

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^5 \log^4 x,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $e^{-\frac{4}{5}} \approx 0.449$, $f(e^{-\frac{4}{5}}) \approx 0.008$. $e^{\frac{-9-\sqrt{21}}{10}} \approx 0.257$, $f(e^{\frac{-9-\sqrt{21}}{10}}) \approx 0.004$, $e^{\frac{-9+\sqrt{21}}{10}} \approx 0.643$, $f(e^{\frac{-9+\sqrt{21}}{10}}) \approx 0.004$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+7} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia $x \in \mathbb{R}$; dire il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n + \sqrt{n}}{n^2 + 1} ,$$

al variare di x .

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^8 = -256 .$$

Suggerimenti. Attraverso le formule di bisezione ci si riconduce al seno e coseno di numeri noti; si utilizzi la posizione delle radici nel piano complesso.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin \cos \operatorname{tg}(2x) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto generico x del dominio;

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n} \right)^n .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x} - 1) \log(1+x) - (\sqrt{1+x} - 1) \log(1+2x)}{2x - \sin(2x)} .$$

Svolgimento e risposta.

- 4
9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \log \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{1 + \log x}}{x \log x} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Vernone 1

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) =]0, +\infty[$ b) Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ c) Per ogni $x \in]0, +\infty[$ si ha

$$f'(x) = 5x^4 \log^4 x + x^5 \cdot 4 \log^3 x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$5x^4 \log^4 x + 4x^4 \log^3 x = x^4 \log^3 x (5 \log x + 4)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\log^3 x = 0$ o $5 \log x + 4 = 0$, cioè se e solo se $\log x = 0$ o $\log x = -\frac{4}{5}$, cioè se e solo se

$$x = 1 \text{ o } x = e^{-\frac{4}{5}}$$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x < e^{-\frac{4}{5}}$ o $x > 1$ Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $e^{-\frac{4}{5}} < x < 1$ Quindi f è strettamente crescente su $]0, e^{-\frac{4}{5}}]$ e su $[1, +\infty[$, f è strettamentedecrescente su $[e^{-\frac{4}{5}}, 1]$

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]0, e^{-\frac{4}{5}}], [1, +\infty[\}, \quad \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{ [e^{-\frac{4}{5}}, 1] \}$$

d) Il prolungamento continuo di f in 0 è la funzione

$$g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 \log^4 x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \log^4 x = 0$$

g è derivabile in 0 e $g'(0) = 0$

e) Si $x \in]0, +\infty[$; si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= 20x^3 \log^4 x + 5x^4 \cdot 4 \log^3 x \cdot \frac{1}{x} \\ &\quad + 16x^3 \log^3 x + 4x^4 \cdot 3 \log^2 x \cdot \frac{1}{x} = \\ &= 20x^3 \log^4 x + 36x^3 \log^3 x + 12x^3 \log^2 x = \\ &= 4x^3 \log^2 x (5 \log^2 x + 9 \log x + 3) \end{aligned}$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $\log^2 x = 0$ o

$5 \log^2 x + 9 \log x + 3 = 0$, cioè se e solo se

$\log x = 0$ o $\log x = \frac{-9 \pm \sqrt{21}}{10}$, cioè se e solo se

$$x = 1 \text{ o } x = e^{\frac{-9 + \sqrt{21}}{10}} \quad \vee \quad x = e^{\frac{-9 - \sqrt{21}}{10}}$$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{10}}$ o $x > e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{10}}$

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{10}} < x < 1$ o

$$1 < x < e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{10}}$$

Quindi f è strettamente convessa su $]0, e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{10}}]$

e su $[e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{10}}, +\infty[$, f è strettamente
concava su $[e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{10}}, 1]$ e su $[1, e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{10}}]$

Essendo $f'_-(1) = f'_+(1)$, f è strettamente
concava su $[e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{10}}, e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{10}}]$

Si ha quindi:

$$C(\uparrow) = \left\{]0, e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{10}}], [e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{10}}, +\infty[\right\}$$

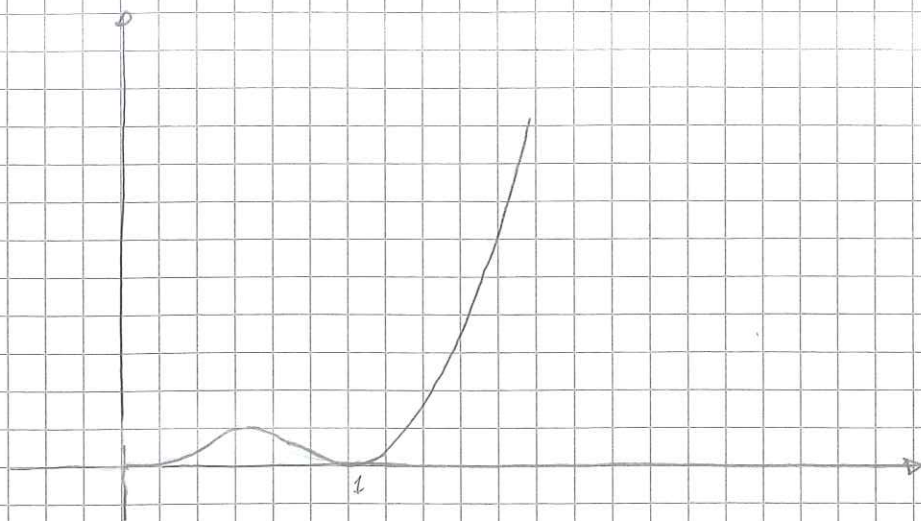
$$C(\downarrow) = \emptyset, \quad C(\updownarrow) = \left\{ [e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{10}}, e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{10}}] \right\}$$

