Analisi Matematica 1 - 10/2/15 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 4) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = e^{x^3+x} \ ,$$
rispondendo alle seguenti domande:
   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;
   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
   (d) (non assegnata) provare che l'equazione $f''(x) = 0$ ammette due e solo due soluzioni α_1, α_2, con $\alpha_1 < \alpha_2$; studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$ in funzione di α_1 e α_2.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f.

   NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è definita ed è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x-1|}{x}\right)^n ;$$

per tali x, determinare la somma della serie.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^6 = 4 - 3i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 \sin(5x^2)} \quad \text{(radice di indice dispari)};$$

(a) determinare il dominio naturale di f;

(b) risolvere l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \sin(5x^2) = 0$;

(c) calcolare la derivata di f nei punti $x \in \mathbf{R}$ tali che $x^2 \sin(5x^2) \neq 0$;

(d) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f nei punti $x \in \mathbf{R}$ tali che $x^2 \sin(5x^2) \neq 0$ (assegnato solo lo studio della derivabilità di f in 0).

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x^2 & \text{per } x \geq 2 \\ x+2 & \text{per } x < 2 \end{cases} ;$$

(a) disegnare il grafico di f;

(b) dimostrare che f è continua;

(c) determinare l'insieme dei punti dove f è derivabile;

(d) calcolare $\int_0^4 f(x)\, dx$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} (|x|^{\frac{5}{2}} + x^3) \operatorname{Arctg} \frac{x^2 - x^3}{x^2 + 5} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{Arcsin}(3x)}{3x} \right)^{\frac{1}{x^2}} .$$

Suggerimento. Si può utilizzare l'equivalenza asintotica: $\operatorname{Arcsin} y - y \sim_{y \to 0} \frac{1}{6} y^3$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x - x^2) \sin(x + 2x^2) - \log(1 + x^2 + x^3)}{1 - \cos x^2} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\, dx \; .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{2+\cos(2x)}\, dx \; .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\frac{1}{x^2+a^2}$, per $a \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \log(x+1)\, dx \; .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 10/2/15 - Compito 3 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 4) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = e^{x^3 - x} \ ,$$
rispondendo alle seguenti domande:
   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;
   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
   (d) (non assegnata) provare che l'equazione $f''(x) = 0$ ammette due e solo due soluzioni α_1, α_2, con $\alpha_1 < \alpha_2$; studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$ in funzione di α_1 e α_2.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f.

   NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

   Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58$, $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 1.47$, $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 0.68$.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è definita ed è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x-2|}{x} \right)^n ;$$

per tali x, determinare la somma della serie.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^6 = -3 + 4i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 \sin(x^4)} \ \text{ (radice di indice dispari);}$$

(a) determinare il dominio naturale di f;

(b) risolvere l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \sin(x^4) = 0$;

(c) calcolare la derivata di f nei punti $x \in \mathbf{R}$ tali che $x^2 \sin(x^4) \neq 0$;

(d) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f nei punti $x \in \mathbf{R}$ tali che $x^2 \sin(x^4) \neq 0$ (assegnato solo lo studio della derivabilità di f in 0).

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x+2 & \text{per } x \geq 2 \\ x^2 & \text{per } x < 2 \end{cases} ;$$

(a) disegnare il grafico di f;

(b) dimostrare che f è continua;

(c) determinare l'insieme dei punti dove f è derivabile;

(d) calcolare $\int_0^5 f(x)\,dx$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^2} - x^2) \operatorname{Arctg} \frac{x^2 - x^3}{x^2 + 3} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{Arcsin}(2x)}{2x} \right)^{\frac{2}{x^2}} .$$

Suggerimento. Si può utilizzare l'equivalenza asintotica: $\operatorname{Arcsin} y - y \sim_{y\to 0} \frac{1}{6} y^3$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(x + 2x^2)\operatorname{sh}(x - x^2) - \log(1 + x^2 + x^3)}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\, dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{3+2\cos(2x)}\, dx\ .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\frac{1}{x^2+a^2}$, per $a \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x\log(x+5)\, dx\ .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.