Analisi Matematica 1 - 8/9/14

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 5) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = 2xe^{x^2},$$
rispondendo alle seguenti domande:

   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);

   (c) (p. 2*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

   (d) (p. 2) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

   NB (* I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.)

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n + n}{n^3 + n \log^2 n} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Sia

$$f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}_+, n \longrightarrow n! + 1 \quad \text{e} \quad g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{x} + 1 ;$$

determinare $g \circ f$, esprimendola nella forma

$$g \circ f : A \longrightarrow B, u \longrightarrow \mathcal{T}\{u\} ,$$

esplicitando A, B e $\mathcal{T}\{u\}$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 = 5 - 14i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x^2}{x-1} ;$$

   (a) (p. 2) determinare il dominio naturale di f;
   (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
   (c) (p. 1) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}\,.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+\alpha x} - x + 2\right).$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sin(3x) - (1+\log(1+2x))\,\mathrm{sh}(3x)}{\mathrm{sh}(3x) - 3x}\,.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x\sin(5x)\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^3 \frac{2x^2+1}{x^3-x^2}\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\log 6} \frac{e^{4x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha dom$(f) = \mathbb{R}$

b) Si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

c) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f'(x) = 2e^{x^2} + 2x e^{x^2} \cdot 2x = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x) > 0$.

Quindi f è strettamente crescente

Si ha quindi

$$m(\nearrow) = \{]-\infty, +\infty[\}, \quad m(\rightarrow) = \emptyset, \quad m(\searrow) = \emptyset$$

d) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f''(x) = 2\left(4x e^{x^2} + (1+2x^2) e^{x^2} 2x\right) =$$

$$= 4 e^{x^2} x (2 + 1 + 2x^2) = 4 e^{x^2} x (3 + 2x^2)$$

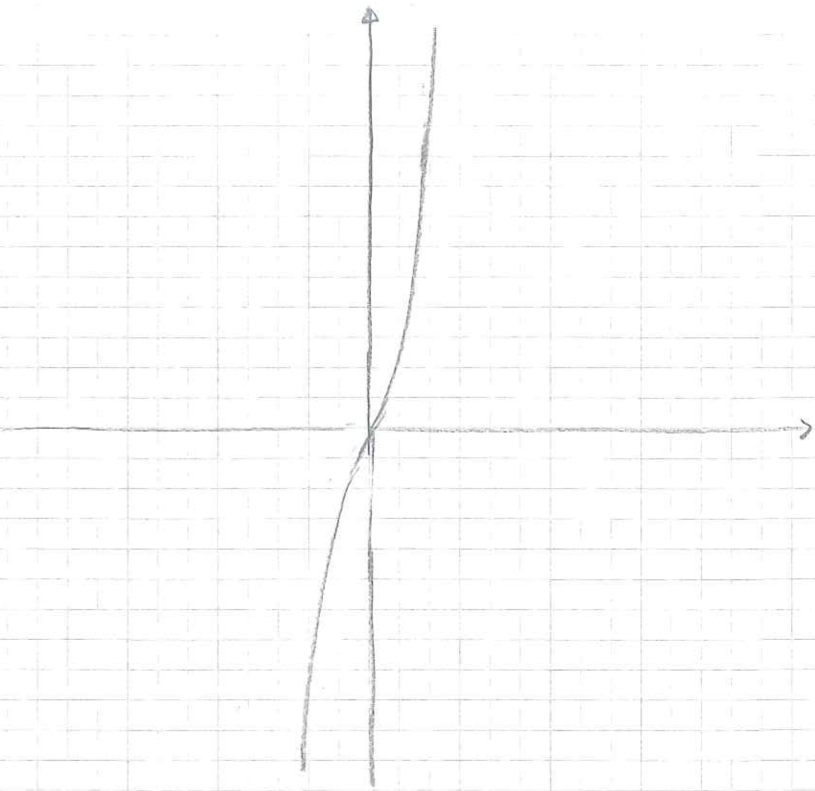
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$,

$f''(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, $f''(x) < 0$ se e solo se $x < 0$.

Quindi f è strettamente convessa su $[0, +\infty[$, strettamente concava su $]-\infty, 0]$.

Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{ [0, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\infty, 0] \}$$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{n^2 + (-1)^n + n}{n^3 + n \log^2 n} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

