

Analisi Matematica 1 - 25/6/14 - Compito 5

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 5) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x^2},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (non assegnata) provare che esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$ tali che $\alpha_1 < -1 < \alpha_2 < 0 < \frac{1}{2} < \alpha_3$ e tali che $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \alpha_1$ o $x = \alpha_2$ o $x = \alpha_3$; studiare la convessità di f determinando in funzione di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\nabla)$.

Suggerimento. Si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $\frac{1}{e} \approx 0.37$, $\frac{2}{e^4} \approx 1.56$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{n!}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{5^n + n^2} z^n.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{x}{x-2} > |x-1|.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$(z^3 - 27i)(z^2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 0.$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = e^{\sin^2 \log x - \cos^2 \log x} ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto generico del dominio.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare, in funzione di α , il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x(e^x - 1) - 2 \operatorname{Arctg} x^2 - x^3}{x^\alpha} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^4 - x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 1} - x} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 2} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare, di $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$ e di altre funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

b) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x e^{-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Si ha } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y \left(\frac{1}{e}\right)^y = 0$$

Analogamente si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

c) Si è $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-x^2} + (2x+1)e^{-x^2}(-2x) = \\ &= 2e^{-x^2}(1 - 2x^2 - x) = -2e^{-x^2}(2x^2 + x - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Si ha } f'(x) = 0 \text{ se e solo se } 2x^2 + x - 1 = 0,$$

$$\text{cioè se e solo se } x = -1 \text{ o } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si ha } f'(x) > 0 \text{ se e solo se } 2x^2 + x - 1 < 0, \text{ cioè}$$

$$\text{se e solo se } -1 < x < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Si ha } f'(x) < 0 \text{ se e solo se } x < -1 \text{ o } > \frac{1}{2}$$

Quindi f è strettamente crescente su $[-1, \frac{1}{2}]$.

strettamente decrescente su $]-\infty, -1]$ e su

$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Si ha quindi:

$$m(\nearrow) = \left\{ \left[-1, \frac{1}{2}\right] \right\}, \quad m(\rightarrow) = \emptyset$$

$$m(\searrow) = \left\{]-\infty, -1], \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right\}$$

d) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f''(x) = -2 \left((4x+1) e^{-x^2} + (2x^2+x-1) e^{-x^2} (-2x) \right) =$$

$$= -2 e^{-x^2} (4x+1 - 4x^3 - 2x^2 + 2x) =$$

$$= 2 e^{x^2} (4x^3 + 2x^2 - 6x - 1)$$

Si ha

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4x^3 + 2x^2 - 6x - 1$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$g'(x) = 12x^2 + 4x - 6 = 2(6x^2 + 2x - 3)$$

Si ha

$$g'(x) = 0 \text{ se e solo se } 6x^2 + 2x - 3 = 0, \text{ cioè se e solo se}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{6}$$

$$\text{Si ha } g'(x) > 0 \text{ se e solo se } x < \frac{-1 - \sqrt{19}}{6} \text{ o } x > \frac{-1 + \sqrt{19}}{6}.$$

$$\text{Si ha } g'(x) < 0 \text{ se e solo se } \frac{-1 - \sqrt{19}}{6} < x < \frac{-1 + \sqrt{19}}{6}$$

Quindi g è strettamente crescente su

$] -\infty, \frac{-1-\sqrt{19}}{6}]$ e su $[\frac{-1+\sqrt{19}}{6}, +\infty[$, strettamente
decrecente su $[\frac{-1-\sqrt{19}}{6}, \frac{-1+\sqrt{19}}{6}]$

Si ha $\frac{-1-\sqrt{19}}{6} < 0$ e

$$g\left(\frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right) = \frac{1+19\sqrt{19}}{27} > 0.$$

Si ha $\frac{-1+\sqrt{19}}{6} > 0$ e

$$g\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right) = \frac{1-19\sqrt{19}}{6} < 0$$

Essendo g strettamente crescente su $] -\infty, \frac{-1-\sqrt{19}}{6}]$
esiste uno ed uno solo $\alpha_1 \in] -\infty, \frac{-1-\sqrt{19}}{6}[$ tale
che $g(\alpha_1) = 0$

Essendo g strettamente decrecente su

$[\frac{-1-\sqrt{19}}{6}, \frac{-1+\sqrt{19}}{6}]$ esiste uno ed uno solo

$\alpha_2 \in] \frac{-1-\sqrt{19}}{6}, \frac{-1+\sqrt{19}}{6}[$ tale che $g(\alpha_2) = 0$

