

Analisi Matematica 1 - 13/7/'15 - Compito 6

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 5) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2+x+1}}{x-1},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. 1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 1.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (domanda non assegnata) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $\frac{1-\sqrt{17}}{4} \approx -0.78$, $\frac{1+\sqrt{17}}{4} \approx 1.28$, $f(\frac{1-\sqrt{17}}{4}) \approx -1.29$, $f(\frac{1+\sqrt{17}}{4}) \approx 179.71$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} - 1}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa, esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti::

$$z^2 = \sqrt{3} + i.$$

Suggerimento. Si utilizzino le formule di bisezione.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n + n^4 + 1}{n 3^n + n^2 + 1} z^n.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \log(\sqrt{x^2 - 4} - x + 1);$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare l'insieme D degli $x \in \text{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ e in tali x calcolare la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{Arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + \sin x + \sqrt{x}}{\operatorname{Arctg} x^2 + \log x + 1}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \log(1+3x) - \sin(3x - \frac{3}{2}x^2)}{2x - \sin(2x)}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 2) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2^x \sqrt{x-1}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^3 \frac{1}{x \log^2 x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \operatorname{Arcsin}(2x) dx .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1-2^x}{1+2^x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+x+1}}{x-1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+x+1}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2+x+1}}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2+x+1}}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

c) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$f'(x) = \frac{e^{x^2+x+1} (2x+1)(x-1) - e^{x^2+x+1}}{(x-1)^2} =$$

$$= e^{x^2+x+1} \cdot \frac{2x^2 - 2x + x - 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= e^{x^2+x+1} \cdot \frac{2x^2 - x - 2}{(x-1)^2}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2x^2 - x - 2 = 0$, cioè se

$$\text{se e solo se } x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2 - x - 2 > 0$, cioè se e

$$\text{se e solo se } x < \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \quad \text{o} \quad x > \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

$$\text{Si ha } f'(x) < 0 \text{ se e solo se } \frac{1 - \sqrt{17}}{4} < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

quindi f è strettamente crescente su

$$\left] -\infty, \frac{1-\sqrt{12}}{4} \right] \text{ e su } \left[\frac{1+\sqrt{12}}{4}, +\infty \right[,$$

f è strettamente decrescente su

$$\left[\frac{1-\sqrt{12}}{4}, 1 \right[\text{ e su } \left] 1, \frac{1+\sqrt{12}}{4} \right]$$

Si ha quindi

$$m(\nearrow) = \left\{ \left] -\infty, \frac{1-\sqrt{12}}{4} \right], \left[\frac{1+\sqrt{12}}{4}, +\infty \right[\right\}$$

$$m(\rightarrow) = \emptyset$$

$$m(\searrow) = \left\{ \left[\frac{1-\sqrt{12}}{4}, 1 \right[, \left] 1, \frac{1+\sqrt{12}}{4} \right] \right\}$$

d) Per $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{x^2+x+1} (2x+1) \frac{2x^2-x-2}{(x-1)^2} + \\ &+ e^{x^2+x+1} \frac{(4x-1)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2-x-2)}{(x-1)^4} = \\ &= e^{x^2+x+1} \left(\frac{4x^3-2x^2-4x+2x^2-x-2}{(x-1)^2} + \frac{(4x-1)(x-1)-2(2x^2-x-2)}{(x-1)^3} \right) = \\ &= e^{x^2+x+1} \left(\frac{4x^3-5x-2}{(x-1)^2} + \frac{4x^2-4x-x+1-4x^2+2x+4}{(x-1)^3} \right) = \\ &= e^{x^2+x+1} \frac{(4x^3-5x-2)(x-1) - 3x+5}{(x-1)^3} = \\ &= e^{x^2+x+1} \frac{4x^4-5x^2-2x-4x^3+5x+2-3x+5}{(x-1)^3} = \\ &= e^{x^2+x+1} \frac{4x^4-4x^3-5x^2+7}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Si ha

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$g'(x) = 16x^3 - 12x^2 - 10x = 2x(8x^2 - 6x - 5)$$

Si ha $g'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ o $8x^2 - 6x - 5 = 0$

cioè se e solo se $x = 0$ o $x = -\frac{1}{2}$ o $x = \frac{5}{4}$

Si ha $g'(x) > 0$ se e solo se $-\frac{1}{2} < x < 0$ o $x > \frac{5}{4}$.

