

Analisi Matematica 1 - 7/2/14 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^5 \log^4 x ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\Downarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $e^{-\frac{4}{5}} \approx 0.449$, $f(e^{-\frac{4}{5}}) \approx 0.008$. $e^{\frac{-9-\sqrt{21}}{10}} \approx 0.257$, $f(e^{\frac{-9-\sqrt{21}}{10}}) \approx 0.004$, $e^{\frac{-9+\sqrt{21}}{10}} \approx 0.643$, $f(e^{\frac{-9+\sqrt{21}}{10}}) \approx 0.004$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+7} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia $x \in \mathbf{R}$; dire il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n + \sqrt{n}}{n^2 + 1} ,$$

al variare di x .

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^8 = -256 .$$

Suggerimenti. Attraverso le formule di bisezione ci si riconduce al seno e coseno di numeri noti; si utilizzi la posizione delle radici nel piano complesso.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin \cos \operatorname{tg}(2x) ;$$

(a) determinare il dominio naturale di f ;

(b) calcolare la derivata di f in un punto generico x del dominio;

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n} \right)^n .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x} - 1) \log(1+x) - (\sqrt{1+x} - 1) \log(1+2x)}{2x - \sin(2x)} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \log \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{1 + \log x}}{x \log x} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 7/2/14 - Compito 3 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^3 \log^3 x ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\Downarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{1}{e} \approx 0.37$, $f(\frac{1}{e}) \approx -0.05$. $\frac{1}{e^2} \approx 0.14$, $f(\frac{1}{e^2}) \approx -0.02$, $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$, $f(\frac{1}{\sqrt{e}}) \approx -0.03$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + 7} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia $x \in \mathbf{R}$; dire quale è il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{|x|^n + \sqrt{n}} ,$$

al variare di x .

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^4 = 12i .$$

Suggerimenti. Attraverso le formule di bisezione ci si riconduce al seno e coseno di numeri noti; si utilizzi la posizione delle radici nel piano complesso.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \cos \sin \frac{1}{\sin(2x)} ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto generico x del dominio;

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n}{n^2 + 3} \right)^{2n} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+3x} - 1) \log(1+x) - (\sqrt[3]{1+x} - 1) \log(1+3x)}{\operatorname{sh}(3x) - 3x} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \log \left(1 + \frac{1}{x+2} \right) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_e^{e^4} \frac{\sqrt{4 - \log x}}{x \log x} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.