

Analisi Matematica 1 - 23/1/15 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^2 e^{|x|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 2*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in 0;
- (e) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{n}}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n}.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$(z^3 - 8)(z^2 - 25) = 0.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \log(\sqrt{x} + 1);$$

- (a) (p. .5) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) (p. .5) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{|x|}$$

e

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2x - 1 ;$$

(a) determinare $f \circ g$;

(b) determinare $g \circ f$;

(c) dimostrare che g è biettiva e determinare g^{-1} .

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log(1+x) - \sin x^2 - x^3}{x^\alpha} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt[6]{x^2 + 2x + 3} - 3\sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[3]{x} \log(1 + \frac{2}{x})}{\sqrt[6]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x}} .$$

Svolgimento e risposta.

- 4
9. (p. 2) Dire se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2^x \sqrt{x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\operatorname{Arcsin} x \sqrt{1-x^2}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{64} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; sia $\beta \neq 0$; calcolare in funzione di α e di β il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{\beta}} (\alpha x + 1) e^{\beta x} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Vernone 1

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x & \text{per } x \geq 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c) Si ha $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, si ha

$$f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = (2x + x^2) e^x > 0$$

Quindi f è strettamente crescente su $[0, +\infty[$

Si ha $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, si ha

$$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x} (-1) = (2x - x^2) e^{-x} < 0$$

Quindi f è strettamente decrescente su $] -\infty, 0]$

Si ha quindi

$$m(\nearrow) = \{ [0, +\infty[\}, m(\rightarrow) = \emptyset, m(\searrow) = \{] -\infty, 0] \}$$

d) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (2x + x^2) e^x = 0$$

Quindi f è derivabile da destra in 0 e $f'_+(0) = 0$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (2x - x^2) e^{-x} = 0$$

Quindi f è derivabile da sinistra in 0 e $f'_-(0) = 0$

Essendo $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, f è derivabile in 0 e si ha
 $f'(0) = 0$

[oppure: si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{|x|} = 0;$$

quindi f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$]

c) Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Si ha

$$f''(x) = (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x = (2 + 4x + x^2)e^x > 0$$

quindi f è strettamente convessa su $[0, +\infty[$

Sia $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$. Si ha

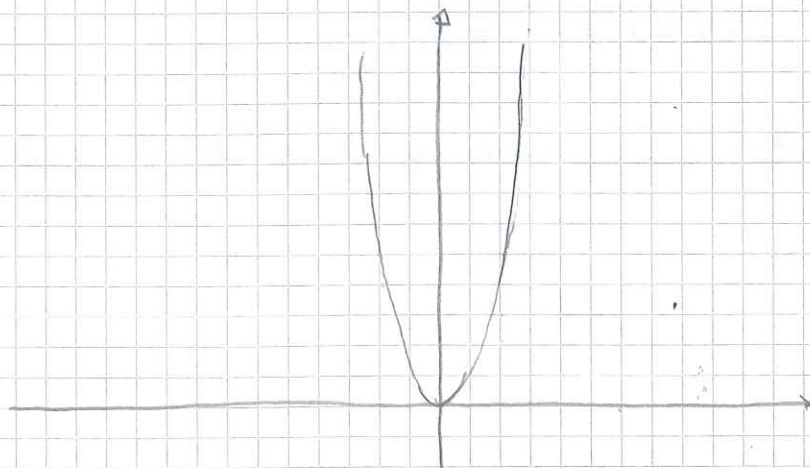
$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} + (2x - x^2)e^{-x}(-1) = \\ (2 - 4x + x^2)e^{-x} > 0$$

quindi f è strettamente convessa su $] -\infty, 0]$.

Essendo $f_-(0) = f'_+(0)$, f è strettamente convessa su $\mathbb{R}$.

Si ha quindi:

$$C(\uparrow) = \{]-\infty, +\infty[\}, C(\downarrow) = \emptyset, C(\downarrow) = \emptyset$$



Esercizio 2

Si ha

$$\sqrt[n]{\operatorname{Arctg} \frac{1}{n} - \frac{1}{n}} \sim \sqrt[n]{\frac{1}{3} - \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Essendo $\frac{3}{2} > 1$, la serie è convergente

Esercizio 3

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\log^n n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

