

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - x^2)e^{2x+1},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.62$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.62$, $f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \approx -0.17$, $f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) \approx 5.78$, $\frac{-2-\sqrt{6}}{2} \approx -2.22$, $\frac{-2+\sqrt{6}}{2} \approx 0.22$, $f(\frac{-2-\sqrt{6}}{2}) \approx -0.13$, $f(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}) \approx 4.05$, $e \approx 2.72$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - \sin n}{n^2 + 1} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3n}{3^n + 2} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 + 10z + 2i = 0 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

- (a) (p. 1) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) (p. 1) calcolare la derivata di f in un punto generico $x \neq 0$ del dominio;
- (c) (p. 2) studiare la derivabilità di f in 0.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + \sin x^2 + \sqrt{x} + 1}{\log x^2 + x^2 + 1 - \cos x + e^{-x}}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cos x - \operatorname{sh}(2x) - 2 \log(1 + x^3)}{(1 - \cos(2x)) \operatorname{Arctg}(2x)}.$$

Svolgimento e risposta.

4
9. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x^2 \sin(5x + 1) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x \cos x|}{\sin x + 2} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

c) Si $x \in \mathbb{R}$; si ha

$$f'(x) = -2x e^{2x+1} + (1-x^2) e^{2x+1} \cdot 2 = \\ = 2e^{2x+1} (-x + 1 - x^2) = -2e^{2x+1} (x^2 + x - 1)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 + x - 1 = 0$, cioè
se e solo se $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ o $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Quindi f è strettamente crescente su
 $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right]$, strettamente decrescente
su $\left] -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right]$ e su $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$

Si ha quindi

$$m(\nearrow) = \left\{ \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right] \right\}, \quad m(\rightarrow) = \emptyset$$

$$m(\searrow) = \left\{ \left] -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right], \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right[\right\}$$

d) Si $x \in \mathbb{R}$; si ha

$$f''(x) = -2 \left((2x+1) e^{2x+1} + (x^2 + x - 1) e^{2x+1} \cdot 2 \right)$$

$$= -2e^{2x+1} (2x+1 + 2x^2 + 2x - 2) = -2e^{2x+1} (2x^2 + 4x - 1)$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $2x^2 + 4x - 1 = 0$, cioè se
e solo se $x = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $\frac{-2 - \sqrt{6}}{2} < x < \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}$

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x < \frac{-2 - \sqrt{6}}{2}$ o $x > \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}$.

Quindi f è strettamente convessa su

$$\left[\frac{-2 - \sqrt{6}}{2}, \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \right], \text{ strettamente concava}$$

$$\text{su }] -\infty, \frac{-2 - \sqrt{6}}{2}] \text{ e su } \left[\frac{-2 + \sqrt{6}}{2}, +\infty \right[$$

Si ha quindi:

$$e(\uparrow) = \left\{ \left[\frac{-2 - \sqrt{6}}{2}, \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \right] \right\}, \quad e(\downarrow) = \emptyset$$

$$e(\downarrow) = \left\{] -\infty, \frac{-2 - \sqrt{6}}{2}], \left[\frac{-2 + \sqrt{6}}{2}, +\infty \right[\right\}$$

Si ha

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1.62, \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.62$$

