

Analisi Matematica 1 - 23/1/15 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^2 e^{|x|} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 2*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in 0;
- (e) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{n}} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$(z^3 - 8)(z^2 - 25) = 0 .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \log(\sqrt{x} + 1) ;$$

- (a) (p. .5) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) (p. .5) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{|x|}$$

e

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2x - 1 ;$$

- (a) determinare $f \circ g$;
- (b) determinare $g \circ f$;
- (c) dimostrare che g è biettiva e determinare g^{-1} .

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \log(1+x) - \sin x^2 - x^3}{x^\alpha} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt[6]{x^2 + 2x + 3} - 3\sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[3]{x} \log(1 + \frac{2}{x})}{\sqrt[6]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x}} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 2) Dire se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2^x \sqrt{x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\operatorname{Arcsin} x \sqrt{1-x^2}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{64} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; sia $\beta \neq 0$; calcolare in funzione di α e di β il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{\beta}} (\alpha x + 1) e^{\beta x} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 23/1/15 - Compito 2 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = xe^{|x|} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 2*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in 0;
- (e) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{1 - \cos \frac{1}{n}} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$(z^3 + 8)(z^2 + 25) = 0 .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \log(1 - \sqrt{x}) ;$$

- (a) (p. .5) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) (p. .5) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow |x|$$

e

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 5x - 3 ;$$

- (a) determinare $f \circ g$;
- (b) determinare $g \circ f$;
- (c) dimostrare che g è biettiva e determinare g^{-1} .

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x(e^x - 1) - \operatorname{sh} x^2 + 2x^3}{x^\alpha} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt[6]{x^2 - x + 1} - \sqrt[3]{8x + 3} + \frac{7}{12}\sqrt[3]{x}(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{\sqrt[6]{x^2 + 3} - \sqrt[3]{x}} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 2) Dire se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{3^x \sqrt[3]{x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\operatorname{Arccos} x \sqrt{1-x^2}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\frac{1}{2}}^{32} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{2x+1}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; sia $\beta \neq 0$; calcolare in funzione di α e di β il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{\beta}} (\alpha x - 1) e^{-\beta x} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.