

Analisi Matematica 1 - 9/6/'15 - Compito 4

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{(2x+3)^2}{\log(2x+3)},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di $f|] -\frac{3}{2}, -1[$ in $-\frac{3}{2}$ e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in $-\frac{3}{2}$;
- (e) (p. 3) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $\frac{\sqrt{e}-3}{2} \approx -0.68$, $f(\frac{\sqrt{e}-3}{2}) = 2e \approx 5.44$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^2} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x-1}{x} > \frac{1}{x-1} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^5 + z = 0 .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sin \cos x^2 ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f in un punto x del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Dire se esiste il seguente limite (cioè se la funzione è convergente per $x \rightarrow 0$) e, in caso affermativo, determinarlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} t \sqrt{1+t} dt}{e^{x^2} - 1}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{2x} - 1) + \log(1 - 2x)}{x - \sin x}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Dire se la funzione

$$f(x) = \sqrt{25x^2 + x + 1}$$

ammette asintoto per $x \rightarrow +\infty$ e, in caso affermativo, determinarlo.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x^2+1}} dx.$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos x dx.$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ \log(2x+3) \neq 0 \end{cases} \text{ cioè tali che } \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ 2x+3 \neq 1 \end{cases} \text{ cioè tali che}$$

$\begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x \neq -1 \end{cases}$ cioè tali che $-\frac{3}{2} < x < -1$ o $x > -1$

Si ha quindi $\text{dom}(f) =]-\frac{3}{2}, -1[\cup]-1, +\infty[$

b) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+3)^2}{\log(2x+3)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{\log y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{(2x+3)^2}{\log(2x+3)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(2x+3)^2}{\log(2x+3)} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(2x+3)^2}{\log(2x+3)} = +\infty$$

c) Sia $x \in \text{dom}(f)$. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(2x+3)2\log(2x+3) - \frac{1}{(2x+3)} \cdot 2(2x+3)^2}{\log^2(2x+3)} \\ &= \frac{4(2x+3)\log(2x+3) - 2(2x+3)}{\log^2(2x+3)} \\ &= \frac{2(2x+3)(2\log(2x+3) - 1)}{\log^2(2x+3)} \end{aligned}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2\log(2x+3) - 1 = 0$

cioè se e solo se $\log(2x+3) = \frac{1}{2}$, cioè se e solo se

$$2x+3 = e^{\frac{1}{2}}, \quad \text{cioè se e solo se } x = \frac{\sqrt{e} - 3}{2}$$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2 \log(2x+3) - 1 > 0$,

cioè se e solo se $\log(2x+3) > \frac{1}{2}$, cioè se e solo se

$$2x+3 > e^{\frac{1}{2}}, \text{ cioè se e solo se } x > \frac{\sqrt{e}-3}{2}$$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \frac{\sqrt{e}-3}{2}$

Si ha $\frac{\sqrt{e}-3}{2} > -1$ se e solo se $\sqrt{e}-3 > -2$, cioè

se e solo se $\sqrt{e} > 1$, cioè se e solo se $e > 1$;

cioè è vero; quindi si ha $\frac{\sqrt{e}-3}{2} > -1$

Quindi f è strettamente crescente su

$$\left[\frac{\sqrt{e}-3}{2}, +\infty[\right], f \text{ è strettamente}$$

decrecente su $]-\frac{3}{2}, -1[$ e su $]-1, \frac{\sqrt{e}-3}{2}]$

Si ha quindi

$$M(\nearrow) = \left\{ \left[\frac{\sqrt{e}-3}{2}, +\infty[\right\}, M(\rightarrow) = \emptyset$$

$$M(\searrow) = \left\{ \left] -\frac{3}{2}, -1[\right], \left] -1, \frac{\sqrt{e}-3}{2} \right] \right\}$$

d) Il prolungamento continuo di $f|_{]-\frac{3}{2}, -1[}$

in $-\frac{3}{2}$ è la funzione

$$g: \left] -\frac{3}{2}, -1[\rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in \left] -\frac{3}{2}, -1[\right. \\ 0 & \text{per } x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x \neq -\frac{3}{2}}} g'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x \neq -\frac{3}{2}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x \neq -\frac{3}{2}}} \frac{2(2x+3)(2 \log(2x+3) - 1)}{\log^2(2x+3)} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x \neq -\frac{3}{2}}} \frac{2(2x+3) \cdot 2 \log(2x+3)}{\log^2(2x+3)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x \neq -\frac{3}{2}}} \frac{4(2x+3)}{\log(2x+3)} = 0$$

