Analisi Matematica 1 - 14/7/14 - Compito 6

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 5) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = (1 - x + x^2)e^{-2x+3} ,$$
rispondendo alle seguenti domande:
   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;
   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
   (c) (p. 2*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
   (d) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Suggerimento. Si può tenere conto della approssimazione $f(0) = e^3 \approx 20.09$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

   NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3n}{(n+1)^2 + 3} e^{\frac{1}{n}} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è definita ed è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|+1}{x^2} \right)^n ;$$

per tali x, determinare la somma della serie.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^3 = -1 - 3i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Argch}(\sqrt{x} + 1) ;$$

(a) determinare il dominio naturale di f;

(b) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;

(c) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(2 - \frac{3}{2}|x|\right)$$

(a) determinare il dominio naturale di f;

(b) determinare la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(-1, f(-1))$.

Suggerimento. Si ricordi che l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione f in $(a, f(a))$ è $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia $a \in \mathbf{R}$; determinare a in modo che la funzione

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} a + ex & \text{per } x \leq -1 \\ (x+1)e^{|x|} & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

sia continua; per tale valore di a, determinare l'insieme degli $x \in \mathbf{R}$ tali che f derivabile in x.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\sin(2x)\cos x - 3\,\mathrm{sh}(2x) + 11x\log(1 + x^2)}{(x - \sin x)(1 - \cos x)}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{0}^{1} \log(1+x^2)\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive delle funzioni da integrare e di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive delle funzioni da integrare.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x+x^2)e^{-2x+3} = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-2x+3} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x+x^2)e^{-2x+3} = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-2x+3} = +\infty$$

c) Per ogni $x\in\mathbb{R}$, si ha

$$f'(x) = (-1+2x)e^{-2x+3} + (1-x+x^2)e^{-2x+3}(-2) =$$
$$= e^{-2x+3}(-1+2x-2+2x-2x^2) = e^{-2x+3}(-2x^2+4x-3) =$$
$$= -e^{-2x+3}(2x^2-4x+3)$$

Il polinomio $2x^2-4x+3$ ha discriminante Δ tale che $\frac{\Delta}{4} = 2-6 = -4 < 0$. Si ha quindi $2x^2-4x+3>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

Si ha quindi $f'(x)<0 \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Quindi f è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \emptyset, \ \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset, \ \mathcal{M}(\searrow) = \{\mathbb{R}\}$$

d) Per ogni $x\in\mathbb{R}$ si ha

$$f''(x) = -\left((4x-4)e^{-2x+3} + (2x^2-4x+3)e^{-2x+3}(-2)\right) =$$
$$= -e^{-2x+3}(4x-4-4x^2+8x-6) = -e^{-2x+3}(-4x^2+12x-10) =$$
$$= 2e^{2x+3}(2x^2-6x+5)$$

Il polinomio $2x^2-6x+5$ ha discriminante Δ tale che $\frac{\Delta}{4} = 9-10 = -1 < 0$; si ha quindi $2x^2-6x+5>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$.

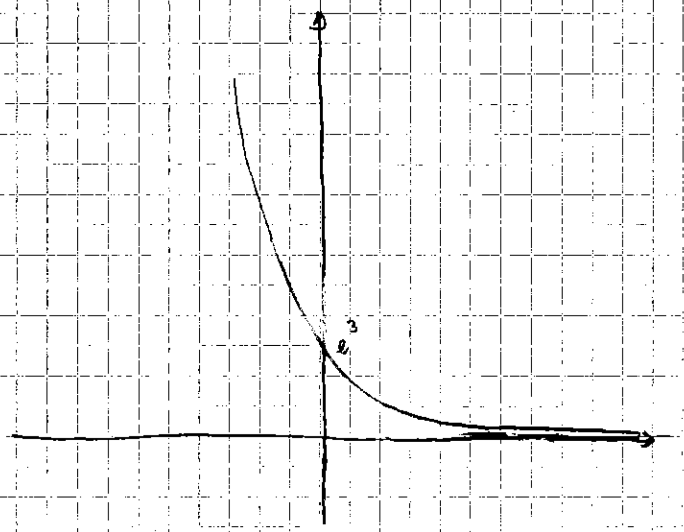
Si ha quindi $f''(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Quindi f è strettamente convessa su $\mathbb{R}$

Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{\mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset$$

Si ha $f(0) = e^3 \approx 20.09$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{(-1)^n + 3n}{(n+1)^2 + 3} e^{\frac{1}{n}} \sim \frac{3n}{(n+1)^2} \cdot 1 \sim \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}.$$

