

# Analisi Matematica 1 - 24/6/'15 - Compito 5

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x^3},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1\*) determinare il dominio di  $f$ ;
- (b) (p. 0.9\*) calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3\*) studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- (d) (p. 3) studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\dagger)$ .

**Disegnare** approssimativamente il grafico di  $f$ . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

**NB** (\*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione:  $\sqrt[3]{e} \approx 1.40$ ,  $\frac{1}{3e} \approx 0.12$ ,  $e^{\frac{7}{12}} \approx 1.79$ ,  $\frac{7}{12 \cdot e^{\frac{7}{4}}} \approx 0.10$ .

**Svolgimento e risposta.**

2. (p. 3) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{1}{n} \right).$$

**Svolgimento e risposta.**

3. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^5 = -3 + 7i.$$

**Svolgimento e risposta.**

4. (p. 1) Sia  $f$  la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg}^2(2x) \cdot \operatorname{tg} x);$$

calcolare la derivata di  $f$  in un punto  $x$  del dominio. (Non è necessario semplificare il risultato).

**Svolgimento e risposta.**

5. (p. 3) Dire se la funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{16x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1}$$

ammette asintoto per  $x \rightarrow +\infty$  e, in caso affermativo, determinarlo.

**Svolgimento e risposta.**

6. (p. 2) Dire se esiste il seguente limite (cioè se la funzione è convergente per  $x \rightarrow 0$ ) e, in caso affermativo, determinarlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{\operatorname{Arcsin} |x|}.$$

**Svolgimento e risposta.**

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \sqrt{x} + \sin x^2 + x^2 e^{-x}}{\log(x^2 + 1) + \cos x}.$$

**Svolgimento e risposta.**

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2}x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{5}{x}} - 1}.$$

**Svolgimento e risposta.**

9. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx .$$

**Suggerimento.** Si ha  $x^8 = (x^4)^2$ .

**Svolgimento e risposta.**

11. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(3x) \cos x dx .$$

**Svolgimento e risposta.**

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \operatorname{Arctg}(2x) dx .$$

Si chiede di non usare formule che danno direttamente la primitiva di  $\frac{1}{1+(ax)^2}$ , per  $a \neq 1$

**Svolgimento e risposta.**