Quindi g è derivabile in $-\frac{3}{2}$ e $g'(-\frac{3}{2}) = 0$

e) Sia $x \in \text{dom}(f)$. Si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot \frac{1}{\log^4(2x+3)} \left(\left(2(2 \log(2x+3) - 1) + (2x+3) \cdot \frac{2}{2x+3} \cdot 2 \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \log^2(2x+3) - 2 \log(2x+3) \cdot \frac{1}{2x+3} \cdot 2(2x+3)(2 \log(2x+3) - 1) \right) = \\ &= \frac{2}{\log^4(2x+3)} \left(\left(4 \log(2x+3) - 2 + 4 \right) \log^2(2x+3) \right. \\ &\quad \left. - 2 \log(2x+3) \cdot 2 \cdot (2 \log(2x+3) - 1) \right) = \\ &= \frac{2}{\log^3(2x+3)} \left((4 \log(2x+3) + 2) \log(2x+3) - \right. \\ &\quad \left. - 4(2 \log(2x+3) - 1) \right) = \\ &= \frac{4}{\log^3(2x+3)} (2 \log^2(2x+3) + \log(2x+3) - 4 \log(2x+3) + 2) \\ &= \frac{4}{\log^3(2x+3)} (2 \log^2(2x+3) - 3 \log(2x+3) + 2) \end{aligned}$$

Il polinomio $2y^2 - 3y + 2$ ha discriminante $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$; e ne quindi $2y^2 - 3y + 2 > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$; e ne quindi

$$2 \log^2(2x+3) - 3 \log(2x+3) + 2 > 0$$

Si ha quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $\log(2x+3) > 0$
cioè se e solo se $x > -1$.

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x < -1$.

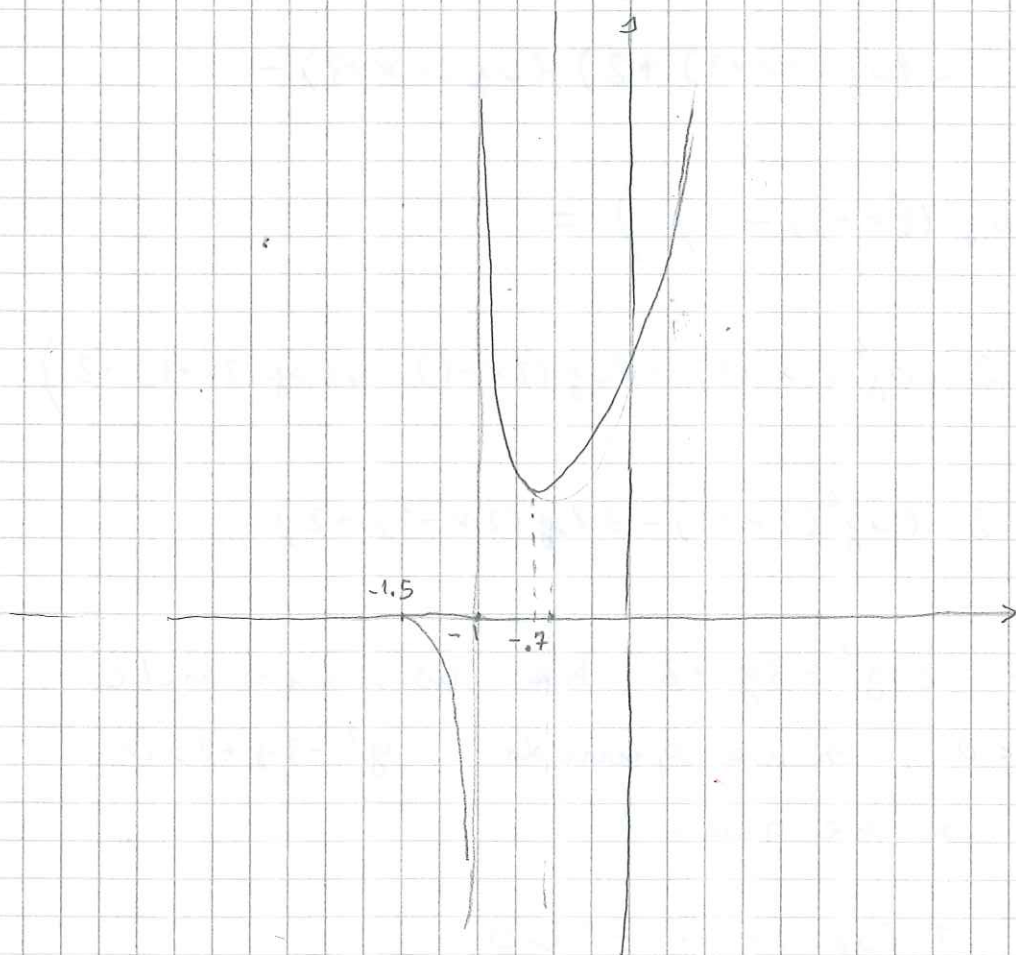
Quindi f è strettamente convessa su
 $] -1, +\infty [$, strettamente concava su $] -\frac{3}{2}, -1 [$

