

Analisi Matematica 1 - 8/1/15 - Compito 1 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^2 \log^2 x ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto della seguenti approssimazioni: $\frac{1}{e} \approx 0,37$; $f(\frac{1}{e}) \approx 0,14$; $e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}} \approx 0,07$; $f(e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}}) \approx 0,04$; $e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}} \approx 0,68$; $f(e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}) \approx 0,08$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{2n^2 - 3} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sqrt{x} + 1 ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di f ;
- (b) determinare l'immagine di f (si può rispondere utilizzando il grafico di f);
- (c) provare che f è iniettiva;
- (d) determinare f^{-1} ;
- (e) disegnare approssimativamente il grafico di f^{-1} .

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^6 = 4 - 2i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}} ;$$

- (a) (p. 1) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) (p. 1) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia

$$A = \{(-2)^n; n \in \mathbf{N}\};$$

consideriamo A come sottoinsieme dello spazio topologico \mathbf{R} ; determinare $\overset{\circ}{A}$, \overline{A} , $\text{Fr}(A)$ e l'insieme dei punti isolati di A ; dire se A è aperto e se A è chiuso (è sufficiente rispondere direttamente, avendo presente la posizione dei punti di A sulla retta).

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x+1}{x-1} < |x|.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{tg } x}{e^x - e^\pi}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^9} \left(\sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x+2} - \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \right).$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Sia $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{\sin(\alpha x)}{2 + \cos(\alpha x)} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_1^4 \frac{x + \alpha}{x + \sqrt{x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \log(4 + x^2) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o di $\frac{1}{x^2+a^2}$ per $a \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 8/1/15 - Compito 1 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^3 \log^4 x ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto della seguenti approssimazioni: $e^{-\frac{4}{3}} \approx 0,26$; $f(e^{\frac{4}{3}}) \approx 0,06$; $e^{-\frac{\sqrt{7}+5}{3}} \approx 0,08$; $f(e^{-\frac{\sqrt{7}+5}{3}}) \approx 0,02$; $e^{\frac{\sqrt{7}-5}{3}} \approx 0,46$; $f(e^{\frac{\sqrt{7}-5}{3}}) \approx 0,04$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{3n}n + 7n^2}{2 + 3n^2 + 4n^4} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia

$$f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sqrt{x-1} ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di f ;
- (b) determinare l'immagine di f (si può rispondere utilizzando il grafico di f);
- (c) provare che f è iniettiva;
- (d) determinare f^{-1} ;
- (e) disegnare approssimativamente il grafico di f^{-1} .

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^4 = -1 - 3i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1} ;$$

- (a) (p. 1) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) (p. 1) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia

$$A = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n; n \in \mathbf{N} \right\};$$

consideriamo A come sottoinsieme dello spazio topologico \mathbf{R} ; determinare $\overset{\circ}{A}$, \overline{A} , $\text{Fr}(A)$ e l'insieme dei punti isolati di A ; dire se A è aperto e se A è chiuso (è sufficiente rispondere direttamente, avendo presente la posizione dei punti di A sulla retta).

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x+2}{x-2} < \frac{|x|}{2}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\text{tg } x}{\sqrt{x - \pi}}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^7} \left(\sqrt[4]{x+3} - \sqrt[4]{x+2} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right).$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Sia $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{\cos(\alpha x)}{2 + \sin(\alpha x)} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_2^8 \frac{x + \alpha}{x + \sqrt{2x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \log(9 + x^2) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o di $\frac{1}{x^2+a^2}$ per $a \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 8/1/15 - Compito 1 - Versione 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x \log^3 x ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto della seguenti approssimazioni: $\frac{1}{e^3} \approx 0.05$; $f(\frac{1}{e^3}) \approx -1.34$; $\frac{1}{e^2} \approx 0.14$; $f(\frac{1}{e^2}) \approx -1.08$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n n^2}{2^n + (-1)^n n^4 - 3}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sqrt{x} - 1;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di f ;
- (b) determinare l'immagine di f (si può rispondere utilizzando il grafico di f);
- (c) provare che f è iniettiva;
- (d) determinare f^{-1} ;
- (e) disegnare approssimativamente il grafico di f^{-1} .

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^5 = 2 - 4i.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 1};$$

- (a) (p. 1) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) (p. 1) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia

$$A = \left\{ -\frac{1}{3^n} \mid n \in \mathbf{N} \right\};$$

consideriamo A come sottoinsieme dello spazio topologico \mathbf{R} ; determinare $\overset{\circ}{A}$, \overline{A} , $\text{Fr}(A)$ e l'insieme dei punti isolati di A ; dire se A è aperto e se A è chiuso (è sufficiente rispondere direttamente, avendo presente la posizione dei punti di A sulla retta).

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x+2}{x} < |x+1|.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}}{\text{tg } x}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{x^{11}} \left(\sqrt[6]{x+3} - \sqrt[6]{x+2} - \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} \right).$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Sia $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{e^{\alpha x}}{2 + e^{\alpha x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_3^{27} \frac{x + \alpha}{x + \sqrt{3x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \log(16 + x^2) dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o di $\frac{1}{x^2+a^2}$ per $a \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.