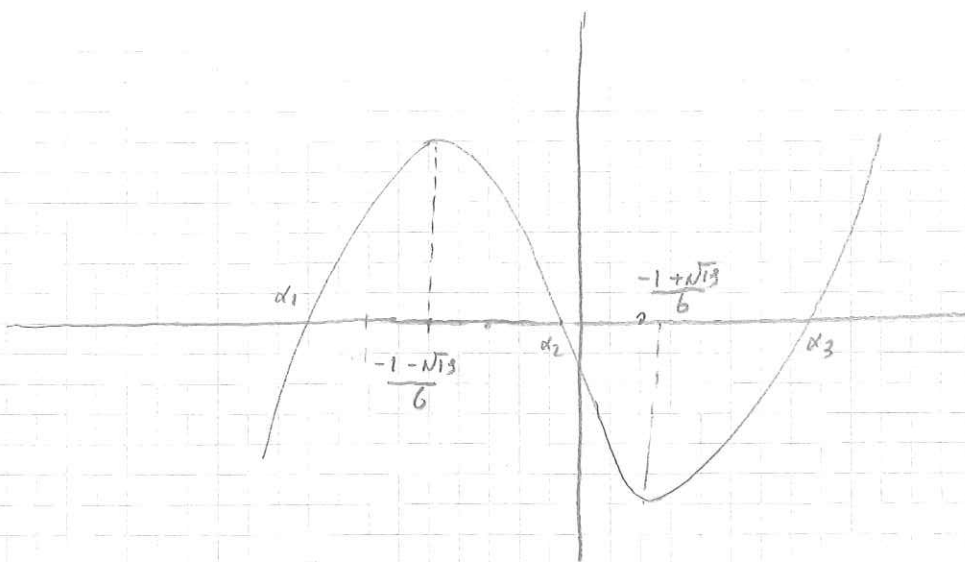
Essendo g strettamente crescente su $[\frac{-1+\sqrt{19}}{6}, +\infty[$

esiste uno ed uno solo $\alpha_3 \in [\frac{-1+\sqrt{19}}{6}, +\infty[$

tale che $g(\alpha_3) = 0$

Si ha $g(x) = 0$ se e solo se $x = \alpha_1$ o $x = \alpha_2$ o
 $x = \alpha_3$.

Si ha quindi $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \alpha_1$ o
 $x = \alpha_2$ o $x = \alpha_3$



Si ha $-1 < \frac{-1 - \sqrt{19}}{6}$ e $g(-1) = 3 > 0$; quindi si ha

$$\alpha_1 < -1;$$

Si ha $\frac{-1 - \sqrt{19}}{6} < 0 < \frac{-1 + \sqrt{19}}{6}$ e $f(0) = -1 < 0$;

quindi si ha $\frac{-1 - \sqrt{19}}{6} < \alpha_2 < 0$;

Si ha $\frac{1}{2} < \frac{-1 + \sqrt{19}}{6}$; quindi $\alpha_3 > \frac{1}{2}$

Si ha quindi $\alpha_3 < -1 < \alpha_2 < 0 < \frac{1}{2} < \alpha_3$.

Si ha $g(x) > 0$ se e solo se $\alpha_1 < x < \alpha_2$ o $x > \alpha_3$

e $g(x) < 0$ se e solo se $x < \alpha_1$ o $\alpha_2 < x < \alpha_3$

Si ha quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $\alpha_1 < x < \alpha_2$

o $x > \alpha_3$ e $f''(x) < 0$ se e solo se $x < \alpha_1$ o $\alpha_2 < x < \alpha_3$

quindi f è strettamente convessa su

$[\alpha_1, \alpha_2]$ e su $[\alpha_3, +\infty[$, f è

strettamente concava su $] -\infty, \alpha_1]$ e

su $[\alpha_2, \alpha_3]$.