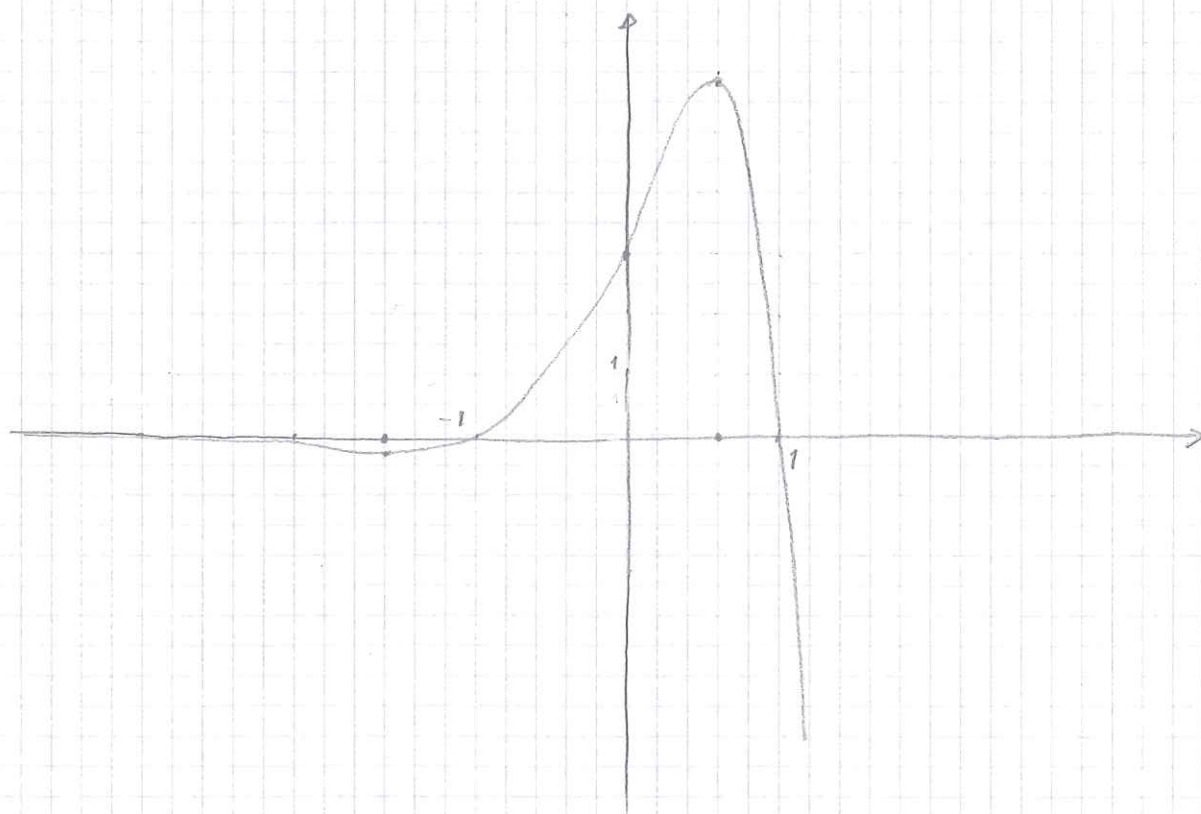
$$f\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{e^{-\sqrt{5}}}{2} (1 + \sqrt{5}) \approx -0.17$$

$$f\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{e^{\sqrt{5}}}{2} (\sqrt{5} - 1) \approx 5.78$$

$$\frac{-2 - \sqrt{6}}{2} \approx -2.22, \quad \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \approx 0.22$$

$$f\left(\frac{-2 - \sqrt{6}}{2}\right) = -e^{-1 - \sqrt{6}} \left(\frac{3}{2} + \sqrt{6}\right) \approx -0.13$$

$$f\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right) = e^{-1+\sqrt{6}} \left(\sqrt{6} - \frac{3}{2}\right) \approx 4.05, \quad f(0) = e \approx 2.72$$



Esercizio 2

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sin n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

Quindi la serie non è convergente

La serie è a termini positivi.

Quindi la serie è divergente positivamente

Esercizio 3

Se $z \in \mathbb{C}$. Si ha

$$\left| \frac{2^n + 3^n}{3^n + 2} z^n \right| \sim \frac{2^n}{3^n} |z|^n = \left(\frac{2}{3} |z| \right)^n$$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 2} z^n$ è assolutamente convergente se e solo se

$$\frac{2}{3} |z| < 1, \text{ cioè se e solo se } |z| < \frac{3}{2}$$

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $\frac{3}{2}$.

Per $|z| = \frac{3}{2}$ si ha

$$\left| \frac{2^n + 3^n}{3^n + 2} z^n \right| \sim \left(\frac{2}{3} |z| \right)^n = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right)^n = 1$$

Quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n + 3^n}{3^n + 2} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Quindi la serie di potenze non è convergente in z

Esercizio 4

Si ha $x^2 - 5x + 6 = 0$ se e solo se $x = 2$ o $x = 3$

Si tratta quindi dell'integrale improprio su un intervallo privato di punti della funzione

$$f: [0, 4] - \{2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 6}$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-3x+6} dx, \quad \int_2^3 \frac{1}{x^2-3x+6} dx, \quad \int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+6} dx$$