$$\text{Si ha } e^{-\frac{4}{5}} \approx 0.449, \quad f(e^{-\frac{4}{5}}) = \frac{256}{625 e^4} \approx 0.008$$

$$e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{10}} \approx 0.257, \quad e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{10}} \approx 0.643$$

$$f(e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{10}}) = \frac{(-3-\sqrt{21})^4 e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{2}}}{10000} \approx 0.004$$

$$f(e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{10}}) = \frac{(-3+\sqrt{21})^4 e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{2}}}{10000} \approx 0.004$$



Esercizio 2

La successione $\left(\frac{1}{n+7} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e

$$\text{e ha } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+7} = 0.$$

Quindi la serie è convergente per il criterio di Leibniz

Esercizio 3

Se $|x| > 1$, cioè $x < -1$ o $x > 1$; si ha

$$\frac{|x|^n + \sqrt{n}}{n^2 + 1} \sim \frac{|x|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} |x|^n$$

Quindi la serie è divergente positivamente

Se $|x| = 1$, cioè $x = 1$ o $x = -1$

$$\frac{|x|^n + \sqrt{n}}{n^2 + 1} = \frac{1 + \sqrt{n}}{n^2 + 1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Quindi la serie è convergente

Se $|x| < 1$, cioè $-1 < x < 1$; n.b.

$$\frac{|x|^{n+\sqrt{n}}}{n^2+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Quindi la serie è convergente

Esercizio 4

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo privato di punti della funzione

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \frac{1}{x^2}$$

L'integrale improprio assegnato è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri su intervalli aperti.

$$\int_{-a}^0 \frac{1}{x^2} dx \quad e \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ è convergente

se e solo se è convergente l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

ed è convergente l'integrale improprio su una semiretta positiva

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Essendo $2 > 1$, l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

non è convergente. Quindi l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

non è convergente. Quindi l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

non è convergente

Esercizio 5

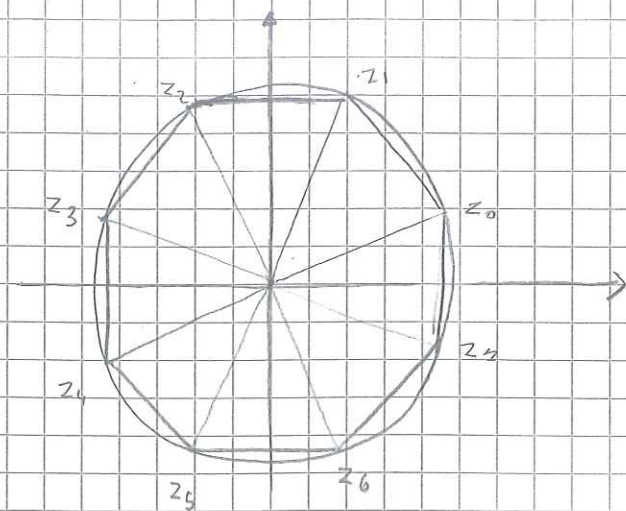
Si ha $|-256| = 256$ e $\pi \in \arg(256)$

Le soluzioni sono quindi:

$$z_k = \sqrt[8]{256} \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + k \frac{2\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + k \frac{2\pi}{8}\right) \right) =$$

$$= 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$



für $h \in$

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= 2 \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} \right) = 2 \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \right)$$

$$= 2 \left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \right) = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \left(\frac{3}{8} \pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{8} \pi \right) \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) =$$

$$= 2 \left(\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right) =$$

$$2 \left(\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} \right) = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$z_2 = -\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$z_3 = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$z_4 = -\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$z_5 = -\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$z_6 = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$z_7 = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Esercizio 6

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{cioè tali che}$$

$$(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Si ha quindi

$$\text{dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}; (\forall k \in \mathbb{Z}) x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\} =$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right[$$

b) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos \cos \lg(2x) (-\sin \lg(2x)) (1 + \lg^2(2x)) \cdot 2 = \\ &= -2 \cos \cos \lg(2x) \cdot \sin \lg(2x) \cdot (1 + \lg^2(2x)) \end{aligned}$$

Esercizio 7

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+3n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log \frac{n^2-1}{n^2+3n}}$$

