

Analisi Matematica 1 - 14/7/14 - Compito 6

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 5) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - x + x^2)e^{-2x+3} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 2*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Suggerimento. Si può tenere conto della approssimazione $f(0) = e^3 \approx 20.09$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

Svolgimento e risposta.

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3n}{(n+1)^2 + 3} e^{\frac{1}{n}}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è definita ed è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x| + 1}{x^2} \right)^n;$$

per tali x , determinare la somma della serie.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^3 = -1 - 3i.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Argch}(\sqrt{x} + 1);$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \left(2 - \frac{3}{2}|x| \right)$$

(a) determinare il dominio naturale di f ;

(b) determinare la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(-1, f(-1))$.

Suggerimento. Si ricordi che l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione f in $(a, f(a))$ è $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia $a \in \mathbf{R}$; determinare a in modo che la funzione

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} a + ex & \text{per } x \leq -1 \\ (x+1)e^{|x|} & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

sia continua; per tale valore di a , determinare l'insieme degli $x \in \mathbf{R}$ tali che f derivabile in x .

Svolgimento e risposta.

8. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(2x) \cos x - 3 \operatorname{sh}(2x) + 11x \log(1+x^2)}{(x - \sin x)(1 - \cos x)}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \log(1+x^2) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive delle funzioni da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive delle funzioni da integrare.

Svolgimento e risposta.