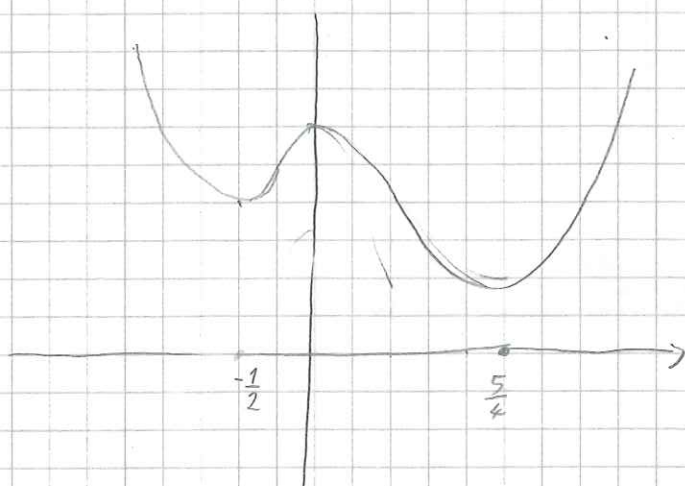
Si ha $g'(x) < 0$ se e solo se $x < -\frac{1}{2}$ o $0 < x < \frac{5}{4}$

Quindi g è strettamente crescente su

$[-\frac{1}{2}, 0]$ e su $[\frac{5}{4}, +\infty[$, strettamente

decrecente su $] -\infty, -\frac{1}{2}]$ e su $[0, \frac{5}{4}]$

$$\text{Si ha } g(-\frac{1}{2}) = \frac{13}{2}, g(0) = 7, g(\frac{5}{4}) = \frac{73}{64}$$



Per $x \leq 0$ si ha quindi $g(x) \geq g(-\frac{1}{2}) = \frac{13}{2}$,

Per $x \geq 0$ si ha $g(x) \geq g(\frac{5}{4}) = \frac{23}{64}$

In particolare per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $g(x) > 0$

Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7 > 0$

Si ha quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $x > 1$, $f''(x) < 0$ se e solo se $x < 1$.

Quindi f è strettamente convessa su $]1, +\infty[$,
strettamente concava su $]-\infty, 1[$.

Si ha quindi

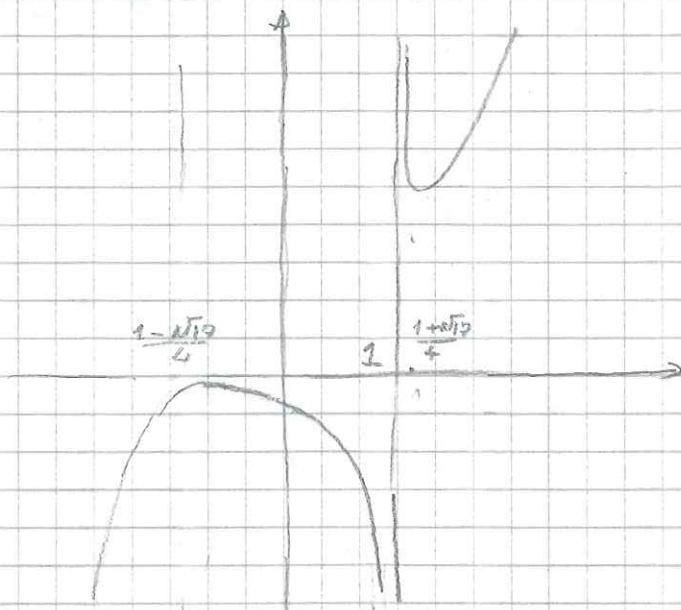
$$C(\uparrow) = \{]1, +\infty[\}, C(\downarrow) = \emptyset, C(\downarrow) = \{]-\infty, 1[\}$$

Si ha

$$\frac{1+\sqrt{12}}{4} \approx -0.78, \quad \frac{1+\sqrt{12}}{4} \approx 1.28$$

$$f\left(\frac{1-\sqrt{12}}{4}\right) = -4 \frac{e^{\frac{19-3\sqrt{12}}{8}}}{3+\sqrt{12}} \approx -1.29$$

$$f\left(\frac{1+\sqrt{12}}{4}\right) = 4 \frac{e^{\frac{19+3\sqrt{12}}{8}}}{\sqrt{12}-3} \approx 179.71, \quad f(0) = -e$$



