Analisi Matematica 1 - 10/2/15 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 4) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = e^{x^3+x} \, ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

(b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);

(c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

(d) (non assegnata) provare che l'equazione $f''(x) = 0$ ammette due e solo due soluzioni α_1, α_2, con $\alpha_1 < \alpha_2$; studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$ in funzione di α_1 e α_2.

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Svolgimento e risposta.

2

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è definita ed è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x-1|}{x}\right)^n ;$$

per tali x, determinare la somma della serie.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^6 = 4 - 3i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 \sin(5x^2)} \text{ (radice di indice dispari);}$$

(a) determinare il dominio naturale di f;

(b) risolvere l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \sin(5x^2) = 0$;

(c) calcolare la derivata di f nei punti $x \in \mathbf{R}$ tali che $x^2 \sin(5x^2) \neq 0$;

(d) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f nei punti $x \in \mathbf{R}$ tali che $x^2 \sin(5x^2) \neq 0$ (assegnato solo lo studio della derivabilità di f in 0).

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x^2 & \text{per } x \geq 2 \\ x+2 & \text{per } x < 2 \end{cases} ;$$

(a) disegnare il grafico di f;

(b) dimostrare che f è continua;

(c) determinare l'insieme dei punti dove f è derivabile;

(d) calcolare $\int_0^4 f(x)\, dx$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} (|x|^{\frac{5}{2}} + x^3) \operatorname{Arctg} \frac{x^2 - x^3}{x^2 + 5} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{Arcsin}(3x)}{3x} \right)^{\frac{1}{x^2}} .$$

Suggerimento. Si può utilizzare l'equivalenza asintotica: $\operatorname{Arcsin} y - y \sim_{y \to 0} \frac{1}{6} y^3$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x - x^2) \sin(x + 2x^2) - \log(1 + x^2 + x^3)}{1 - \cos x^2} .$$

Svolgimento e risposta.

4

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{2+\cos(2x)}\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\frac{1}{x^2+a^2}$, per $a \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x\log(x+1)\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $dom(f) = R$

b) Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

c) Sia $x \in R$. Si ha

$$f'(x) = e^{x^3+x}(3x^2+1)$$

Si ha $f'(x) > 0$.

Quindi f è strettamente crescente su R.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, +\infty[\}, \quad \mathcal{M}(\to) = \emptyset, \quad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset$$

d) Sia $x \in R$: Si ha

$$f''(x) = e^{x^3+x}(3x^2+1)^2 + e^{x^3+x}(6x+1) =$$

$$= e^{x^3+x}(9x^4+6x^2+6x+1)$$

Sia

$$g : R \to R, \quad x \to 9x^4+6x^2+6x+1$$

Si ha $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

Per ogni $x \in R$ si ha

$$g'(x) = 36x^3+12x+6 = 6(6x^3+2x+1)$$

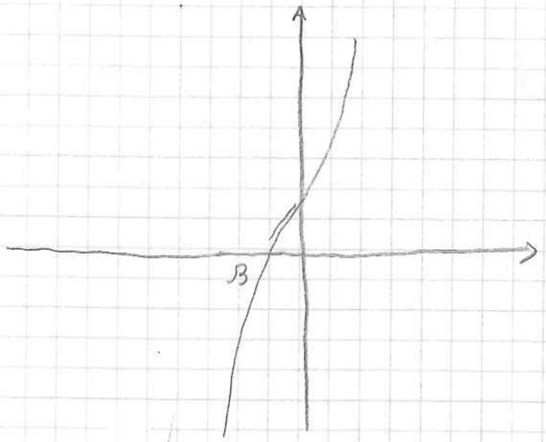
Si ha $\lim_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} g'(x) = -\infty$

Per ogni $x \in R$ si ha

$$g''(x) = 6(18x^2+2) > 0$$

quindi g' è strettamente crescente

Quindi, tenendo conto dei limiti di g', per $x \to \pm\infty$, esiste uno ed uno solo $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $g'(\beta) = 0$.
Si ha $g'(0) = 6 > 0$; quindi si ha $\beta < 0$