Consideriamo l'integrale improprio

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-3x+6} dx$$

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra della funzione

$$g: [0, 2[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+6}$$

Si ha

$$\frac{1}{x^2-3x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} \underset{x \rightarrow 2}{\sim} -\frac{1}{x-2}$$

quindi l'integrale improprio $\int_0^2 \frac{1}{x^2-3x+6} dx$

non è convergente; quindi l'integrale improprio assegnato non è convergente

Esercizio 5

Si Δ il discriminante del polinomio complesso

$$z^2 + 10z + 2i$$

Si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 25 - 2i$$

Risolvo l'equazione complessa

$$w^2 = 25 - 2i$$

$$\text{Sicché } |25 - 2i| = \sqrt{625 + 4} = \sqrt{629} \quad e$$

$$- \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{629}} \in \arg(25 - 2i)$$

Sicché quindi:

$$\begin{aligned} W &= \pm \sqrt[4]{\sqrt{629}} \left(\cos\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{629}}\right) + i \sin\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{629}}\right) \right) = \\ &= \pm \sqrt[4]{629} \left(\cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{629}}\right) - i \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{629}}\right) \right) = \\ &= \pm \sqrt[4]{629} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{629}}}{2}} - i \sqrt{\frac{1 - \cos \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{629}}}{2}} \right) = \\ &= \pm \sqrt[4]{629} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{25}{\sqrt{629}}}{2}} - i \sqrt{\frac{1 - \frac{25}{\sqrt{629}}}{2}} \right) = \\ &= \pm \sqrt[4]{629} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{629} + 25}{2\sqrt{629}}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{629} - 25}{2\sqrt{629}}} \right) = \\ &= \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{629} + 25}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{629} - 25}{2}} \right) \end{aligned}$$

Sicché quindi:

$$Z = -5 \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{629} + 25}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{629} - 25}{2}} \right)$$

Quindi le soluzioni sono

$$Z_1 = -5 + \sqrt{\frac{\sqrt{629} + 25}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{629} - 25}{2}}$$

e

$$Z_2 = -5 - \sqrt{\frac{\sqrt{629} + 25}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{629} - 25}{2}}$$

Esercizio 6

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$-1 \leq \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 1, \text{ cioè tali che}$$

$$\begin{cases} -x^2-1 \leq x^2-1 \\ x^2-1 \leq x^2+1 \end{cases}, \text{ cioè tali che} \quad \begin{cases} -x^2 \leq x^2 \\ -1 \leq 1 \end{cases}, \text{ cioè}$$

tali che $-1 \leq 1$; e che quindi $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Si ha $\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$ se e solo se $x^2-1 = x^2+1$, cioè

se e solo se $-1 = 1$; quindi mai

Si ha $\frac{x^2-1}{x^2+1} = -1$ se e solo se $x^2-1 = -x^2-1$; cioè

se e solo se $x^2 = -x^2$, cioè se e solo se $2x^2 = 0$, cioè

se e solo se $x = 0$.

Per $x \neq 0$ f è derivabile in x e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+2x^2+1 - (x^4-2x^2+1)}} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{4x^2} (x^2+1)} = \frac{4x}{2|x| (x^2+1)} = \frac{2x}{x \operatorname{sgn} x (x^2+1)} =$$

$$= \frac{2}{\operatorname{sgn} x (x^2+1)} = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1}$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} \frac{2}{x^2+1} = 2$$

Quindi f è derivabile da destra in 0 e si ha

$$f'_+(0) = 2$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x < 0}} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x < 0}} - \frac{2}{x^2+1} = -2$$

Quindi f è derivabile da sinistra in 0 e si ha

$$f'_-(0) = -2$$

Essendo $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, f non è derivabile in 0

Quindi l'insieme dei punti dove f è derivabile è $\mathbb{R}^*$

Esercizio 7

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + \sin x^2 + \sqrt{x} + 1}{\log x^2 + x^2 - \cos x + e^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 8

Si ha

$$(1 - \cos(2x)) \operatorname{Arctg}(2x) \sim \frac{1}{2} (2x)^2 \cdot 2x = 4x^3$$

Per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\sin y = y - \frac{1}{6} y^3 + o(y^3)$$

quindi

$$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{6} (2x)^3 + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \sin(2x) \cos x &= \left(2x - \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)\right) = \\ &= 2x - x^3 + o(x^3) - \frac{4}{3} x^3 = 2x - \frac{7}{3} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Per $y \rightarrow 0$ vale

$$\sinh y = y + \frac{1}{6} y^3 + o(y^3)$$

quindi

$$\sinh(2x) = 2x + \frac{1}{6} (2x)^3 + o(x^3) = 2x + \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)$$