Esercizio 2

Se ha

$$\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} - 1} \sim \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n^2}$$

quindi la serie è convergente

Esercizio 3

Se ha

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

Esiste un argomento di $1 + \sqrt{3}i$ se e solo se

$$\begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi $\frac{\pi}{6} \in \arg(1 + \sqrt{3}i)$

Se ha quindi

$$z = \pm \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) =$$

$$= \pm \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} \right) =$$

$$= \pm \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \right) =$$

$$= \pm \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} \right) =$$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} \right)$$

Esercizio 4

Se ha

$$\left| \frac{n^2 2^n + n^4 + 1}{n 3^n + n^2 + 1} z^n \right| \sim \frac{n^2 2^n}{n 3^n} |z|^n =$$

$$= n \left(\frac{2}{3} |z| \right)^n$$

La serie di potenze è assolutamente convergente se e solo se

$$\frac{2}{3} |z| < 1$$

cioè se e solo se

$$|z| < \frac{3}{2}$$

Il raggio di convergenza della serie di potenze è quindi $\frac{3}{2}$.

Per $|z| = \frac{3}{2}$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 2^n + n^4 + 1}{n 3^n + n^2 + 1} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2}{3} |z| \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

Quindi la serie di potenze non è convergente in z .

Esercizio 6

Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} - x + 1 > 0 \end{cases}$$

O sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} > x - 1 \end{cases} ; \text{ quando } x$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} > x - 1 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} > x - 1 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

O sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} > x - 1 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \text{ é equivalente a } \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 > (x - 1)^2 \\ x \geq 1 \end{cases} ;$$

$$\text{ou } \begin{cases} x^2 - 4 > (x - 1)^2 \\ x \geq 1 \end{cases} ; \text{ ou } \begin{cases} x^2 - 4 > x^2 - 2x + 1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} x^2 - 4 > x^2 - 2x + 1 \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x > 5 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x < 1 \end{cases}$$

O sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} > x - 1 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \text{ é equivalente a } \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x < 1 \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} x < -2 \text{ ou } x \geq 3 \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \text{ ou } x \geq 3 \\ x < 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < -2 \end{cases}$$

Il sistema sopra è quindi equivalente a

$$x \leq -2 \text{ o } x > \frac{5}{2}$$

Si ha quindi $\text{dom}(f) =]-\infty, -2] \cup]\frac{5}{2}, +\infty[$

Supponiamo $x \neq -2$; f è derivabile in x e si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-4} - x + 1} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-4} - x + 1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Per $x = -2$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow -2} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\sqrt{x^2-4} - x + 1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 \right) = -\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\mathbb{R}$ in -2 e si ha

$$f'(-2) = -\infty$$

Si ha dunque $D = \text{dom}(f) =]-\infty, -2] \cup]\frac{5}{2}, +\infty[$

Esercizio 6

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Arctg } x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{1-\cos x} \log \frac{\text{Arctg } x}{x}}$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} \log \frac{\text{Arctg } x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \log \left(1 + \frac{\operatorname{Arctg} x}{x} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \log \left(1 + \frac{\operatorname{Arctg} x - x}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \frac{\operatorname{Arctg} x - x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \frac{-\frac{x^3}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \left(-\frac{x^2}{3} \right) = -\frac{2}{3}$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{1-\cos x} \log \frac{\operatorname{Arctg} x}{x}} = e^{-\frac{2}{3}}$$

Esercizio 2

$$\text{Si ha } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{-x} + \sin x + \sqrt{x}}{\operatorname{Arctg} x^2 + \log x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x} = +\infty$$

Esercizio 3

$$\text{Si ha } 2x - \sin(2x) \sim \frac{1}{6} (2x)^3 = \frac{4}{3} x^3$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2} y + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} \right) y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{8} y^2 + o(y^2)$$

Si ha quindi:

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2} (2x) - \frac{1}{8} (2x)^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 + o(y^3)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\log(1+3x) &= 3x - \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{3}(3x)^3 + o(x^3) = \\ &= 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x} \log(1+3x) &= \left(1+x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \left(3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)\right) = \\ &= 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3) + 3x^2 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^3 = \\ &= 3x - \frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\sin\left(3x - \frac{3}{2}x^2\right) &= 3x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}\left(3x - \frac{3}{2}x^2\right)^3 + o(x^3) = \\ &= 3x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3) = 3x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x} \log(1+3x) - \sin\left(3x - \frac{3}{2}x^2\right) &= \\ &= 3x - \frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + o(x^3) - 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 = \\ &= \frac{15}{2}x^3 + o(x^3) \sim \frac{15}{2}x^3\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\frac{\sqrt{1+2x} \log(1+3x) - \sin\left(3x - \frac{3}{2}x^2\right)}{2x - \sin(2x)} \sim \frac{\frac{15}{2}x^3}{\frac{4}{3}x^3} = \frac{45}{8}$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \log(1+3x) - \sin(3x - \frac{3}{2}x^2)}{2x - \sin(2x)} = \frac{45}{8}$$