Si ha quindi

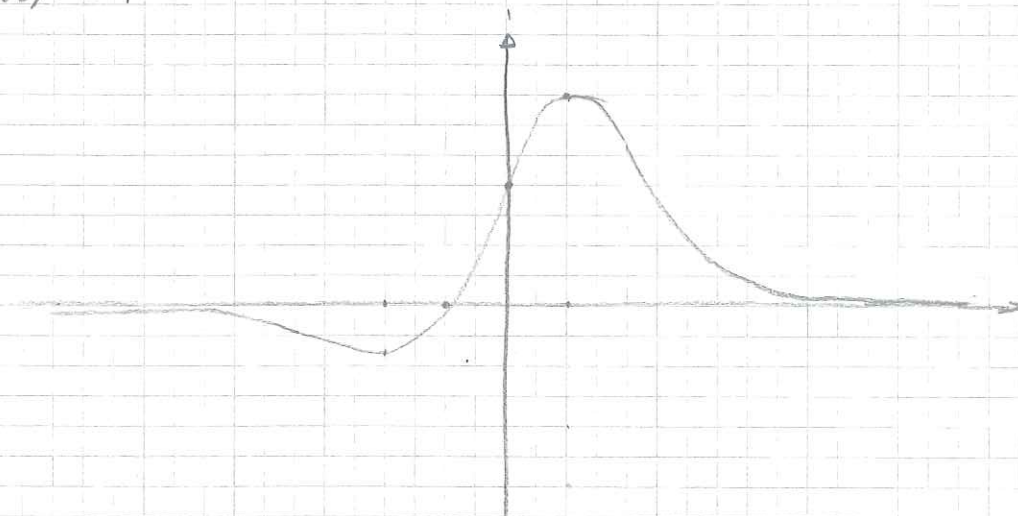
$$C(\uparrow) = \{ [\alpha_1, \alpha_2], [\alpha_3, +\infty[\}, \quad C(\downarrow) = \emptyset$$

$$C(\downarrow) = \{]-\infty, \alpha_1], [\alpha_2, \alpha_3] \}$$

Si ha

$$f(-1) = -\frac{1}{e} \approx -0,37, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e^{1/4}} \approx 1,56$$

$$f(0) = 1$$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{2^{n+n}}{n!} \sim \frac{2^n}{n!}$$

quindi la serie è convergente

Esercizio 4

La disuguaglianza è osservata per $x \neq 2$

Supponiamo $x \neq 2$

La disuguaglianza è equivalente a

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-1| \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-1| \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

le système

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-1| \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$$

est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > x-1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{x}{x-2} - x + 1 > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{x - x^2 + 3x - 2}{x-2} > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x - x^2 + 3x - 2}{x-2} > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{-x^2 + 4x - 2}{x-2} > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 2}{x-2} < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 2}{x-2} < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x < 2 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad 2 < x < 2 + \sqrt{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{soit } 2 < x < 2 + \sqrt{2}$$

le système

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-1| \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > -x+1 \\ x < 1 \end{cases}$$

cioè a

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} + x - 1 > 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

cioè a $\begin{cases} \frac{x + x^2 - 3x + 2}{x-2} > 0 \\ x < 1 \end{cases}$

, cioè a $\begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-2} > 0 \\ x < 1 \end{cases}$

Il polinomio $x^2 - 2x + 2$ ha discriminante Δ tale che $\frac{\Delta}{4} = 1 - 2 = -1 < 0$; quindi si ha $x^2 - 2x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Il sistema sopra è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}$$

Tale sistema non ha soluzioni.

Il sistema seguente è quindi equivalente a

$$2 < x < 2 + \sqrt{2}$$

Esercizio 3

Sia $z \in \mathbb{C}$, si ha

$$\left| \frac{2^{n+n}}{5^{n+n^2}} z^n \right| \sim \left| \frac{2^n}{5^n} z^n \right| = \left(\frac{2}{5} |z| \right)^n$$

La serie di potenze è quindi assolutamente convergente in z se e solo se

$$\frac{2}{5} |z| < 1, \text{ cioè se e solo se } |z| < \frac{5}{2}$$

La serie di potenze ha quindi raggio di

convergenza $\frac{5}{2}$

Per $|z| = \frac{5}{2}$ nhe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{5^{n+1}} z^{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n+1}} \left(\frac{5}{2} \right)^{n+1} = 1$$

quindi la serie di potenze non è convergente in z

Esercizio 5

Si $z \in \mathbb{C}$; nhe

$$(z^3 - 27i)(z^2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 0$$

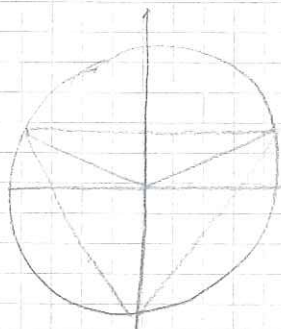
se e solo se

$$z^3 - 27i = 0 \quad \text{o} \quad z^2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$$

Si che

$$z^3 - 27i = 0 \quad \text{se e solo se} \quad z^3 = 27i$$

$$\text{Si che } |27i| = 27 \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} \in \arg(27i)$$



Si che

$$z_k = 3 \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) =$$

$$= 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + k \frac{2}{3} \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \right)$$

per $k = 0, 1, 2$. Si che quindi

$$z_0 = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i$$

$$z_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = -3i$$

Si ha $z^2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$ se e solo se $z^2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

Si ha $|\sqrt{2} + \sqrt{2}i| = \sqrt{4} = 2$ e $\frac{\pi}{4} \in \arg(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$