Si ha quindi:

$$C(\uparrow) = \{] -1, +\infty [\}, C(\downarrow) = \emptyset, C(\downarrow) = \{] -\frac{3}{2}, -1 [\}$$

$$\text{Si ha } -\frac{3}{2} = -1.5, \quad \frac{\sqrt{e}-3}{2} \approx -0.68$$

$$f\left(\frac{\sqrt{e}-3}{2}\right) = 2e \approx 5.44$$



Esercizio 2

Si ha $\sqrt{n} \sim \frac{1}{n^2} \sim n^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$

Essendo $\frac{3}{2} > 1$, la serie è convergente

Esercizio 3

La disuguaglianza è assegnata per $x \neq 0$ e $x \neq 1$

Supponiamo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

Si ha

$$\frac{x-1}{x} > \frac{1}{x-1} \quad \text{se e solo se}$$

$$\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x-1} > 0, \quad \text{cioè se e solo se}$$

$$\frac{(x-1)^2 - x}{x(x-1)} > 0, \quad \text{cioè se e solo se}$$

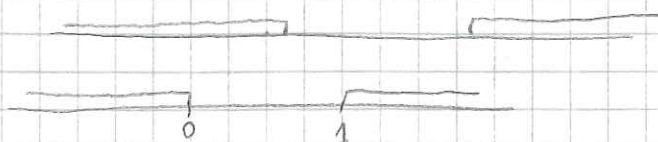
$$\frac{x^2 - 2x + 1 - x}{x(x-1)} > 0 \quad \text{cioè se e solo se}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-1)} > 0$$

Si ha $x^2 - 3x + 1 > 0$ se e solo se $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ o $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Si ha $x(x-1) > 0$ se e solo se $x < 0$ o $x > 1$

Si ha $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$



Si ha quindi $\frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-1)} > 0$ se e solo se
 $x < 0$ o $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1$ o $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Esercizio 4

Si ha

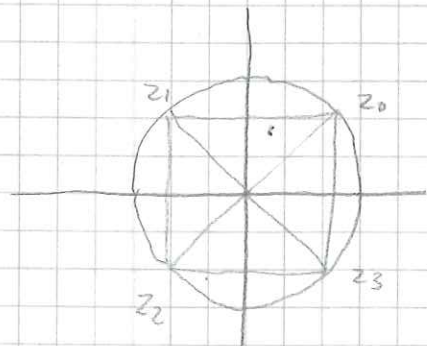
$z^5 + z = 0$ se e solo se $z(z^4 + 1) = 0$; quindi
 se e solo se $z = 0$ o $z^4 + 1 = 0$; cioè se e solo se
 $z = 0$ o $z^4 = -1$

Si ha $|-1| = 1$ e $\pi \in \arg(-1)$

Si ha quindi

$z^4 = -1$ se e solo se

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) \text{ per } k = 0, 1, 2, 3$$



Si trova

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = -i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione eseguita
 è quindi

$$\left\{ 0, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Esercizio 5

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f'(x) = \cos \cos x^2 \cdot (-\sin x^2) 2x = -2x \sin x^2 \cos \cos x^2$$

