Si ha $|-64| = 64$ e $\pi \in \arg(-64)$



Si ha $\sqrt[3]{64} = 4$

Le radici appartengono alla circonferenza di centro 0 e raggio 4; z_0 ha argomento $\frac{\pi}{3}$;

le altre si ottengono da z_0, ruotando della terza parte dell'angolo giro

Si ha quindi

$$z_0 = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2 + 2\sqrt{3}\, i$$

$$z_1 = -4$$

$$z_2 = 2 - 2\sqrt{3}\, i$$

Esercizio 6.

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$\cos(5x) \geq 0$, cioè tali che

$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 5x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, cioè tali che

$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \leq x \leq \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$

Si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \right]$$

b) Per ogni

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \right[$$

si ha

$$f'(x) = -\sin\left(x^2\sqrt{\cos(5x)}\right)\left(2x\sqrt{\cos(5x} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{\cos 5x}}(-\sin(5x)\cdot 5)\right)$$

$$= \sin\left(x^2\sqrt{\cos(5x)}\right)\left(\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x}\right)$$

c) Sia $k \in \mathbb{Z}$ e sia $a = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$. Si ha $a \neq 0$

Si ha $\sin(5a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$

Si ha $\cos(5a) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$

Si ha quindi

$$\sin\left(x^2\sqrt{\cos(5x}\right) \underset{x\to a}{\sim} x^2\sqrt{\cos(5x)} \underset{x\to a}{\sim} a^2\sqrt{\cos(5x)}$$

$$\frac{5}{2}x^2\frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos(5x}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} \underset{x\to a}{\sim}$$

$$\frac{5}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}}$$

Quindi

$$\sin\left(x^2\sqrt{\cos(5x)}\right)\left(\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x}} - 2x\sqrt{\cos(5x)}\right) \underset{x\to a}{\sim}$$

$$a^2\sqrt{\cos(5x)}\,\frac{5}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}} = \frac{5}{2}a^4$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to a} \sin\left(x^2\sqrt{\cos 5x}\right)\left(\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)}\right) = \frac{5}{2}a^4 =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}\right)^4$$

Quindi f è derivabile in a e $f'(a) = \frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}\right)^4$

Sia ora $a = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$. Si ha $a \neq 0$

Si ha

$$\sin(5a) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$$

$$\cos(5a) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$$

Si ha quindi

$$\sin\left(x^2\sqrt{\cos(5x)}\right) \underset{x\to a}{\sim} x^2\sqrt{\cos(5x)} \underset{x\to a}{\sim} a^2\sqrt{\cos(5x)}$$

$$\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} \underset{x\to a}{\sim}$$

$$-\frac{5}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}}$$

Si ha quindi

$$\sin\left(x^2\sqrt{\cos(5x)}\right)\left(\frac{5}{2}x^2\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)}\right) \underset{x\to a}{\sim}$$

$$a^2\sqrt{\cos(5x)}\left(-\frac{5}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}}\right) = -\frac{5}{2}a^4$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to a} \sin\left(x^2\sqrt{\cos(5x)}\right)\left(\frac{5}{2}\frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)}\right) = -\frac{5}{2}a^4$$

$$= -\frac{5}{2}\left(-\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}\right)^4$$

Quindi f è derivabile in a e si ha

$$f'(a) = -\frac{5}{2}\left(-\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5}\right)^4$$

Esercizio 7

a) Essendo $\mathrm{dom}(f)$ compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme degli estremanti assoluti di f

Sia $x \in]0,1[$; si ha

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si ha $f'(x)=0$ se e solo se $\sqrt{1-x^2}-x=0$, cioè $\sqrt{1-x^2}=x$,

cioè, essendo $x \geq 0$, se e solo se $1-x^2=x^2$, cioè $2x^2=1$, cioè

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè, essendo $x \geq 0$ se e solo se $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$E \cap]0,1[\subset \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Si ha quindi

$E \subset \left\{0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Si ha

$$f(0)=1,\quad f(1)=1,\quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Si ha quindi

$\max(f) = \sqrt{2}$, $\min(f) = 1$

Esercizio 8

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - \log x}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$$

Esercizio 9

Si ha

$$\sqrt[8]{1+x^4}\;\sqrt[4]{x^4+x^6}-x^2=$$

$$=\sqrt[8]{x^4\left(\frac{1}{x^4}+1\right)}\;\sqrt[4]{x^6\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x^2=$$

$$=x^{\frac{1}{2}}\sqrt[8]{\frac{1}{x^4}+1}\;x^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}+1}-x^2=$$

$$=x^2\left(\sqrt[8]{\frac{1}{x^4}+1}\;\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}+1}-1\right)$$

Si ha

$$(1+y)^{\frac{1}{8}}=1+\frac{1}{8}y+o(y)$$

Quindi

$$\sqrt[8]{\frac{1}{x^4}+1}=1+\frac{1}{8}\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Si ha

$$(1+y)^{\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{4}y+o(y)$$

Quindi

$$\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}+1}=1+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Quindi

$$x^2\left(\sqrt[8]{\frac{1}{x^4}+1}\;\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-1\right)=$$

$$x^2\left(\left(1+\frac{1}{8}\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\left(1+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right)=$$

$$=x^2\left(1+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right)=x^2\left(\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\sim x^2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{1+x^4}\,\sqrt[4]{x^4+x^6}-x^2\right)=\frac{1}{4}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3+2x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (3+2x^2)^{-\frac{1}{2}}(4x)\,dx =$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{(3+2x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$$

