Analisi Matematica 1 - 8/1/15 - Compito 1 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^2 \log^2 x\ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);

   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

   (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;

   (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto della seguenti approssimazioni: $\frac{1}{e} \approx 0.37$; $f(\frac{1}{e}) \approx 0.14$; $e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}} \approx 0,07$; $f(e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}}) \approx 0,04$; $e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}} \approx 0,68$; $f(e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}) \approx 0,08$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{2n^2 - 3} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{x} + 1 ;$$

(a) disegnare approssimativamente il grafico di f;

(b) determinare l'immagine di f (si può rispondere utilizzando il grafico di f);

(c) provare che f è iniettiva;

(d) determinare f^{-1};

(e) disegnare approssimativamente il grafico di f^{-1}.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^6 = 4 - 2i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}} ;$$

(a) (p. 1) determinare il dominio naturale di f;

(b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;

(c) (p. 1) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia

$$A = \{(-2)^n;\ n \in \mathbf{N}\};$$

consideriamo A come sottoinsieme dello spazio topologico $\mathbf{R}$; determinare $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\operatorname{Fr}(A)$ e l'insieme dei punti isolati di A; dire se A è aperto e se A è chiuso (è sufficiente rispondere direttamente, avendo presente la posizione dei punti di A sulla retta).

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x+1}{x-1} < |x|\,.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x - e^\pi}\,.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x^9}\left(\sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x+2} - \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\right)\,.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Sia $\alpha \in \mathbf{R}_{+}^{*}$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{\sin(\alpha x)}{2+\cos(\alpha x)}\, dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_1^{4} \frac{x+\alpha}{x+\sqrt{x}}\, dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o di funzioni razionali non elementari.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{1} \log(4+x^2)\, dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o di $\frac{1}{x^2+a^2}$ per $a \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $\mathrm{dom}(f) =]0, +\infty[$.

b) Si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

c) Per ogni $x \in]0, +\infty[$ si ha

$$f'(x) = 2x \log^2 x + x^2 \cdot 2 \log x \frac{1}{x} = 2x \log x (\log x + 1)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$ o $\log x + 1 = 0$

cioè se e solo se $x = 1$ o $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{1}{e}$ o $x > 1$.

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $\frac{1}{e} < x < 1$.

Quindi f è strettamente crescente su $]0, \frac{1}{e}]$ e su $[1, +\infty[$, f è strettamente decrescente su $[\frac{1}{e}, 1]$

Si ha quindi

$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]0, \frac{1}{e}], [1, +\infty[\}$, $\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$

$\mathcal{M}(\searrow) = \{ [\frac{1}{e}, 1] \}$

d) Il prolungamento continuo di f in 0 è la funzione

$$g: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \log^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} x \log^2 x = 0$$

Quindi g è derivabile in 0 e si ha $g'(0) = 0$

e) Per ogni $x \in]0, +\infty[$ si ha

$f''(x) = 2\log^2 x + 4x\log x \frac{1}{x} + 2\log x + 2x\frac{1}{x} =$

$= 2(\log^2 x + 2\log x + \log x + 1)$

$= 2(\log^2 x + 3\log x + 1)$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $\log^2 x + 3\log x + 1 = 0$

cioè se e solo se $\log x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, cioè se e solo se

$x = e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}}$ o $x = e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}}$ o $x > e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}$,

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}} < x < e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}$

Quindi f è strettamente convessa su

$]0, e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}}]$ e su $[e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}, +\infty[$,

f è strettamente concava su $[e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}}, e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}]$

Si ha quindi:

$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{]0, e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}}], [e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}, +\infty[\right\}$,