Sicché

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{n^2-1}{n^2+3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{n^2-1}{n^2+3n} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{-1-3n}{n^2+3n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{-1-3n}{n^2+3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{-3n}{n^2} = -3 \end{aligned}$$

Sicché quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log \frac{n^2-1}{n^2+3n}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

Esercizio 8

Sicché

$$2x - \sin(2x) \sim \frac{1}{6} (2x)^3 = \frac{4}{3} x^3$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2} y + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} \right) y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{8} y^2 + o(y^2)$$

Quindi

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2} (2x) - \frac{1}{8} (2x)^2 + o(x^2) =$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+2x} - 1 = x - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$(\sqrt{1+2x} - 1) \log(1+x) = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{2}x^3 = x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

Per $y \rightarrow 0$ n'he

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \quad \text{Zun di}$$

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

$$(\sqrt{1+x} - 1) \log(1+2x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) (2x - 2x^2 + o(x^2)) =$$

$$= x^2 - x^3 + o(x^3) - \frac{1}{4}x^3 = x^2 - \frac{5}{4}x^3 + o(x^3)$$

$$(\sqrt{1+2x} - 1) \log(1+x) - (\sqrt{1+x} - 1) \log(1+2x) =$$

$$= x^2 - x^3 + o(x^3) - x^2 + \frac{5}{4}x^3 = \frac{1}{4}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{4}x^3$$

$$\frac{(\sqrt{1+2x} - 1) \log(1+x) - (\sqrt{1+x} - 1) \log(1+2x)}{2x - o_m(2x)} \sim$$

$$\frac{\frac{1}{4}x^3}{\frac{4}{3}x^3} = \frac{3}{16}$$

Zun di n'he

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x} - 1) \log(1+x) - (\sqrt{1+x} - 1) \log(1+2x)}{2x - o_m(2x)} = \frac{3}{16}$$

Esercizio 9

Si ha

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x \log \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) dx &= \int_0^1 x \log \frac{x+2}{x+1} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log \left(\frac{x+2}{x+1} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \frac{x+1}{x+2} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+2}{x+1} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)(x+1)} dx
 \end{aligned}$$

Si ha

$$(x+2)(x+1) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

Eseguendo la divisione $x^2 : (x^2 + 3x + 2)$ si trova
il quoziente $Q(x) = 1$ e resto $R(x) = -3x - 2$

Si ha quindi:

$$x^2 = (x^2 + 3x + 2) - 3x - 2$$

Quindi:

$$\frac{x^2}{x^2 + 3x + 2} = 1 - \frac{3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

Entonces $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{3x+2}{x^2+3x+2} = \frac{3x+2}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

Si ha quindi:

$$3x + 2 = A(x+2) + B(x+1)$$

Per $x = -1$, nhe $-1 = A$, cioè $A = -1$

Per $x = -2$ nhe $-4 = -B$, cioè $B = 4$

Si ha quindi:

$$\frac{3x+2}{x^2+3x+2} = \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

Si ha quindi:

$$\frac{x^2}{(x+1)(x+2)} = 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+2}$$

L'espressione sopra è quindi uguale a

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+2}{x+1} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+2} \right) dx = \\ & = \left[\frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \log(x+1) - 2 \log(x+2) \right]_0^1 = \\ & = \frac{1}{2} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2 - 2 \log 3 + 2 \log 2 = \\ & = \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2 - 2 \log 3 + 2 \log 2 = \\ & = 2 \log 2 - \frac{3}{2} \log 3 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 10

Ponendo $\log x = t$, nhe

$$\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{1+\log x}}{x \log x} dx = \int_e^{e^3} \frac{\sqrt{1+\log x}}{\log x} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \int_1^3 \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt$$

Poniamo $\sqrt{1+t} = u$; si ha $1+t = u^2$; quindi
 $t = u^2 - 1$; quindi $\frac{dt}{du} = 2u$.

Per $t=1$, si ha $u = \sqrt{2}$; per $t=3$, si ha $u = 2$

Si ha quindi

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u}{u^2-1} \cdot 2u du =$$

$$= 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u^2}{u^2-1} du = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u^2-1+1}{u^2-1} du =$$

$$= 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du$$

$$\text{Si ha } u^2-1 = (u-1)(u+1)$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

Si ha

$$1 = A(u+1) + B(u-1)$$

Per $u=1$ si ha $1 = 2A$; quindi $A = \frac{1}{2}$.

Per $u=-1$ si ha $1 = B(-2)$; quindi $B = -\frac{1}{2}$.

Bitte quader!

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u+1}$$

Bitte quader!

$$2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u+1} \right) du =$$

$$= 2 \left[u + \frac{1}{2} \log(u-1) - \frac{1}{2} \log(u+1) \right]_{\sqrt{2}}^2 =$$

$$= 2 \left[u + \frac{1}{2} \log \frac{u-1}{u+1} \right]_{\sqrt{2}}^2 =$$

$$2 \left(2 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{3} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) =$$

$$4 - \log 3 - 2\sqrt{2} - \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$