Quindi la serie è divergente positivamente

Esercizio 3

La serie è assegnata per $x \neq 0$

Supponiamo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

La serie è geometrica, di ragione $\frac{|x|+1}{x^2}$; la serie è quindi convergente se e solo se

$$-1 < \frac{|x|+1}{x^2} < 1.$$

Si ha

$$\frac{|x|+1}{x^2} > 0 > -1$$

Quindi la serie è convergente se e solo se

$\frac{|x|+1}{x^2} < 1$, cioè se e solo se

$$\begin{cases} \frac{|x|+1}{x^2} < 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} \frac{|x|+1}{x^2} < 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Si ha

$\begin{cases} \frac{|x|+1}{x^2} < 1 \\ x > 0 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} \frac{x+1}{x^2} < 1 \\ x > 0 \end{cases}$, cioè se e solo se

$\begin{cases} x+1 < x^2 \\ x > 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} x^2 - x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, cioè se e solo se

$\begin{cases} x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad o \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Si ha

$\begin{cases} \frac{|x|+1}{x^2} < 1 \\ x < 0 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} \frac{-x+1}{x^2} < 1 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè se e solo se

$\begin{cases} -x+1 < x^2 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} x^2 + x - 1 > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

cioè se e solo se

$\begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad o \quad x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x < 0 \end{cases}$, cioè se e solo se

$$x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Quindi l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^*$ per i quali la serie è convergente è

$$\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

Per tali x la somma della serie è

$$\frac{1}{1-\frac{|x|+1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-|x|-1}$$

Esercizio 4

Si ha

$$|-1-3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \quad e$$

$$\operatorname{Arctg}\frac{-3}{-1} + \pi = \operatorname{Arctg} 3 + \pi \in \arg(-1-3i)$$

Si ha quindi

$$z = \sqrt[3]{\sqrt{10}}\; e^{i\frac{\operatorname{Arctg}3+\pi+2k\pi}{3}} = \sqrt[6]{10}\; e^{i\frac{\operatorname{Arctg}3+(2k+1)\pi}{3}}$$

per un $k = 0, 1, 2$.

Esercizio 5

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}+1 \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè tali che } \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè tali che } x \geq 0$$

Si ha quindi $\operatorname{dom}(f) = [0, +\infty[$

b) Per ogni $x \in]0, +\infty[$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2-1}} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x\sqrt{x}}}$$

c) Si ha $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x\sqrt{x}}} = +\infty$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in 0 e $f'(0) = +\infty$

Esercizio 6

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$-1 \leq 2 - \frac{3}{2}|x| \leq 1$$

cioè tali che

$\begin{cases} -1 \leq 2 - \frac{3}{2}|x| \\ 2 - \frac{3}{2}|x| \leq 1 \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} \frac{3}{2}|x| \leq 3 \\ \frac{3}{2}|x| \geq 1 \end{cases}$, cioè tali che

$\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x| \geq \frac{2}{3} \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \leq -\frac{2}{3} \text{ o } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$

cioè tali che $-2 \leq x \leq -\frac{2}{3}$ o $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

Si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f) = \left[-2, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 2\right]$$

b) Si ha

$$f(-1) = \mathrm{Arcsin}\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \mathrm{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Per $x \in \left]-\frac{2}{3}, -2\right[$ si ha

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(2 + \frac{3}{2}x\right)$$

Quindi

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(2+\frac{3}{2}x\right)^2}} \cdot \frac{3}{2}$$

Quindi

$$f'(-1) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

L'equazione della retta tangente al grafico di f in $(-1, f(-1))$ è quindi

$$y - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,(x+1)$$

Esercizio 7

Per il carattere locale della continuità f è continua su $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$\lim_{\substack{x \to -1^- \\ x \neq -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1^- \\ x \neq -1}} a + e x = a - e$$

$$f(-1) = a - e$$

$$\lim_{\substack{x \to -1^+ \\ x \neq -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1^+ \\ x \neq -1}} (x+1)\, e^{|x|} = 0$$

Quindi f è continua in -1 se e solo se $a - e = 0$,

cioè se e solo se $a = e$

La funzione $|x|$ è derivabile su $\mathbb{R} - \{0\}$

Quindi per il carattere locale della derivabilità

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \begin{cases} e + ex & \text{per } x \leq -1 \\ (1+x)\, e^{|x|} & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

è derivabile su $\mathbb{R} - \{0, -1\}$

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} e + ex & \text{per } x \leq -1 \\ (1+x)e^{-x} & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ (1+x)e^{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Quindi per $x < -1$ si ha

$$f'(x) = e$$

Per $-1 < x < 0$ si ha

$$f'(x) = e^{-x} + (1+x)\, e^{-x}(-1) = e^{-x}(1 - 1 - x) = -x e^{-x}$$

Per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = e^{x} + (1+x)e^{x} = e^{x}(1 + 1 + x) = (2+x)e^{x}$$

Si ha

$$\lim_{\substack{x \to -1^- \\ x \neq -1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -1^- \\ x \neq -1}} e = e$$

