

Analisi Matematica 1 - 10/6/14 - Compito 4 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - x^2)e^{2x+1},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\ddagger)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.62$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.62$, $f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \approx -0.17$, $f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) \approx 5.78$, $\frac{-2-\sqrt{6}}{2} \approx -2.22$, $\frac{-2+\sqrt{6}}{2} \approx 0.22$, $f(\frac{-2-\sqrt{6}}{2}) \approx -0.13$, $f(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}) \approx 4.05$, $e \approx 2.72$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - \sin n}{n^2 + 1} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3n}{3^n + 2} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 + 10z + 2i = 0 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

(a) (p. 1) determinare il dominio naturale di f ;

(b) (p. 1) calcolare la derivata di f in un punto generico $x \neq 0$ del dominio;

(c) (p. 2) studiare la derivabilità di f in 0.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + \sin x^2 + \sqrt{x} + 1}{\log x^2 + x^2 + 1 - \cos x + e^{-x}}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cos x - \operatorname{sh}(2x) - 2 \log(1 + x^3)}{(1 - \cos(2x)) \operatorname{Arctg}(2x)}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x^2 \sin(5x + 1) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x \cos x|}{\sin x + 2} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 10/6/14 - Compito 4 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-2x+1},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$, $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \approx -5.78$, $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \approx 0.17$, $\frac{2-\sqrt{6}}{2} \approx -0.22$, $\frac{2+\sqrt{6}}{2} \approx 2.22$, $f(\frac{2-\sqrt{6}}{2}) \approx -4.05$, $f(\frac{2+\sqrt{6}}{2}) \approx 0.13$, $e \approx 2.72$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 + \sin n} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 + 5}{n5^n + 7} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2 - 6x + 5} dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 - 5z + i = 0 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{1-x^2}{x^2+1};$$

(a) (p. 1) determinare il dominio naturale di f ;

(b) (p. 1) calcolare la derivata di f in un punto generico $x \neq 0$ del dominio;

(c) (p. 2) studiare la derivabilità di f in 0.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^3 + x^2 - \sin x + 2^{-x}}{x\sqrt{x} + \sin^2 x + x - 2}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(3x) \operatorname{ch} x - \sin(3x) + 2 \operatorname{Arctg} x^3}{\log(1+2x)(\operatorname{ch} x - 1)}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x^2 \cos(3x + 2) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x \cos x|}{\cos x + 2} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.