Per $y \rightarrow 0$ vale

$$\log(1+y) = y + o(y)$$

quindi

$$\log(1+x^3) = x^3 + o(x^3)$$

$$2 \log(1+x^3) = 2x^3 + o(x^3)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sin(2x) \cos x - \sinh(2x) - 2 \log(1+x^3) &= \\ &= 2x - \frac{7}{3} x^3 + o(x^3) - 2x - \frac{4}{3} x^3 - 2x^3 = -\frac{17}{3} x^3 + o(x^3) \sim \end{aligned}$$

$$-\frac{17}{3} x^3$$

$$\frac{\sin(2x) \cos x - \sinh(2x) - 2 \log(1+x^3)}{(1 - \cos(2x)) \operatorname{Arctg}(2x)} \sim \frac{-\frac{17}{3} x^3}{4x^3} = -\frac{17}{12}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cos x - \ln(2x) - 2 \log(1+x^3)}{(1 - \cos(2x)) \operatorname{Arctg}(2x)} = -\frac{17}{12}$$

Exercício 9

Solha

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sin(5x+1) dx &= \\ \left[-\frac{1}{5} \cos(5x+1) \cdot x^2 \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{5} \cos(5x+1) 2x dx &= \\ = \left[-\frac{1}{5} x^2 \cos(5x+1) \right]_0^1 + \frac{2}{5} \int_0^1 x \cos(5x+1) dx &= \\ = \left[-\frac{1}{5} x^2 \cos(5x+1) \right]_0^1 + \frac{2}{5} \left(\left[\frac{1}{5} \sin(5x+1) \cdot x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{5} \sin(5x+1) dx \right) &= \\ = \left[-\frac{1}{5} x^2 \cos(5x+1) + \frac{2}{25} x \sin(5x+1) \right]_0^1 - \frac{2}{25} \int_0^1 \sin(5x+1) dx &= \\ = \left[-\frac{1}{5} x^2 \cos(5x+1) + \frac{2}{25} x \sin(5x+1) + \frac{2}{125} \cos(5x+1) \right]_0^1 &= \\ = -\frac{1}{5} \cos 6 + \frac{2}{25} \sin 6 + \frac{2}{125} \cos 6 - \frac{2}{125} \cos 1 &= \\ = -\frac{23}{125} \cos 6 + \frac{2}{25} \sin 6 - \frac{2}{125} \cos 1 \end{aligned}$$

Exercício 10

Solha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+2x+2} dx &= \int_0^1 \frac{x^2+2x+2-2x-2}{x^2+2x+2} dx = \\ \int_0^1 \left(1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2} \right) dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+2x+2} (2x+2) \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \left[x - \log (x^2 + 2x + 2) \right]_0^1 = 1 - \log 5 + \log 2 =$$

$$= 1 + \log \frac{2}{5}$$

Exercise 11

So here

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x \cos x|}{\sin x + 2} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{|\sin x \cos x|}{\sin x + 2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x \cos x|}{\sin x + 2} dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 - \frac{\sin x \cos x}{\sin x + 2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\sin x + 2} dx =$$

$$= - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin x}{\sin x + 2} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + 2} \cos x dx =$$

$$= - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{y}{y + 2} dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y}{y + 2} dy =$$

$$= - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{y + 2 - 2}{y + 2} dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y + 2 - 2}{y + 2} dy =$$

$$= - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \left(1 - \frac{2}{y + 2} \right) dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1 - \frac{2}{y + 2} \right) dy =$$

$$= - \left[y - 2 \log |y+2| \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 + \left[y - 2 \log |y+2| \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= - \left(-2 \log 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \log \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \log \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2 \log 2 =$$

$$2 \log 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \log \frac{4 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \log \frac{4 + \sqrt{2}}{2} + 2 \log 2 =$$

$$= 4 \log 2 - 2 \log (4 - \sqrt{2}) + 2 \log 2 - 2 \log (4 + \sqrt{2}) + 2 \log 2 =$$

$$= 8 \log 2 - 2 \log 14 = 8 \log 2 - 2 \log 2 - 2 \log 7 =$$

$$= 6 \log 2 - 2 \log 7 = \log \frac{64}{49}$$