Esercizio 6

Si ha

$$\sin |x| \sim |x| \quad x \rightarrow 0$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha $e^y = 1 + y + o(y)$; si ha quindi

$$e^{2x} = 1 + 2x + o(2x)$$

Si ha

$$\cos x = 1 + o(x)$$

Si ha quindi

$$e^{2x} - \cos x = 1 + 2x + o(x) - 1 = 2x + o(x) \sim 2x$$

Si ha quindi

$$\frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|} \sim \frac{2x}{|x|} \quad x \rightarrow 0$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{|x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{|x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x < 0}} \frac{2x}{-x} = -2$$

Essendo il limite destro diverso dal limite sinistro, la funzione non è convergente per $x \rightarrow 0$

Esercizio 7

Il limite è della forma $\frac{0}{0}$; per il teorema di De Hospital si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} t \sqrt{1+t} dt}{e^{x^2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sqrt{1+2x} \cdot 2}{e^{x^2} \cdot 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sqrt{1+2x}}{e^{x^2}} = 2 \end{aligned}$$

Esercizio 8

Si ha

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6} x^3$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{6} y^3 + o(y^3)$$

Si ha quindi

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2} (2x)^2 + \frac{1}{6} (2x)^3 + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)$$

Quindi

$$e^{2x} - 1 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sin y = y - \frac{1}{6} y^3 + o(y^3)$$

Si he quindi

$$\begin{aligned}\sin(e^{2x}-1) &= \sin\left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) = \\ &= 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}\left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) = \\ &= 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) = 2x + 2x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\log(1-2x) &= -2x - \frac{1}{2}(-2x)^2 + \frac{1}{3}(-2x)^3 + o(x^3) = \\ &= -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\sin(e^{2x}-1) + \log(1-2x) &= \\ &= 2x + 2x^2 - 2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) = -\frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{8}{3}x^3\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\frac{\sin(e^x-1) + \log(1-2x)}{x - \sin x} \sim \frac{-\frac{8}{3}x^3}{\frac{1}{6}x^3} = -16$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x-1) + \log(1-2x)}{x - \sin x} = -16$$

Esercizio 10

Si ha

$$\sqrt{25x^2 + x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{25x^2} = 5x$$

Si ha

$$\sqrt{25x^2 + x + 1} - 5x = 5x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{25} \frac{1}{x} + \frac{1}{25} \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \sim$$

$$5x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{25} \frac{1}{x} + \frac{1}{25} \frac{1}{x^2} \right) \sim \frac{5}{2} x \cdot \frac{1}{25} \frac{1}{x} = \frac{1}{10}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{25x^2 + x + 1} = \frac{1}{10}$$

quindi f ammette asintoto per $x \rightarrow +\infty$ e
l'asintoto di f per $x \rightarrow +\infty$ è la retta

$$y = 5x + \frac{1}{10}$$

Esercizio 10

Si tratta dell'integrale improprio su una
semiretta positiva della funzione

$$f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\frac{x+3}{x^2+1}}$$

Si ha

$$\sqrt{\frac{x+3}{x^2+1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1$, l'integrale improprio è divergente positivamente

Esercizio 11 (1° modo)

Poniamo $\sqrt{x} = t$, sicché $x = t^2$; quindi

$$\frac{dx}{dt} = 2t. \quad \text{Per } x = 1 \text{ si ha } t = 1; \text{ per } x = 4$$

si ha $t = 2$. Sicché quindi

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_1^2 \frac{1}{t(1+t^2)} 2t dt =$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \left[\operatorname{Arctg} t \right]_1^2 =$$

$$= 2 \left(\operatorname{Arctg} 2 - \operatorname{Arctg} 1 \right) = 2 \left(\operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= 2 \operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 11 (2° modo)

sicché

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_1^4 \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= 2 \int_1^4 \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \left[\operatorname{Arctg} \sqrt{x} \right]_1^4 =$$

$$2 \left(\operatorname{Arctg} 2 - \operatorname{Arctg} 1 \right) = 2 \operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 12 (1° modo)

Sicché

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x \cos x \, dx = \\
 &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (-\sin x) \, dx = -2 \left[\frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= -\frac{2}{3} (0 - 1) = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Esercizio 12 (2° modo)

Vale la formula di Werner

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

Sicché quindi

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\sin(3x) + \sin x) \, dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \cos(3x) - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} + 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{4}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$