Esercizio 3

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2^x \sqrt{x-1}}$$

L'integrale improprio è convergente se sono convergenti gli integrali impropri

$$\int_1^2 \frac{1}{2^x \sqrt{x-1}} dx \quad e \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{2^x \sqrt{x-1}} dx$$

L'integrale improprio $\int_1^2 \frac{1}{2^x \sqrt{x-1}} dx$ è un

integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra. Si ha

$$\frac{1}{2^x \sqrt{x-1}} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2 \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$$

Essendo l'esponente $\frac{1}{2} < 1$, l'integrale improprio

$$\int_1^2 \frac{1}{2^x \sqrt{x-1}} dx \text{ è convergente}$$

L'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2^x \sqrt{x-1}} dx$ è un

integrale improprio su una semiretta positiva

Sicché

$$\frac{1}{2^x \sqrt{x-1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x \sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Essendo la base dell'esponentiale < 1 , l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2^x \sqrt{x-1}} dx$ è convergente.

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente

Esercizio 10

Sicché

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{x \log^2 x} dx &= \int_2^3 (\log x)^{-2} \frac{1}{x} dx = \\ &= \left[\frac{(\log x)^{-1}}{-1} \right]_2^3 = \left[-\frac{1}{\log x} \right]_2^3 = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} \end{aligned}$$

Esercizio 11

Sicché

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} \arcsin(2x) dx &= \\ &= \left[x \arcsin(2x) \right]_0^{\frac{1}{4}} - \int_0^{\frac{1}{4}} x \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 dx = \\ &= \left[x \arcsin(2x) \right]_0^{\frac{1}{4}} - 2 \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} (-8x) dx \right) \left(-\frac{1}{8} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[x \operatorname{Arccosm}(2x) \right]_0^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \left[\frac{(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{4}} = \\
 &= \left[x \operatorname{Arccosm}(2x) + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} \right]_0^{\frac{1}{4}} = \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{Arccosm} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Esercizio 12 (1° modo)

Poniamo $2^x = t$; ne ha $x = \log_2 t$; ne ha quindi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t \log 2}$$

Per $x=0$ ne ha $t=1$; per $x=1$, ne ha $t=2$

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1-2^x}{1+2^x} dx = \int_1^2 \frac{1-t}{1+t} \frac{1}{t \log 2} dt =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \cdot \int_1^2 \frac{1-t}{t(t+1)} dt$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1-t}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

Si ha

$$1-t = A(t+1) + Bt$$

Per $t=0$, ne ha $1=A$; quindi $A=1$

Per $t=-1$, ne ha $2=-B$; quindi $B=-2$

Si ha quindi

$$\frac{1-t}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t+1}$$

Sehe genau

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt &= \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t+1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{\log 2} \left[\log t - 2 \log(t+1) \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{\log 2} \left[\log \frac{4}{(1+1)^2} \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{\log 2} \left(\log \frac{2}{9} - \log \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{\log 2} \log \frac{8}{9} = \frac{1}{\log 2} (3 \log 2 - 2 \log 3) = 3 - 2 \frac{\log 3}{\log 2} \end{aligned}$$

Übung 12 (20 Punkte)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-2^x}{1+2^x} dx &= \int_0^1 \frac{1+2^x - 2 \cdot 2^x}{1+2^x} dx = \int_0^1 \left(1 - 2 \frac{2^x}{1+2^x} \right) dx = \\ &= \int_0^1 dx - 2 \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{1}{1+2^x} 2^x \log 2 dx = \\ &= \left[x - \frac{2}{\log 2} \log(1+2^x) \right]_0^1 = \\ &= 1 - \frac{2}{\log 2} \log 3 + \frac{2}{\log 2} \log 2 = \\ &= 3 - 2 \frac{\log 3}{\log 2} \end{aligned}$$