Quindi la serie è divergente positivamente

Esercizio 3

Sia $n \in \mathbb{N}$; si ha

$$g(f(n)) = g(n!+1) = \sqrt{n!+1} + 1$$

Si ha quindi

$$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \to \sqrt{n!+1} + 1$$

Esercizio 4

Si ha

$$|5-14i| = \sqrt{25+196} = \sqrt{221} \quad e$$

$$-\operatorname{Arccos}\frac{5}{\sqrt{221}} \in \arg(5-14i)$$

Si ha quindi

$$z = \pm\sqrt{\sqrt{221}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\left(-\operatorname{Arccos}\frac{5}{\sqrt{221}}\right)\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\left(-\operatorname{Arccos}\frac{5}{\sqrt{221}}\right)\right)\right) =$$

$$= \pm\sqrt[4]{221}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\frac{5}{\sqrt{221}}\right) - i\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\frac{5}{\sqrt{221}}\right)\right) =$$

$$= \pm\sqrt[4]{221}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\operatorname{Arccos}\frac{5}{\sqrt{221}}}{2}} - i\sqrt{\frac{1-\cos\operatorname{Arccos}\frac{5}{\sqrt{221}}}{2}}\right) =$$

$$= \pm\sqrt[4]{221}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{5}{\sqrt{221}}}{2}} - i\sqrt{\frac{1-\frac{5}{\sqrt{221}}}{2}}\right) =$$

$$= \pm\sqrt[4]{221}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{221}+5}{2\sqrt{221}}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{221}-5}{2\sqrt{221}}}\right) =$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{221}+5}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{221}-5}{2}}\right)$$

Esercizio 5

a) Sia $x \in \mathbb{R}$; si ha $x \in dom(f)$ se e solo se

$$x-1 \neq 0 \quad e \quad -1 \leq \frac{x^2}{x-1} \leq 1 \quad , \text{cioè}$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x^2}{x-1} \leq 1 \\ \dfrac{x^2}{x-1} \geq -1 \end{cases} \text{, cioè} \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x^2}{x-1} - 1 \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x-1} + 1 \geq 0 \end{cases} \text{, cioè}$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x^2 - x + 1}{x-1} \leq 0 \\ \dfrac{x^2 + x - 1}{x-1} \geq 0 \end{cases} \text{, cioè} \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ x - 1 < 0 \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ o } x > 1 \end{cases} \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ o } x > 1 \end{cases} \text{ cioè}$$

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha quindi $\operatorname{dom}(f) = \left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right]$

b) Sia $x \in \mathbb{R}$; procedendo come sopra si vede che si ha

$$\frac{x^2}{x-1} \neq 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{x-1} = -1 \text{ se e solo se } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Quindi per $x \in \left] \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right[$, si ha

$$-1 < \frac{x^2}{x-1} < 1$$

Sia $x \in \left] \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right[$; f è derivabile in x e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2}} \quad \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{(x-1)^2}}} \quad \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-2x+1-x^4}{(x-1)^2}}} \quad \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{|x-1|}{\sqrt{-x^4+x^2-2x+1}} \quad \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)}{\sqrt{x^4+x^2-2x+1}} \quad \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x-x^2}{(x-1)\sqrt{-x^4+x^2-2x+1}}$$

c) Per $x \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2}} \quad \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Per $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ si ha $\frac{x^2}{x-1} = -1$; quindi $\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2} = 0$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{(x-1)^2}}} = +\infty$$

Per $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, si ha $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} > 0$ se e solo se $x < 0$ o $x > 2$.

Si ha $0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 2$; quindi per $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ si ha $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} < 0$; si ha quindi $\lim_{x \to \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} < 0$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} f'(x) = -\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

e si ha $f'\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = -\infty$

Si ha $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$; quindi per $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, si ha

$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} > 0$. Si ha quindi $\lim_{x \to \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} > 0$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} f'(x) = +\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e

si ha $f'\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = +\infty$

Esercizio 6

Poniamo $x - \frac{\pi}{2} = y$. Si ha $x = y + \frac{\pi}{2}$.

Per $x \to \frac{\pi}{2}$, si ha $y \to 0$.

Si ha quindi

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(x - \frac{\pi}{2})^2} = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \sin(y + \frac{\pi}{2})}{y^2} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{1}{2} y^2}{y^2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 7

Si ha

$$\sqrt{x^2 + \alpha x} = x \sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}}$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2} y + o(y)$$

Quindi per $\alpha \neq 0$ si ha

$$\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{x}\right) + o\left(\frac{\alpha}{x}\right) = 1 + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Per $\alpha = 0$ si ha ancora

$$\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}} = \sqrt{1} = 1 = 1 + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{x} + 0 = 1 + \frac{\alpha}{2} x + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si ha quindi

$$x\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}} = x + \frac{\alpha}{2} + o(1)$$

Si ha quindi

$$\sqrt{x^2+\alpha x} - x + 2 = x + \frac{\alpha}{2} + o(1) - x + 2 = \frac{\alpha}{2} + 2 + o(1)$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\alpha x} - x + 2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{2} + 2 + o(1)\right) = \frac{\alpha}{2} + 2$$

Esercizio 8

Si ha

$$\operatorname{sh}(3x) - 3x \sim \frac{1}{6}(3x)^3 = \frac{9}{2}x^3$$

Per $y \to 0$ si ha

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

Quindi

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\sin y = y - \frac{1}{6} y^3 + o(y^3)$$

Quindi si ha

$$\sin(3x) = 3x - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$e^{2x}\sin(3x) = (1 + 2x + 2x^2 + o(x^2))\left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) + 6x^2 + 6x^3 = 3x + 6x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