$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset$

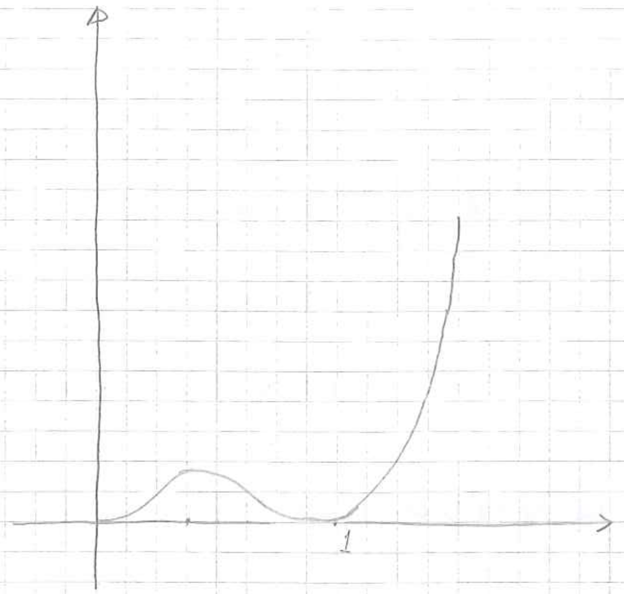
$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}}, e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}] \right\}$

Si ha

$\frac{1}{e} \approx 0.37$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2} \approx 0.14$

$e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}} \approx 0.07$ $\quad f\left(e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}}\right) = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} e^{-\sqrt{5}-3} \approx 0.04$

$e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}} \approx 0.68$ $\quad f\left(e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} e^{\sqrt{5}-3} \approx 0.08$



Esercizio 2

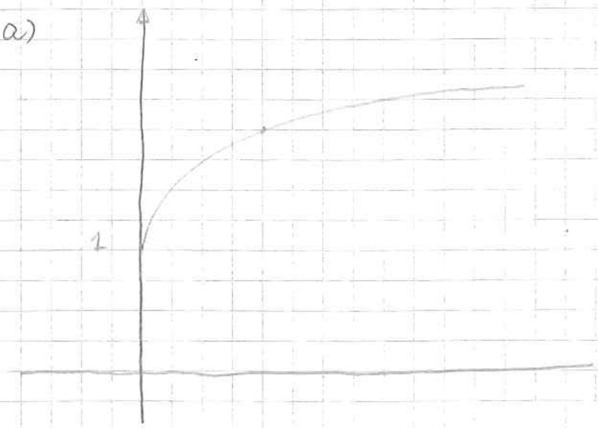
Si ha

$$\frac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{2n^2+3} \sim \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n}$$

Quindi la serie è divergente positivamente

Esercizio 3

a)



b) La proiezione del grafico di f sull'asse delle y è $[1,+\infty[$

Quindi si ha $f([0,+\infty[)=[1,+\infty[$.

Precisamente $y\in\mathbb{R}$ appartiene all'immagine di f

se e solo se l'equazione di incognita $x\in\mathbb{R}_+$

$$\sqrt{x}+1=y$$

ammette almeno una soluzione.

Tale equazione è equivalente all'equazione

$$\sqrt{x}=y-1$$

Per $y-1<0$, l'equazione non ha soluzioni; per $y-1\geq 0$, l'equazione è equivalente a $x=(y-1)^2$; quindi ha soluzioni; quindi l'equazione ha soluzioni se e solo se $y-1\geq 0$, cioè $y\geq 1$; quindi $f([0,+\infty[)=[1,+\infty[$

c) Supposto $y\geq 1$, l'equazione

$$\sqrt{x}=y-1$$

ha un'unica soluzione data da

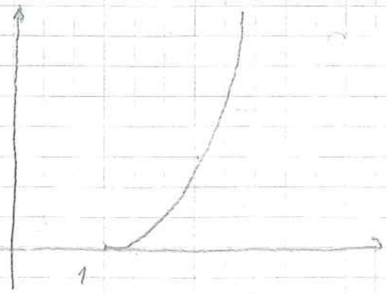
$$x=(y-1)^2$$

Quindi f è iniettiva

d) Si ha

$$f^{-1}: [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad y \longrightarrow (y-1)^2$$

e)



Esercizio 4

Si ha $|4-2i|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

Si ha $\mathrm{Arctg}\,\frac{-2}{4}=-\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}\in \arg(4-2i)$

Si ha quindi

$$z=\sqrt[6]{2\sqrt{5}}\;e^{\frac{-\mathrm{Arctg}\frac{1}{2}+2k\pi}{6}i} \quad \text{per } K=0,1,2,3,4,5$$

Esercizio 5

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè tali che } \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases}, \text{ cioè tali che } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Si ha quindi $\mathrm{dom}(f) = [0,1]$.