Quindi per il criterio della radice, la serie è convergente

Esercizio 4

Si $z \in \mathbb{C}$. Si ha

$$(z^3 - 8)(z^2 - 25) = 0$$

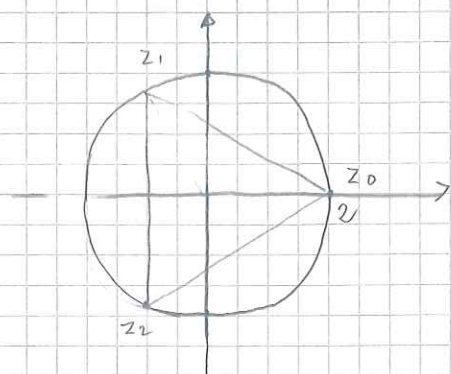
se e solo se

$$z^3 - 8 = 0 \quad \text{o} \quad z^2 - 25 = 0$$

ovvero se e solo se

$$z^3 = 8 \quad \text{o} \quad z^2 = 25$$

Si ha $|8| = 8$ e $0 \in \arg 8$



L'equazione $z^3 = 8$ ha per soluzioni

$$z_0 = 2$$

$$z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

l'equazione $z^2 = 25$ ha per soluzioni $z = 5$ e $z = -5$

l'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\{2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i, 5, -5\}$$

Esercizio 5

a) Il dominio di f è dato dagli x reali tali che

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 1 \geq 0 \end{cases}$$

quindi tali che $x \geq 0$. Si ha quindi

$$\text{dom}(f) = [0, +\infty[$$

b) Si è $x > 0$; si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x}}$$

c) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$$

quindi f è derivabile rispetto a $\mathbb{R}$ in 0 e $f'(0) = +\infty$

Esercizio 6

a) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = \sqrt{|2x-1|}$$

si ha quindi

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{|2x-1|}$$

b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ n.h.e.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{|x|}) = 2\sqrt{|x|} - 1$$

Si ha quindi

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow 2\sqrt{|x|} - 1$$

c) Se $y \in \mathbb{R}$; consideriamo l'equazione di incognita $x \in \mathbb{R}$

$$2x - 1 = y$$

L'equazione ammette una ed una sola soluzione

$$x = \frac{y+1}{2}$$

Quindi g è biettiva e n.h.e.

$$g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \rightarrow \frac{y+1}{2}$$

Esercizio 7

Si ha;

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$x \log(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

Per $y \rightarrow 0$ n.h.e.

$$\sin y = y + o(y^2)$$

Quindi n.h.e.

$$\sin x^2 = x^2 + o(x^4)$$

Si ha quindi

$$x \log(1+x) - \sin x^2 - x^3 =$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x^2 - x^3 = -\frac{3}{2}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{3}{2}x^3$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log(1+x) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{3}{2}x^3}{x^\alpha} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{3}{2}x^{3-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < 3 \\ -\frac{3}{2} & \text{per } \alpha = 3 \\ -\infty & \text{per } \alpha > 3 \end{cases}$$

Esercizio 8

Si ha

$$\sqrt[6]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt[3]{x} =$$

$$= \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \sim x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{6} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{3}}$$

Si ha

$$3 \sqrt[6]{x^2 + 2x + 3} - 3 \sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[3]{x} \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) =$$

$$= 3 \sqrt[6]{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} - 3 \sqrt[3]{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} + \sqrt[3]{x} \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) =$$

$$\sqrt[3]{x} \left(3 \sqrt[6]{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 3 \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) \right)$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sqrt[6]{1+y} = 1 + \frac{1}{6}y + \left(\frac{1}{6}\right) \frac{y^2}{2} + o(y^2) = 1 + \frac{1}{6}y - \frac{5}{72}y^2 + o(y^2)$$

Si ha quindi

$$\sqrt[6]{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) - \frac{5}{72} \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} - \frac{5}{18} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x} + \frac{2}{9} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Si he quindi

$$3 \sqrt[6]{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Per $y \rightarrow 0$ n he

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3} y + \left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right) y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{3} y - \frac{1}{9} y^2 + o(y^2)$$

Si he quindi

$$\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} = 1 + \frac{1}{3} \frac{3}{x} - \frac{1}{9} \left(\frac{3}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Si he quindi

$$3 \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} = 3 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Per $y \rightarrow 0$ n he

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2} y^2 + o(y^2)$$

Si he quindi

$$\log\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Si he quindi

$$3 \sqrt[6]{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 3 \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) =$$

$$= 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 3 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} =$$

$$= \frac{5}{3} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{5}{3} \frac{1}{x^2}$$

Si he quindi

$$\sqrt[3]{x} \left(3 \sqrt[6]{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 3 \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) \right) \sim x^{\frac{1}{3}} \frac{5}{3} \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{5}{3} x^{-\frac{5}{6}}$$