Si ha quindi $g'(x) < 0$ per $x < \beta$ e $g'(x) > 0$ per $x > \beta$

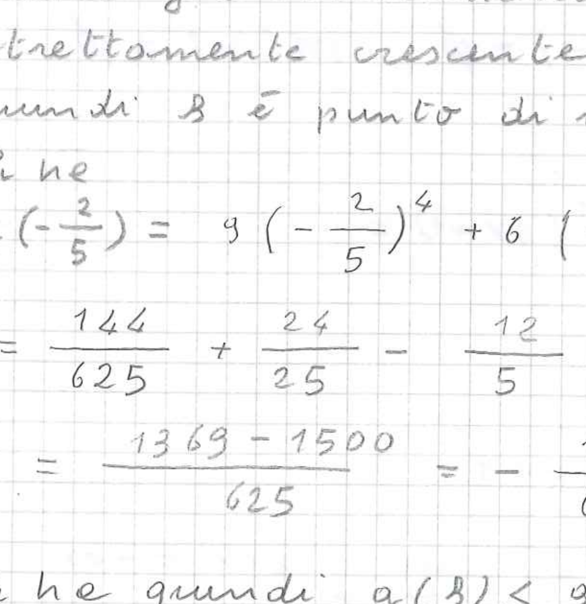
Quindi g è strettamente decrescente su $]-\infty, \beta]$, strettamente crescente su $[\beta, +\infty[$
Quindi β è punto di minimo assoluto di g
Si ha

$$g\left(-\frac{2}{5}\right) = 9\left(-\frac{2}{5}\right)^4 + 6\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 6\left(-\frac{2}{5}\right) + 1 =$$

$$= \frac{144}{625} + \frac{24}{25} - \frac{12}{5} + 1 = \frac{144 + 600 - 1500 + 625}{625} =$$

$$= \frac{1369 - 1500}{625} = -\frac{131}{625} < 0$$

Si ha quindi $g(\beta) \leq g\left(-\frac{2}{5}\right) < 0$



Esiste quindi uno ed uno solo $\alpha_1 < \beta$ tale che $g(\alpha_1) = 0$ ed esiste uno ed uno solo $\alpha_2 > \beta$ tale che $g(\alpha_2) = 0$. Essendo $g(0) = 1 > 0$, si ha

$\beta < \alpha_2 < 1$

Si ha $g(x) > 0$ se e solo se $x < \alpha_1$ o $x > \alpha_2$; si ha $g(x) < 0$ se e solo se $\alpha_1 < x < \alpha_2$

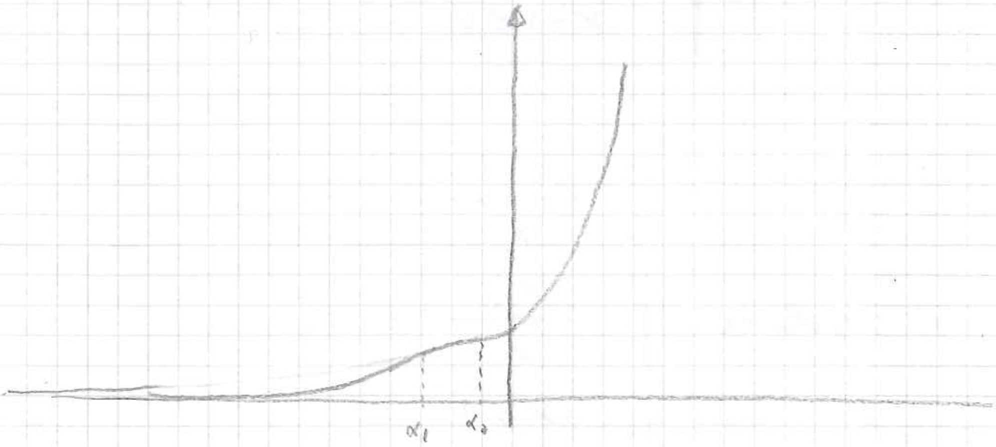
Si ha quindi $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \alpha_1$ o $x = \alpha_2$
$f''(x) > 0$ se e solo se $x < \alpha_1$ o $x > \alpha_2$, $f''(x) < 0$ se e solo se $\alpha_1 < x < \alpha_2$

Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]-\infty, \alpha_1], \ [\alpha_2, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \{ [\alpha_1, \alpha_2] \}$$

Si ha $\alpha_1 \approx -0.49$, $\alpha_2 \approx -0.22$



Esercizio 2

Si ha

$$\sqrt{n}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \sim n^{\frac{1}{2}} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \ \frac{1}{n^{3/2}}$$

Essendo $\frac{3}{2} > 1$, la serie è convergente

Esercizio 3

La serie è assegnata per $x \neq 0$. Sia $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

