Analisi Matematica 1 - 24/6/'15 - Compito 5

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = \frac{\log x}{x^3},$$
rispondendo alle seguenti domande:

   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);

   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

   (d) (p. 3) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

   NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

   Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $\sqrt[3]{e} \approx 1.40$, $\frac{1}{3e} \approx 0.12$, $e^{\frac{7}{12}} \approx 1.79$, $\frac{7}{12 \cdot e^{\frac{7}{4}}} \approx 0.10$.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 3) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n}\right).$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^5=-3+7i\,.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x)=\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}^2(2x)\cdot\operatorname{tg}x\right)\ ;$$

calcolare la derivata di f in un punto x del dominio. (Non è necessario semplificare il risultato).

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Dire se la funzione

$$f(x)=\sqrt[4]{16x^4+3x^3+2x^2+x+1}$$

ammette asintoto per $x\to+\infty$ e, in caso affermativo, determinarlo.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Dire se esiste il seguente limite (cioè se la funzione è convergente per $x \to 0$) e, in caso affermativo, determinarlo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{\operatorname{Arcsin} |x|} \, .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log \sqrt{x} + \sin x^2 + x^2 e^{-x}}{\log(x^2+1) + \cos x} \, .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} x \log(1 + \frac{1}{x})}{e^{\frac{5}{x}} - 1} \, .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}\,dx\,.$$

Suggerimento. Si ha $x^8 = (x^4)^2$.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(3x)\cos x\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^3\,\mathrm{Arctg}(2x)\,dx\,.$$

Si chiede di non usare formule che danno direttamente la primitiva di $\frac{1}{1+(ax)^2}$, per $a \neq 1$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha $\mathrm{dom}(f) =]0, +\infty[$

b) Si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) Sia $x \in]0, +\infty[$. Si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x^3 - 3x^2 \log x}{x^6} = \frac{x^2(1 - 3\log x)}{x^6} =$$

$$= \frac{1 - 3\log x}{x^4}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $1 - 3\log x = 0$, cioè se e solo se $\log x = \frac{1}{3}$, cioè se e solo se $x = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $1 - 3\log x > 0$, cioè se e solo se $\log x < \frac{1}{3}$, cioè se e solo se $x < \sqrt[3]{e}$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x > \sqrt[3]{e}$

Si ha quindi f strettamente crescente su $]0, \sqrt[3]{e}]$, f strettamente decrescente su $[\sqrt[3]{e}, +\infty[$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]0, \sqrt[3]{e}]\}, \quad \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{M}(\searrow) = \{[\sqrt[3]{e}, +\infty[\}$$

d) Sia $x \in]0, +\infty[$. Si ha

$$f''(x) = \frac{-\frac{3}{x} x^4 - 4x^3(1 - 3\log x)}{x^8} = \frac{x^3(-3 - 4 + 12\log x)}{x^8} =$$

$$= \frac{12\log x - 7}{x^5}$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $12 \log x - 7 = 0$, cioè se e solo se $\log x = \frac{7}{12}$, cioè se e solo se $x = e^{\frac{7}{12}}$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $12 \log x - 7 > 0$, cioè se e solo se $\log x > \frac{7}{12}$, cioè se e solo se $x > e^{\frac{7}{12}}$.