Esercizio 11

Si ha

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{Arctg}\,(2x)\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3\,\mathrm{Arctg}\,(2x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}x^3\,\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2\,dx=$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\,\mathrm{Arctg}\,(2x)\right]_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{x^3}{1+4x^2}\,dx$$

Eseguendo la divisione $x^3 : (4x^2+1)$ si trova

il quoziente $Q(x)=\frac{1}{4}x$ e resto $R(x)=-\frac{1}{4}x$

Si ha quindi

$$x^3=\frac{1}{4}x\,(4x^2+1)-\frac{1}{4}x \quad ; \quad \text{quindi}$$

$$\frac{x^3}{4x^2+1}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\,\frac{x}{4x^2+1}$$

L'espressione sopra è quindi uguale a

$$\left[\frac{1}{3}x^3 \operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\frac{x}{4x^2+1}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{6}\int_0^1 x\, dx + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{x}{4x^2+1}\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{6}\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}\int_0^1 \frac{1}{4x^2+1}(8x)\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{48}\log(4x^2+1)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{Arctg} 2 - \frac{1}{12} + \frac{1}{48}\log 5$$

Esercizio 12

Poniamo

$\sqrt{\dfrac{2x+3}{x+4}} = t$; si ha $\dfrac{2x+3}{x+4} = t^2$; quindi

$2x+3 = t^2x + 4t^2$; quindi $t^2x - 2x = 3 - 4t^2$;

quindi $x(t^2-2) = 3 - 4t^2$; quindi

$$x = \frac{3-4t^2}{t^2-2}$$

Si ha quindi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-8t(t^2-2) - 2t(3-4t^2)}{(t^2-2)^2} =$$

$$\frac{-8t^3 + 16t - 6t + 8t^3}{(t^2-2)^2} = \frac{10t}{(t^2-2)^2}$$

Per $x=0$ si ha $t = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; per $x=1$ si ha

$$t = \sqrt{\frac{2\left(-\frac{8}{7}\right)+3}{-\frac{8}{7}+4}} = \sqrt{\frac{-16+21}{-8+28}} = \sqrt{\frac{5}{20}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Si ha quindi

$$\int_{-\frac{8}{7}}^{1} \sqrt{\frac{2x+3}{x+4}}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t \, \frac{10t}{(t^2-2)^2}\, dt = 10 \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^2}{(t^2-2)^2}\, dt$$

Si ha $t^2 - 2 = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$

Esistono $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^2}{(t^2-2)^2} = \frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{(t-\sqrt{2})^2} + \frac{C}{t+\sqrt{2}} + \frac{D}{(t+\sqrt{2})^2}$$

Si ha

$$t^2 = A(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})^2 + B(t+\sqrt{2})^2 + C(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2}) + D(t-\sqrt{2})^2$$

Per $t = \sqrt{2}$ si ha $2 = B \cdot 8$; quindi $B = \frac{1}{4}$

Per $t = -\sqrt{2}$ si ha $2 = 8D$; quindi $D = \frac{1}{4}$

Quindi

$$t^2 = A(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})^2 + \frac{1}{4}(t+\sqrt{2})^2 + C(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2}) + \frac{1}{4}(t-\sqrt{2})^2$$

Quindi

$$4t^2 = 4A(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})^2 + t^2 + 2\sqrt{2}t + 2 + 4C(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2}) + t^2 - 2\sqrt{2}t + 2$$

Quindi

$$2t^2 - 4 = 4A(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})^2 + 4C(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2})$$

Quindi

$$2(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}) = 4A(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})^2 + 4C(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2})$$

Quindi

$$1 = 2A(t+\sqrt{2}) + 2C(t-\sqrt{2})$$

Per $t = \sqrt{2}$ si ha $1 = 4A\sqrt{2}$; quindi $A = \frac{\sqrt{2}}{8}$

Per $t = -\sqrt{2}$ si ha $1 = -4C\sqrt{2}$; quindi $C = -\frac{\sqrt{2}}{8}$

Si ha quindi

$$\frac{t^2}{(t^2-2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{t-\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{(t-\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{t+\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{(t+\sqrt{2})^2}$$

Quindi

$$10\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^2}{(t^2-2)^2}\,dt =$$

$$= 10\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{t-\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{(t-\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{t+\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{(t+\sqrt{2})^2}\right) dt =$$

$$10\left[\frac{\sqrt{2}}{8}\log|t-\sqrt{2}| - \frac{1}{4}\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8}\log|t+\sqrt{2}| - \frac{1}{4}\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= 10\left[\frac{\sqrt{2}}{8}\log\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2}\frac{t}{t^2-2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= 10\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2}(-1) - \frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-2}\right) =$$

$$= 10\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) =$$

$$= 10\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{4+\sqrt{2}-2\sqrt{2}-1}{4-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1} - \frac{5}{14}\right) =$$

$$10\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} - \frac{5}{14}\right) =$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{4}\log\frac{9+2-6\sqrt{2}}{7} - \frac{25}{7} =$$

$$\frac{5}{4}\sqrt{2}\log\frac{11-6\sqrt{2}}{7} - \frac{25}{7}$$