b) Per ogni $x \in]0,1[$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{x - x\sqrt{x}}}$$

c) Si ha

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}-x}} = -\infty$$

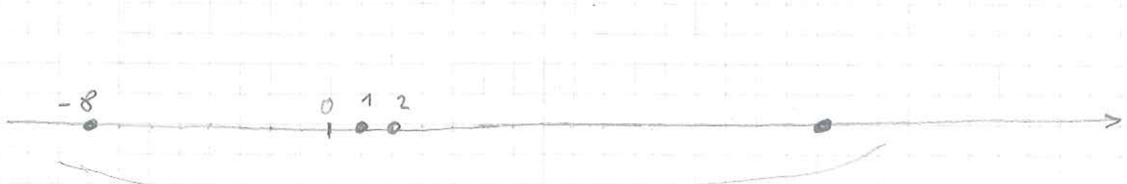
Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in 0 e $f'(0) = -\infty$

Si ha

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}-x}} = -\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in 1 e $f'(1) = -\infty$

Esercizio 6



A è formato da infiniti punti fra loro "separati".

Si ha

$\mathring{A} = \emptyset$; $\overline{A} = A$; $\mathrm{Fr}(A) = A$; ogni punto di A è isolato; A non è aperto in quanto $A \neq \overset{\circ}{A}$;

A è chiuso in quanto $A = \overline{A}$.

Esercizio 7

La disequazione è assegnata per $x \neq 1$.

Supponiamo $x \neq 1$. La disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} < |x| \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} < |x| \\ x < 0 \end{cases}$$

Il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} < |x| \\ x \geq 0 \end{cases}$$

è equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} < x \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} - x < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+1-x^2+x}{x-1} < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} \dfrac{-x^2+2x+1}{x-1} < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-1}{x-1} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 1-\sqrt{2} < x < 1 \quad \text{o} \quad x > 1+\sqrt{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

cioè a $0 \leq x < 1$ o $x > 1+\sqrt{2}$

Il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} < |x| \\ x < 0 \end{cases}$$ è equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} < -x \\ x<0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} + x < 0 \\ x<0 \end{cases}, \text{ cioè a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+1 \;+x^2-x}{x-1} < 0 \\ x<0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} < 0 \\ x<0 \end{cases}, \text{ cioè a}$$

$$\begin{cases} x-1<0 \\ x<0 \end{cases} \text{ cioè a } \begin{cases} x<1 \\ x<0 \end{cases}, \text{ cioè a } x<0$$

La disequazione assegnata è quindi soddisfatta se e solo se

$$x<1 \text{ o } x>1+\sqrt{2}$$

Esercizio 8 (1° modo)

Poniamo $y = x-\pi$, si ha $x = y+\pi$.

Si ha $\lim\limits_{x\to 0} (x-\pi) = 0$. Si ha quindi

$$\lim_{x\to\pi} \frac{tg\, x}{e^x - e^\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{tg\,(y+\pi)}{e^{y+\pi} - e^\pi} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{tg\, y}{e^y e^\pi - e^\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{tg\, y}{e^\pi (e^y - 1)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^\pi \cdot y} =$$

$$= \frac{1}{e^\pi} = e^{-\pi}$$

Esercizio 8 (2° modo)

Il limite è della forma $\frac{0}{0}$; per il teorema di De Hospital si ha

$$\lim_{x\to\pi} \frac{tg\, x}{e^x - e^\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{1+tg^2 x}{e^x} = \frac{1}{e^\pi} = e^{-\pi}$$

Esercizio 9

Si ha

$$\sqrt[5]{x+3} = x^{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{1+\frac{3}{x}}$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\sqrt[5]{1+y} = 1 + \frac{1}{5} y + \binom{\frac{1}{5}}{2} y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{5} y - \frac{2}{25} y^2 + o(y^2)$$

Si ha quindi per $x \to +\infty$

$$x^{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{1+\frac{3}{x}} = x^{\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{1}{5} \frac{3}{x} - \frac{2}{25} \frac{9}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x^{\frac{1}{5}} + \frac{3}{5} \frac{1}{x^{4/5}} - \frac{18}{25} \frac{1}{x^{9/5}} + o\left(\frac{1}{x^{9/5}}\right)$$

