

Analisi Matematica 1 - 25/6/14 - Compito 5

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 5) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x^2},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (non assegnata) provare che esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$ tali che $\alpha_1 < -1 < \alpha_2 < 0 < \frac{1}{2} < \alpha_3$ e tali che $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \alpha_1$ o $x = \alpha_2$ o $x = \alpha_3$; studiare la convessità di f determinando in funzione di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\ddagger)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{1}{e} \approx 0.37$, $\frac{2}{e^{\frac{1}{4}}} \approx 1.56$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{n!} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{5^n + n^2} z^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{x}{x-2} > |x-1| .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$(z^3 - 27i)(z^2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 0 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = e^{\sin^2 \log x - \cos^2 \log x} ;$$

(a) determinare il dominio naturale di f ;

(b) calcolare la derivata di f in un punto generico del dominio.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare, in funzione di α , il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x(e^x - 1) - 2 \operatorname{Arctg} x^2 - x^3}{x^\alpha} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^4 - x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 1} - x} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 2} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare, di $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$ e di altre funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.