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x < e^{\frac{7}{12}}$

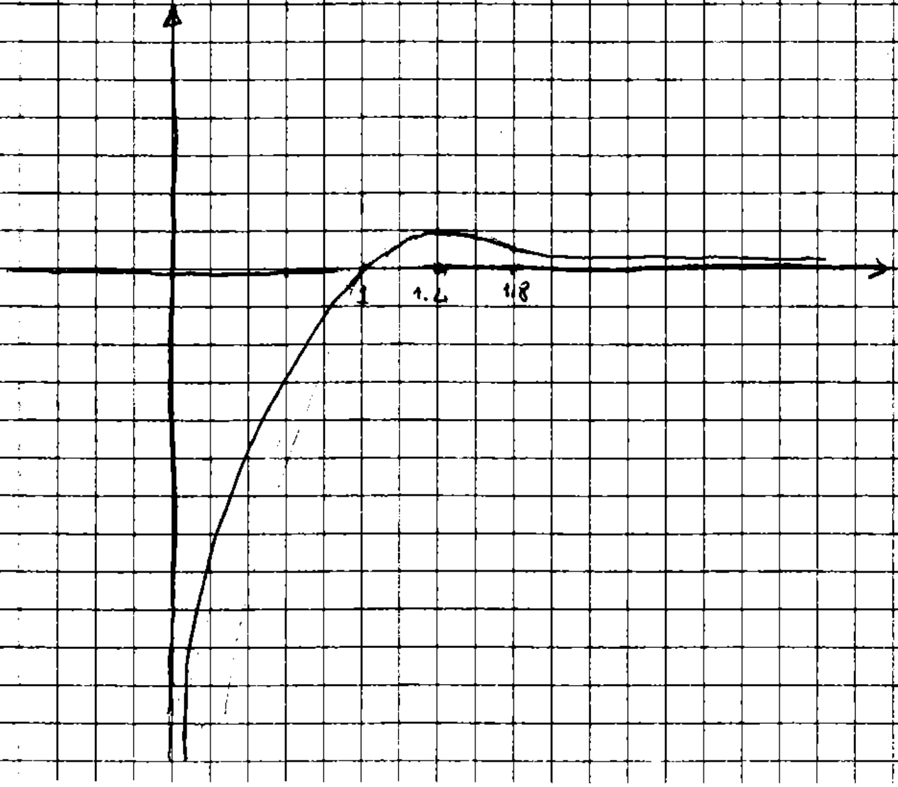
Quindi f è strettamente convessa su $\left[e^{\frac{7}{12}}, +\infty \right[$, f è strettamente concava su $\left] 0, e^{\frac{7}{12}} \right]$.

Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ \left[e^{\frac{7}{12}}, +\infty \right[\right\}, \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ \left] 0, e^{\frac{7}{12}} \right] \right\}$$

Si ha $\sqrt[3]{e} \approx 1.40$, $f(\sqrt[3]{e}) = \frac{1}{3e} \approx 0.12$, $e^{\frac{7}{12}} \approx 1.79$

$$f\left(e^{\frac{7}{12}}\right) = \frac{7}{12\, e^{7/12}} \approx 0.10$$



Esercizio 2

Per $x \to 0$ si ha

$$e^x = 1 + x + o(x) \qquad e \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Si ha quindi

$$e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{3}{2}\,\frac{1}{n^2}$$

Essendo $2 > 1$, la serie è convergente

Esercizio 3

Si ha

$$|-3 + 7i| = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58} \qquad e$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{7}{-3} + \pi = -\mathrm{Arctg}\,\frac{7}{3} + \pi \in \arg(-3 + 7i)$$

Si ha quindi

$$z = \sqrt[5]{\sqrt{58}}\; e^{i\frac{-\mathrm{Arctg}\frac{7}{3} + \pi + 2k\pi}{5}} =$$

$$= \sqrt[10]{58}\; e^{i\frac{-\mathrm{Arctg}\frac{7}{3} + \pi + 2k\pi}{5}} \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Esercizio 4

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\mathrm{tg}^2(2x)\,\mathrm{tg}\,x\right)}\left(2\,\mathrm{tg}(2x)\,\frac{1}{\cos^2(2x)}\,2\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}^2(2x)\,\frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$

4.

$$= \frac{1}{\cos^2(tg(2x)^2 tg x)} \cdot \left(4 \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(2x)} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)} \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(tg(2x)\, tg x)} \left(\frac{8 \sin x \cos x \sin x}{\cos^3(2x) \cos x} + \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2(2x)} \frac{1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(tg(2x)\, tg x)} \left(\frac{8 \sin^2 x}{\cos^3(2x)} + \frac{4 \sin^2 x}{\cos^2(2x)} \right) =$$

$$= \frac{4 \sin^2 x}{\cos^3(2x)} \frac{1}{\cos^2(tg(2x)\, tg x)} \left(2 + \cos(2x) \right)$$

Esercizio 5

Si ha

$$f(x) = \sqrt[4]{16x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt[4]{16x^4} = 2x$$

Si ha

$$f(x) - 2x = \sqrt[4]{16x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1} - 2x =$$

$$= 2x \left(\sqrt[4]{1 + \frac{3}{16}\frac{1}{x} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{16}\frac{1}{x^4}} - 1 \right) \underset{x \to +\infty}{\sim}$$

$$2x \frac{1}{4} \left(\frac{3}{16}\frac{1}{x} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{16}\frac{1}{x^4} \right) \underset{x \to +\infty}{\sim}$$

$$2x \frac{1}{4} \frac{3}{16} \frac{1}{x} = \frac{3}{32}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \frac{3}{32}$$

Quindi f ammette asintoto per $x \to +\infty$ e l'asintoto di f per $x \to +\infty$ è la retta

$$y = 2x + \frac{3}{32}$$

Esercizio 6

Si ha

$$\operatorname{Arcsin}|x| \underset{x \to 0}{\sim} |x|$$

Per $y \to 0$ si ha $e^y = 1 + y + o(y)$.