Quindi si ha

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

$$1 + \log(1+2x) = 1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\operatorname{sh} y = y + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$$

Quindi si ha

$$\operatorname{sh}(3x) = 3x + \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3) = 3x + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$(1 + \log(1+2x)) = \left(1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)\right)\left(3x + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= 3x + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) + 6x^2 - 6x^3 + o(x^3) =$$

$$= 3x + 6x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$e^{2x}\sin(3x) - (1 + \log(1+2x))\operatorname{sh}(3x) =$$

$$= 3x + 6x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3) - 3x - 6x^2 + \frac{3}{2}x^3 = 3x^3 + o(x^3) \sim 3x^3$$

$$\frac{e^{2x}\sin(3x)-(1+\log(1+2x))\,\mathrm{sh}(3x)}{\mathrm{sh}(3x)-3x} \sim \frac{3x^3}{\frac{9}{2}x^3} = \frac{2}{3}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sin(3x)-(1+\log(1+2x))\,\mathrm{sh}(3x)}{\mathrm{sh}(3x)-3x} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 9

Si ha

$$\int_0^1 x\sin(5x)\,dx = \left[-\frac{1}{5}\cos(5x)\cdot x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{5}\cos(5x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{5}x\cos(5x)\right]_0^1 + \frac{1}{5}\int_0^1 \cos(5x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{5}x\cos(5x)+\frac{1}{25}\sin(5x)\right]_0^1 = -\frac{1}{5}\cos 5 + \frac{1}{25}\sin 5$$

Esercizio 10

Si ha

$$x^3-x^2 = x^2(x-1)$$

Esistono $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

Si ha

$$2x^2+1 = A\,x(x-1) + B(x-1) + C\,x^2$$

Per $x=0$ si ha $1 = -B$; quindi $B=-1$

Per $x=1$ si ha $3 = C$; quindi $C=3$

Si ha

$$2x^2+1 = Ax(x-1) - (x-1) + 3x^2 \quad ; \text{ quindi}$$

$$2x^2+1 = Ax(x-1) - x + 1 + 3x^2 \quad ; \text{ quindi}$$

$$-x^2+x = Ax(x-1) \quad ; \text{ quindi}$$

$$-x(x+1) = Ax(x-1)$$

Quindi $A = -1$.

Si ha quindi

$$\frac{2x^2+1}{x^3-x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1}$$

Quindi

$$\int_2^3 \frac{2x^2+1}{x^3-x^2}\,dx = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1}\right) dx =$$

$$= \left[-\log x + \frac{1}{x} + 3\log(x-1)\right]_2^3 =$$

$$= -\log 3 + \frac{1}{3} + 3\log 2 + \log 2 - \frac{1}{2} = 4\log 2 - \log 3 - \frac{1}{6} =$$

$$= \log\frac{16}{3} - \frac{1}{6}$$

Esercizio 11 (1° modo)

Poniamo

$$\sqrt{3+e^{2x}} = t$$

Si ha

$$3+e^{2x} = t^2 \quad ; \text{ quindi } \quad e^{2x} = t^2-3 \quad ; \text{ quindi}$$

$$2x = \log(t^2-3) \; ; \quad \text{quindi } \quad x = \frac{1}{2}\log(t^2-3)$$

Si ha quindi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2-3}\,2t = \frac{t}{t^2-3}$$

Per $x=0$, si ha $t=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$; per $x=\frac{1}{2}\log 6$ si ha $t=$
$\sqrt{3+e^{\log 6}} = \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$. Si ha

$$e^{4x} = (e^{2x})^2 = (t^2-3)^2$$

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{1}{2}\log 6} \frac{e^{4x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}\,dx = \int_2^3 \frac{(t^2-3)^2}{t}\,\frac{t}{t^2-3}\,dt =$$

$$= \int_2^3 (t^2-3)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t\right]_2^3 =$$

$$= 9 - 9 - \frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3}$$

Esercizio 11 (2° modo)

Si ha

$$\int_0^{\frac{1}{2}\log 6} \frac{e^{4x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\log 6} \frac{e^{2x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}\,2e^{2x}\,dx$$

Poniamo $e^{2x} = y$; si ha

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\log 6} \frac{e^{2x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}\,2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^6 \frac{y}{\sqrt{3+y}}\,dy$$

Poniamo $\sqrt{3+y} = t$; si ha $3+y=t^2$; quindi

$y = t^2 - 3$; quindi $\frac{dy}{dt} = 2t$; per $y = 1$ si ha

$t = 2$; per $y = 6$, si ha $t = 3$

Si ha quindi

$$\frac{1}{2}\int_1^6 \frac{y}{\sqrt{3+y}}\,dy = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{t^2-3}{t}\,2t\,dt =$$

$$= \int_2^3 (t^2-3)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t\right]_2^3 = 9 - 9 - \frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3}$$