Quindi f è derivabile da sinistra in -1 e si ha

$$f'_-(-1) = e$$

Si ha

$$\lim_{\substack{x \to -1^+ \\ x \neq -1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -1^+ \\ x \neq -1}} -x e^{-x} = e$$

Quindi f è derivabile da destra in -1 e $f'_+(-1) = e$

Essendo $f'_-(-1) = f'_+(-1)$, f è derivabile in -1

Si ha

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x\neq 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0^-\\ x\neq 0}} -xe^{-x} = 0$$

Quindi f è derivabile da sinistra in 0 e $f'_-(0)=0$

Si ha

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x\neq 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ x\neq 0}} (2+x)e^{x} = 2e$$

Quindi f è derivabile da destra in 0 e si ha $f'_+(0) = 2e$

Essendo $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, f non è derivabile in 0

L'insieme degli $x \in R$ tali che f è derivabile in x

è quindi $R - \{0\}$

Esercizio 8

Si ha

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

Quindi

$$(x - \sin x)(1-\cos x) = \frac{1}{6}x^3 \, \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{12}x^5$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5)$$

Quindi si ha

$$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{120}(2x)^5 + o(x^5) =$$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin(2x)\cos x = \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$= 2x - x^3 + \frac{1}{12}x^5 + o(x^5) - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{15}x^5 =$$

$$= 2x - \frac{7}{3}x^3 + \frac{41}{60}x^5 + o(x^5)$$

$$3\sin(2x)\cos x = 6x - 7x^3 + \frac{41}{20}x^5 + o(x^5)$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\operatorname{sh} y = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5)$$

Quindi

$$\operatorname{sh}(2x) = 2x + \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{120}(2x)^5 + o(x^5) =$$

$$= 2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$3\operatorname{sh}(2x) = 6x + 4x^3 + \frac{4}{5}x^5 + o(x^5)$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

Quindi si ha

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$11x\log(1+x^2) = 11x^3 - \frac{11}{2}x^5 + o(x^5)$$

$3 \sin(2x) \cos x - 3 \operatorname{sh}(2x) + 11x \log(1+x^2)$

$$6x - 7x^3 + \frac{61}{20}x^5 + o(x^5) - 6x - 4x^3 - \frac{4}{5}x^5 + 11x^3 - \frac{11}{2}x^5 =$$

$$= -\frac{13}{4}x^5 + o(x^5) \sim -\frac{13}{4}x^5$$

Si ha quindi

$$\frac{3 \sin(2x) \cos x - 3 \operatorname{sh}(2x) + 11x \log(1+x^2)}{(x - \sin x)(1 - \cos x)} \sim \frac{-\frac{13}{4}x^5}{\frac{1}{12}x^5} =$$

$$= -39$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin(2x) \cos x - 3 \sin(2x) + 11x \log(1+x^2)}{(x - \sin x)(1 - \cos x)} = -39$$

Esercizio 9

Si tratta dell'integrale improprio di

$$f : \,]-1, 0] \to \mathbb{R}, \quad x \to \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$$

Per ogni $x \in \,]-1, 0]$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^{1/3}}$$

Essendo $\frac{1}{3} < 1$, l'integrale improprio è convergente

Si ha

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx = \lim_{y \to -1} \int_{y}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx =$$

$$= \lim_{y \to -1} \int_y^0 (x+1)^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{y \to -1} \left[\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_y^0 =$$

$$= \lim_{y \to -1} \frac{3}{2} \left(1 - (y+1)^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_1^2 e^{\frac{2}{x}} \left(-\frac{2}{x^2}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[e^{\frac{2}{x}} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} \left(e - e^2 \right) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e$$

Esercizio 11

Si ha

$$\int_0^1 \log(1+x^2) dx = \left[x \log(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{1+x^2} 2x dx =$$

$$= \left[x \log(1+x^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

$$\left[x \log(1+x^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx =$$

$$\left[x \log(1+x^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$\left[x \log(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{Arctg} x \right]_0^1 =$$

$$= \log 2 - 2 + 2 \operatorname{Arctg} 1 = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 12 (1° modo)

Poniamo $e^x = t$; si ha $x = \log t$; quindi $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$; per $x = 0$, si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha $t = e$; si ha $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t}$

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int_1^e \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t}\, dt =$$

$$= \int_1^e \frac{1}{t^2+1}\, dt = \Big[\operatorname{Arctg} t \Big]_1^e = \operatorname{Arctg} e - \operatorname{Arctg} 1 =$$

$$= \operatorname{Arctg} e - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 12 (2° modo)

Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(e^x)^2+1} e^x\, dx = \Big[\operatorname{Arctg} e^x \Big]_0^1 =$$

$$= \operatorname{Arctg} e - \operatorname{Arctg} 1 = \operatorname{Arctg} e - \frac{\pi}{4}$$