Si tratta di una serie geometrica di ragione

$\frac{|x-1|}{x}$; la serie è convergente se e solo se $-1 < \frac{|x-1|}{x} < 1$, cioè

$$\begin{cases} \frac{|x-1|}{x} < 1 \\ \frac{|x-1|}{x} > -1 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \frac{|x-1|}{x} < 1 \\ \frac{|x-1|}{x} > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} \frac{|x-1|}{x} < 1 \\ \frac{|x-1|}{x} > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{cases} \frac{|x-1|}{x} < 1 \\ \frac{|x-1|}{x} > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x-1}{x} < 1 \\ \frac{x-1}{x} > -1 \\ x \geq 1 \end{cases};$$

Essendo $x > 1$, si ha $x > 0$; quindi si ha

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x} < 1 \\ \frac{x-1}{x} > -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} x-1 < x \\ x-1 > -x \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè se e solo se}$$

$$\begin{cases} -1 < 0 \\ 2x > 1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè, essendo } x>0, \text{ se e solo se } \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases},$$

cioè se e solo se $x \geq 1$

Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x} < 1 \\ \dfrac{|x-1|}{x} > -1 \\ x-1<0 \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} \dfrac{-x+1}{x} < 1 \\ \dfrac{-x+1}{x} > -1 \\ x<1 \end{cases},$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{-x+1}{x} -1 < 0 \\ \dfrac{-x+1}{x} +1 > 0 \\ x<1 \end{cases},$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{-2x+1}{x} < 0 \\ \dfrac{1}{x} > 0 \\ x<1 \end{cases}, \quad \text{cioè se e solo se} \quad \begin{cases} x<0 \text{ o } x > \dfrac{1}{2} \\ x>0 \\ x<1 \end{cases},$$

cioè se e solo se $\frac{1}{2} < x < 1$

Quindi il sistema iniziale è convergente se e solo se $x > \frac{1}{2}$

L'insieme dei punti dove la serie è convergente è quindi:

$$\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

Sia $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$; la somma della serie è

$$\frac{1}{1-\dfrac{|x-1|}{x}} = \frac{x}{x-|x-1|}$$

Esercizio 4

Si ha $|4-3i| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Si ha $\mathrm{Arctg}\,\frac{-3}{4} = -\mathrm{Arctg}\,\frac{3}{4} \in \arg(4-3i)$

Si ha quindi

$$z = \sqrt[6]{5}\; e^{i\frac{-\mathrm{Arctg}\frac{3}{4}+2k\pi}{6}} \quad , \quad k=0,1,2,3,4,5$$

Esercizio 5

a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = R$

b) Si ha

$x^2 \sin(5x^2) = 0$ se e solo se

$x^2 = 0$ o $\sin(5x^2) = 0$

cioè se e solo se

$x = 0$ o $(\exists k \in Z)\ 5x^2 = k\pi$

Non può essere $k<0$; se $k=0$ si ha $x=0$

Quindi la relazione sopra è equivalente a

$x=0$ o $(\exists k \in N^*)\ 5x^2 = k\pi$

cioè a

$x=0$ o $(\exists k \in N^*)\ x^2 = \frac{1}{5}k\pi$

cioè a

$x=0$ o $(\exists k \in N^*)\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}k\pi} = \pm\frac{\sqrt{5k\pi}}{5}$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\{0\} \cup \left\{\frac{\sqrt{5k\pi}}{5}\ ;\ k \in N^*\right\} \cup \left\{-\frac{\sqrt{5k\pi}}{5}\ ;\ k \in N^*\right\}$$

c) Per $x \in R$ tale che $x^2 \sin(5x^2) \neq 0$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4 \sin^2(5x^2)}}\left(2x\sin(5x^2) + x^2\cos(5x^2)10x\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\ \frac{x\sin(5x^2) + 5x^3\cos(5x^2)}{\sqrt[3]{x^4\ \sin^2(5x^2)}}$$

d) Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $a^2 \sin(5a^2) = 0$

Supponiamo $a = 0$. Si ha $\sqrt[3]{x^4 \sin^2(5x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt[3]{x^4(5x^2)^2} = \sqrt[3]{25}\ x^{\frac{8}{3}}$.