Si ha quindi

$$\frac{3 \sqrt[6]{x^2+2x+3} - 3 \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x} \log\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt[6]{x^2+1} - \sqrt[3]{x}} \sim \frac{\frac{5}{3} x^{-\frac{5}{2}}}{\frac{1}{6} x^{-\frac{5}{2}}} = 10$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \sqrt[6]{x^2+2x+3} - 3 \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x} \log\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt[6]{x^2+1} - \sqrt[3]{x}} = 10$$

Esercizio 3

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}}$$

L'integrale improprio è convergente se sono convergenti gli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$$

Consideriamo

$$\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$$

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f|_{]0, 1]}$$

Si ha

$$\frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

essendo $\frac{1}{2} < 1$ l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$ è convergente

Consideriamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$$

Si tratta dell'integrale improprio su un'asintotta positiva della funzione $f \in]1, +\infty[$

Si ha

$$\frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2^x \sqrt{x}} = x^{3/2} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1$, l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$ è convergente.

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

Esercizio 10.

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\operatorname{Arccos} x \sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\operatorname{Arccos} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \left[\log \operatorname{Arccos} x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \log \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{2} - \log \operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \\ &= \log \frac{\pi}{3} - \log \frac{\pi}{6} = \log \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = \log 2 \end{aligned}$$

Esercizio 11

Poniamo $\sqrt[6]{x} = t$; si ha $x = t^6$; quindi

$$\frac{dx}{dt} = 6t^5 \quad \text{Per } x=0 \text{ si ha } t=0; \text{ per } x=64 \text{ si ha}$$

$t = 2$. Per $x = 0$ si ha $t = 0$; per $x = 64$, si ha $t = 2$

$$\int_0^{64} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx = \int_0^2 \frac{t^3 + 1}{t^2 + 1} 6t^5 dt =$$

$$= 6 \int_0^2 \frac{t^8 + t^5}{t^2 + 1} dt$$

Troviamo il quoziente ed il resto della divisione $(t^8 + t^5) : (t^2 + 1)$

t^8	t^5	
$-t^8$	$-t^4$	
$-t^6 + t^5$		
t^6	$+t^4$	
$t^5 + t^4$		
$-t^5$	$-t^3$	
$t^4 - t^3$		
$-t^4$	$-t^2$	
$-t^3 - t^2$		
t^3	$+t$	
$-t^2 + t$		
t^2	$+1$	
$t + 1$		

$$\begin{array}{r} t^2 + 1 \\ t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1 \end{array}$$

Il quoziente è $t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1$; il resto è $t + 1$. Si ha quindi

$$t^8 + t^5 = (t^2 + 1)(t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1) + t + 1$$

Se he quindi:

$$\frac{t^8 + t^5}{t^2 + 1} = t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1 + \frac{t+1}{t^2+1}$$

Se he quindi:

$$6 \int_0^2 \frac{t^8 + t^5}{t^2 + 1} dt = 6 \int_0^2 \left(t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1 + \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$6 \int_0^2 \left(t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1 + \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$6 \left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2} \log(t^2+1) + \text{Arctg } t \right]_0^2 =$$

$$= 6 \left(\frac{128}{7} - \frac{32}{5} + 4 + \frac{8}{3} - 2 - 2 + \frac{1}{2} \log 5 + \text{Arctg } 2 \right) =$$

$$= 6 \left(\frac{1920 - 672 + 280}{105} + \frac{1}{2} \log 5 + \text{Arctg } 2 \right)$$

$$= 6 \left(\frac{1528}{105} + \frac{1}{2} \log 5 + \text{Arctg } 2 \right) =$$

$$= \frac{3056}{35} + \log(125) + 6 \text{ Arctg } 2$$

esercizio 12

Se he

$$\int_0^{\frac{1}{\beta}} (\alpha x + 1) e^{\beta x} dx =$$

$$\left[(\alpha x + 1) \frac{1}{\beta} e^{\beta x} \right]_0^{\frac{1}{\beta}} - \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{\beta} e^{\beta x} \alpha dx =$$

$$\left[(\alpha x + 1) \frac{1}{\beta} e^{\beta x} \right]_0^{\frac{1}{\beta}} - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{\beta x} dx =$$

$$= \left[(\alpha x + 1) \frac{1}{\beta} e^{\beta x} \right]_0^{\frac{1}{\beta}} - \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{1}{\beta} e^{\beta x} \right]_0^{\frac{1}{\beta}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{\beta} (\alpha x + 1) e^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\beta x} \right]_0^{\frac{1}{\beta}} = \\
&= \left[\left(\frac{\alpha x + 1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2} \right) e^{\beta x} \right]_0^{\frac{1}{\beta}} = \\
&= \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2} \right) e - \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} = \\
&\frac{e}{\beta} - \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{e\beta - \beta + \alpha}{\beta^2}
\end{aligned}$$