Si ha quindi

$$e^{2x} = 1 + 2x + o(x)$$

Si ha

$$\cos x = 1 + o(x)$$

Si ha quindi

$$e^{2x} - \cos x = 1 + 2x + o(x) - 1 = 2x + o(x) \sim 2x$$

Si ha quindi

$$\frac{e^{2x} - \cos x}{\operatorname{Arcsin}|x|} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2x}{|x|}$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{2x} - \cos x}{\operatorname{Arcsin}|x|} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x}{|x|} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0+ \\ x > 0}} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{e^{2x} - \cos x}{\operatorname{Arcsin}|x|} = \lim_{x \to 0-} \frac{2x}{|x|} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0- \\ x < 0}} \frac{2x}{-x} = -2$$

Essendo il limite destro diverso dal limite sinistro, f non è convergente per $x \to 0$

Esercizio 7

Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\sqrt{x} + \sin x^2 + x^2 e^{-x}}{\log(x^2+1) + \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log\sqrt{x}}{\log(x^2+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log\sqrt{x}}{\log x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2}\log x}{2\log x} = \frac{1}{4}$$

Esercizio 8

Si ha

$$e^{\frac{5}{x}} - 1 \sim \frac{5}{x}$$

Si ha

$$\sqrt[4]{x^4+x^2+1} = x\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\sqrt[4]{1+y} = 1 + \frac{1}{4}y + o(y)$$

Si ha quindi

$$x\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = x\left(1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + \frac{1}{4}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si ha

$$\sqrt{x^2+x+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + \binom{\frac{1}{2}}{2}y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$

Si ha quindi

$$x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{3}{8}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Per $y \to 0$ si ha

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

Si ha quindi

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Quindi

$$\frac{1}{2}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si ha quindi

$$\sqrt[4]{x^4+x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{4}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x + \frac{1}{4}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x} =$$

$$= -\frac{3}{8}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim -\frac{3}{8}\frac{1}{x}$$

Si ha quindi

$$\frac{\sqrt[4]{x^4+x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{5}{x}} - 1} \sim \frac{-\frac{3}{8}\frac{1}{x}}{5\frac{1}{x}} = -\frac{3}{40}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{5}{x}} - 1} = -\frac{3}{40}$$

Esercizio 9

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f:]0,1] \to R, \quad x \to \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Si ha

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1$, l'integrale improprio è convergente.

Esercizio 10

Si ha

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{1+(x^4)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+(x^4)^2}\, 4x^3\, dx = \frac{1}{4}\Big[\operatorname{Arctg} x^4\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{Arctg} 1 = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$$

Esercizio 11

Applichiamo la formula di Werner

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$$

Si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \big(\sin(4x) + \sin(2x)\big)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{8}} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}\Big) =$$

$$= \frac{3-\sqrt{2}}{8}$$

Esercizio 12

Si ha

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \operatorname{Arctg}(2x)\, dx =$$

$$= \Big[\frac{1}{4}x^4 \operatorname{Arctg}(2x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}x^4 \frac{1}{1+(2x)^2}\, 2\, dx =$$

$$= \Big[\frac{1}{4}x^4 \operatorname{Arctg}(2x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4}{1+4x^2}\, dx$$

Eseguendo la divisione $x^4 : (4x^2+1)$ si trova

$$x^4 = (4x^2+1)\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{16}$$

Si ha quindi

$$\frac{x^4}{1+4x^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{16}}{1+4x^2}$$

Si ha quindi

$$\left[\frac{1}{4}x^4 \operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4}{1+4x^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 \operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{1+4x^2}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{8}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1}{32}x\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{32}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2\,dx\,\frac{1}{2} =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{32}x - \frac{1}{64}\operatorname{Arctg}(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{\pi}{4} - \frac{1}{24}\,\frac{1}{8} + \frac{1}{32}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{64}\,\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{64} - \frac{1}{192} = \frac{2}{192} = \frac{1}{96}$$