Si ha $x\sin(5x^2) \underset{0}{\sim} 5x^3$ e $5x^3\cos(5x^2) \underset{0}{\sim} 5x^3$; quindi

$x\sin(5x^2) + 5x^3\cos(5x^2) \underset{x\to 0}{\sim} 10x^3$. Quindi

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\ \frac{x\sin(5x^2) + 5x^3\cos(5x^2)}{\sqrt[3]{x^4\sin^2(5x^2)}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\ \frac{10x^3}{\sqrt[3]{25}\ x^{8/3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{10}{3\sqrt[3]{25}}\ x^{\frac{1}{3}} = 0$$. Quindi f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$

[oppure $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 \sin(5x^2)}}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 \cdot 5x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{5}\ \frac{x^{4/3}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{5}\ x^{\frac{1}{3}} = 0$$

Quindi f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$]

Sia $K \in \mathbb{N}^*$ e sia $a = \pm \dfrac{\sqrt{5K\pi}}{5}$

Si ha

$$\lim_{x\to a} f'(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{2}{3}\ \frac{x\sin(5x^2) + 5x^3\cos(5x^2)}{\sqrt[3]{x^4\sin^2 5x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{2}{3}\ \frac{5x^3\cos(5x^2)}{\sqrt[3]{x^4\sin^2(5x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\ \frac{5a^3\cos(5a^2)}{\sqrt[3]{x^4\sin^2(5x^2)}}$$

Per K pari e $a = \dfrac{\sqrt{5K\pi}}{5}$ si ha $a^3\cos(5a^2) =$

$= a^3 > 0$; quindi

$$\lim_{x\to a} \frac{2}{3}\ \frac{5a^2\cos(5a^2)}{\sqrt[3]{x^4\sin^2(5x}} = +\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in a e $f'(a) = +\infty$

Per K pari e $a = -\dfrac{\sqrt{5K\pi}}{5}$ si ha $a^3\cos\dfrac{\sqrt{5K\pi}}{5} =$

$= a^3 < 0$; quindi

$$\lim_{x \to a} \frac{2}{3} \frac{a^3 \cos(5a^2)}{\sqrt[3]{x^4 \sin^2(5x^2)}} = -\infty$$

quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in a e $f'(a) = -\infty$

Per k dispari e $a = \frac{\sqrt{5k\pi}}{5}$ si ha $a^3 \cos(5a^2) =$
$= -a^3 < 0$; si ha quindi

$$\lim_{x \to a} \frac{2}{3} \frac{a^3 \cos(5a^2)}{\sqrt[3]{x^4 \sin^2(5x^2)}} = -\infty$$

quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in a e $f'(a) = -\infty$

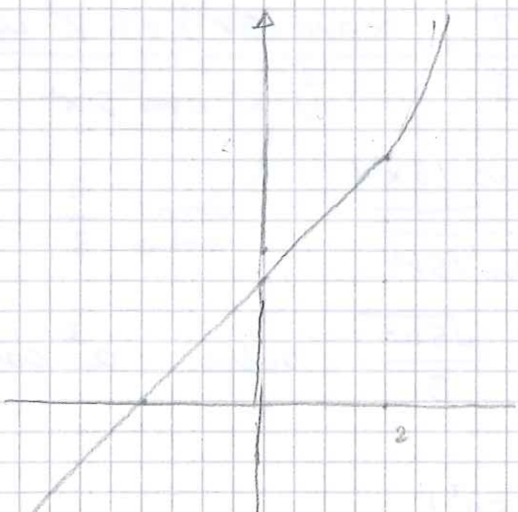
Per k dispari e $a = -\frac{\sqrt{5k\pi}}{5}$ si ha $a^3 \cos(5a^2) =$
$= -a^3 > 0$; si ha quindi

$$\lim_{x \to a} \frac{2}{3} \frac{a^3 \cos(5a^2)}{\sqrt[3]{x^4 \sin^2(5x^2)}} = +\infty$$

quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in a e $f'(a) = +\infty$

Esercizio 6

a)



b) Per il carattere locale della continuità, f è continua su $]-\infty, 2[\ \cup\ ]2, +\infty[$

Si ha

$$\lim_{\substack{x\to 2^-\\ x\neq 2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}} (x+2) = 4$$

$$\lim_{\substack{x\to 2^+\\ x\neq 2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x^2 = 4$$

$f(2) = 4$

Quindi f è continua in 2

Quindi f è continua su $\mathbb{R}$

c) Per il carattere locale della derivabilità, f è derivabile su $]-\infty, 2[\ \cup\ ]2, +\infty[$

Si ha
$$\lim_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 2^-\\ x<1}} 1 = 1$$

Quindi f è derivabile da sinistra in 2 e $f'_-(2) = 1$

Si ha

$$\lim_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}} 2x = 4$$

Quindi f è derivabile da destra in 2 e $f'_+(2) = 4$

Essendo $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, f non è derivabile in 2