Si ha

$$\sqrt[5]{x+2} = x^{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} = x^{\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{1}{5} \frac{2}{x} - \frac{2}{25} \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x^{\frac{1}{5}} + \frac{2}{5} \frac{1}{x^{4/5}} - \frac{8}{25} \frac{1}{x^{9/5}} + o\left(\frac{1}{x^{9/5}}\right)$$

Si ha quindi

$$\sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x+2} - \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} =$$

$$= x^{\frac{1}{5}} + \frac{3}{5} \frac{1}{x^{4/5}} - \frac{18}{25} \frac{1}{x^{9/5}} + o\left(\frac{1}{x^{9/5}}\right) - x^{\frac{1}{5}} - \frac{2}{5} \frac{1}{x^{4/5}} +$$

$$+ \frac{8}{25} \frac{1}{x^{9/5}} - \frac{1}{5} \frac{1}{x^{4/5}} = -\frac{2}{5} \frac{1}{x^{9/5}} + o\left(\frac{1}{x^{9/5}}\right) \sim$$

$$\sim -\frac{2}{5} \frac{1}{x^{9/5}}$$

Si ha quindi

$$\sqrt[5]{x^9} \left(\sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x+2} - \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \right) \sim x^{\frac{9}{5}} \left(-\frac{2}{5} \frac{1}{x^{9/5}} \right) =$$

$$= -\frac{2}{5}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x^9}\left(\sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x+2} - \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\right) = -\frac{2}{5}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{\sin(\alpha x)}{2+\cos(\alpha x)}\, dx = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{1}{2+\cos(\alpha x)}\left(-\alpha \sin(\alpha x)\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\Big[\log\left(2+\cos(\alpha x)\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left(\log 2 - \log 3\right) = \frac{1}{\alpha}\log\frac{3}{2}$$

Esercizio 11

Poniamo $\sqrt{x} = t$; si ha $x = t^2$; quindi $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 1$ si ha $t = 1$; per $x = 4$ si ha $t = 2$. Si ha quindi

$$\int_0^4 \frac{x+\alpha}{x+\sqrt{x}}\, dx = \int_0^2 \frac{t^2+\alpha}{t^2+t}\, 2t\, dt = 2\int_0^2 \frac{t^2+\alpha}{t(t+1)}\, t\, dt =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{t^2+\alpha}{t+1}\, dt$$

Il quoziente della divisione $(t^2+\alpha) : (t+1)$ è $t-1$ e il resto è $\alpha+1$. Si ha quindi

$$t^2+\alpha = (t+1)(t-1) + \alpha + 1$$

Quindi

$$\frac{t^2+\alpha}{t+1} = t-1+\frac{\alpha+1}{t+1}$$

Quindi:

$$2\int_1^2 \frac{t^2+\alpha}{t+1}\,dt = 2\int_0^2 \left(t-1+\frac{\alpha+1}{t+1}\right)dt =$$

$$=2\left[\frac{1}{2}t^2 - t + (\alpha+1)\log|t+1|\right]_1^2 =$$

$$=2\left(2-2+(\alpha+1)\log 3 - \frac{1}{2} + 1 - (\alpha+1)\log 2\right) =$$

$$=2\left(\frac{1}{2} + (\alpha+1)\log\frac{3}{2}\right) = 2(\alpha+1)\log\frac{3}{2} + 1$$

Esercizio 12

$$\int_0^1 \log(4+x^2)\,dx = \left[x\log(4+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{4+x^2}\,2x\,dx =$$

$$=\left[x\log(4+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+4}\,dx =$$

$$=\left[x\log(4+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2+4-4}{x^2+4}\,dx =$$

$$=\left[x\log(4+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \left(1-\frac{4}{x^2+4}\,dx\right) =$$

$$=\left[x\log(4+x^2)-2x\right]_0^1 + 8\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\,dx =$$

$$=\left[x\log(4+x^2)-2x\right]_0^1 + \frac{8}{4}\int_0^1 \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}\,dx =$$

$$\left[x\log(4+x^2)-2x\right]^1 + 2\left(\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,\frac{1}{2}\,dx\right)2 =$$

$$\left[x\log(4+x^2)-2x+4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{2}\right]_0^1 = \log 5 - 2 + 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$$