Si ha quindi:

$$z = \pm \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = \pm \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= \pm \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} \right) =$$

$$= \pm \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \right) =$$

$$= \pm \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \right) =$$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \right)$$

Esercizio 6

a) Si ha $\text{dom}(f) =]0, +\infty[$

b) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$f'(x) = e^{\sin^2 \log x - \cos^2 \log x} \left(2 \sin \log x \cos \log x \frac{1}{x} - 2 \cos \log x (-\sin \log x) \frac{1}{x} \right) =$$

$$= 4 \frac{1}{x} e^{\sin^2 \log x - \cos^2 \log x} \sin \log x \cos \log x$$

Esercizio 7

Si ha:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$e^x - 1 = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$2x(e^x - 1) = 2x^2 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\operatorname{Arctg} y = y + o(y^2);$$

quindi

$$\operatorname{Arctg} x^2 = x^2 + o(x^4); \text{ quindi } 2 \operatorname{Arctg} x^2 = 2x^2 + o(x^4)$$

Si ha quindi

$$2x(e^x - 1) - 2 \operatorname{Arctg} x^2 - x^3 =$$

$$= 2x^2 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - 2x^2 - x^3 = \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{3}x^4$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x(e^x - 1) - 2 \operatorname{Arctg} x^2 - x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{3} x^{4-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{per } \alpha = 4 \\ 0 & \text{per } \alpha < 4 \\ +\infty & \text{per } \alpha > 4 \end{cases}$$

Il limite è quindi $\frac{1}{3}$ per $\alpha = 4$, 0 per $\alpha < 4$,

$+\infty$ per $\alpha > 4$

Esercizio 8

Si ha

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \sim x \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x}$$

$$\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^4 - x^2 + 2} = x \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}} \right)$$

Per $y \rightarrow 0$ in h_1

$$\sqrt[4]{1+y} = 1 + \frac{1}{4}y + o(y)$$

Zunächst

$$\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6}} = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6} \right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2

$$\sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^6}} = 1 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^6} \right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Zunächst

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6}} - \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^6}} &= 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Zunächst in h_2

$$x \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6}} - \sqrt[4]{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{x^6}} \right) \sim x \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x}$$

Zunächst

$$\frac{\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^4 - x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \sim \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{x}}{\frac{1}{2} \frac{1}{x}} = 1$$

Zunächst in h_2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^4 - x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 1$$

Esercizio 9

Si ha

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx &= \int_1^2 x \log \frac{x+1}{x} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+1}{x} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{x}{x+1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+1}{x} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx = \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+1}{x} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+1}{x} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+1}{x} + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \log(1+x) \right]_1^2 = \\
 &= 2 \log \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2 = 2 \log 3 - 2 \log 2 - \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{3}{2} \log 3 - 2 \log 2 + \frac{1}{2} = \log \frac{\sqrt{27}}{4} + \frac{1}{2} = \log \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Esercizio 10

Eseguendo la divisione $(x^2 - 1) : (x^2 + 2x + 2)$ si trova

$$x^2 - 1 = 1(x^2 + 2x + 2) - 2x - 3$$

quindi

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 2} = 1 - \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2}$$

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2}\right) dx =$$

$$= \left[x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx =$$

$$\left[x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x+2+1}{x^2+2x+2} dx =$$

$$\left[x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2} dx =$$

$$= \left[x - \log(x^2+2x+2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1+1} dx =$$

$$= \left[x - \log(x^2+2x+2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2+1} dx =$$

$$= \left[x - \log(x^2+2x+2) - \operatorname{Arctg}(x+1) \right]_0^1 =$$

$$= 1 - \log 5 - \operatorname{Arctg} 2 + \log 2 + \operatorname{Arctg} 1 =$$

$$= 1 + \log \frac{2}{5} - \operatorname{Arctg} 2 + \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 11

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)}$$

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}}$$

Quindi l'integrale improprio è convergente

Si è $y \in]0, 1[$; si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx$$

Pericoloso $\int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}} dx$ poniamo $\sqrt{x} = t$.

Si ha $x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = y$ si ha $t = \sqrt{y}$; per

$x = 1$, si ha $t = 1$; si ha quindi

$$\int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}} dx = \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{t(t^2+2)} 2t dt = 2 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{t^2+2} dt =$$

$$\frac{2}{2} \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\frac{t^2}{2} + 1} dt = \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dt =$$

$$= \sqrt{2} \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \sqrt{2} \left[\operatorname{Arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \right]_{\sqrt{y}}^1 =$$

$$= \sqrt{2} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right)$$

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{2} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$$