Quindi l'insieme dei punti dove f è derivabile è $]-\infty, 2[\ \cup\ ]2, +\infty[$

d) Si ha

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx = \int_0^2 (x+2)\,dx + \int_2^4 x^2\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^4 = 2 + 4 + \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{74}{3}$$

Esercizio 7

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x^3}{x^2+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctg} \frac{x^2-x^3}{x^2+5} = \frac{\pi}{2}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to-\infty} \left(|x|^{\frac{5}{2}} + x^3\right) \operatorname{Arctg} \frac{x^2-x^3}{x^2+5} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^3 \frac{\pi}{2} = -\infty$$

Esercizio 8

Si ha

$$\left(\frac{\operatorname{Arcsin}(3x)}{3x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\operatorname{Arcsin}(3x)}{3x}\right)}$$

Si ha

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{\operatorname{Arcsin}(3x)}{3x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} \log\left(1 + \frac{\operatorname{Arcsin}(3x)}{3x} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} \log\left(1 + \frac{\operatorname{Arcsin}(3x) - 3x}{3x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} \frac{\operatorname{Arcsin}(3x) - 3x}{3x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{Arcsin}(3x) - 3x}{3x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}(3x)^3}{3x^3} = \frac{27}{6}\,\frac{1}{3} = \frac{3}{2}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{Arcsin}(3x)}{3x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}$$

Esercizio 9

Si ha

$$1-\cos x^2 \sim \frac{1}{2}(x^2)^2 = \frac{1}{2}x^4$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$$

Si ha quindi

$$\sin(x-x^2) = x - x^2 - \frac{1}{6}(x-x^2)^3 + o(x^3) =$$

$$= x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(x+2x^2) = x + 2x^2 - \frac{1}{6}(x+2x^2)^3 + o(x^3) =$$

$$= x + 2x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(x-x^2)\sin(x+2x^2) =$$

$$= \left(x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(x + 2x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= x^2 + 2x^3 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) - x^3 - 2x^4 - \frac{1}{6}x^4 =$$

$$= x^2 + x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

Si ha quindi

$$\log(x^2+x^3) = x^2+x^3-\frac{1}{2}(x^2+x^3)^2+o(x^4) =$$

$$= x^2+x^3-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)$$

Si ha quindi

$$\sin(x-x^2)\sin(x+2x^2)-\log(x^2+x^3) =$$

$$x^2+x^3-\frac{7}{3}x^4+o(x^4)-x^2-x^3+\frac{1}{2}x^4 =$$

$$= -\frac{11}{6}x^4+o(x^4) \sim -\frac{11}{6}x^4$$

Quindi si ha

$$\frac{\sin(x-x^2)\sin(x+2x^2)-\log(x^2+x^3}{1-\cos x^2} \sim \frac{-\frac{11}{6}x^4}{\frac{1}{2}x^4} = -\frac{11}{3}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-x^2)\sin(x+2x^3)-\log(x^2+x^3)}{1-\cos x^2} = -\frac{11}{3}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx =$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}\,dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-(x-1)}\,dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-1-2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1}{3}$$

Esercizio 11

Poniamo $\operatorname{tg} x = t$; si ha $x = \operatorname{Arctg} t$; quindi $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$; per $x = 0$, si ha $t = 0$; per $x = \frac{\pi}{4}$, si ha $t = 1$.

Per le formule parametriche si ha $\cos(2x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{2+\cos(2x)}\, dx =$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)}\, dt$$

Esistono $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+3} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

Si ha

$$1-t^2 = (At+B)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2+3) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = -1 \\ A + 3C = 0 \\ B + 3D = 1 \end{cases}$$

Si ha quindi $A = 0$, $C = 0$, $D = 1$, $B = -2$.

Si ha quindi

$$\frac{t^2-1}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+3}$$

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{t^2-1}{(t^2+3)(t^2+1)}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+3} \right) dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{2}{3}\left(\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \frac{1}{\sqrt{3}}\,dt \right)\sqrt{3} =$$

$$= \left[\operatorname{Arctg} t - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_0^1 =$$

$$= \operatorname{Arctg} 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{6} = \pi\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right)$$

Esercizio 12

Si ha

$$\int_0^1 x \log(x+1)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \log(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \log(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

Eseguendo la divisione $x^2 : (x+1)$ si trova $x^2 = (x+1)(x-1)+1$

Si ha quindi $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$. Si ha quindi

$$\left[\frac{1}{2}x^2 \log(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \log(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \log(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x + \log(x+1) \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \log(x+1) - \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}$$