

Analisi Matematica 1 - 8/9/'15

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (2x + 3) \log^3(2x + 3),$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in $-\frac{3}{2}$ e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in $-\frac{3}{2}$;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $\frac{e^{-3}-3}{2} \approx -1.48$, $\frac{27}{e^3} \approx 1.34$, $\frac{e^{-2}-3}{2} \approx -1.43$, $\frac{8}{e^2} \approx 1.08$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 3) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + \log n}{n^2 + 3 \log n}.$$

Suggerimento. Non essendo la serie a termini positivi, non si può usare il criterio del confronto; ci si può ricondurre in altra maniera ad una serie nota.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa, esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 = 1 + \sqrt{3}i.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x+3}{x+1} < x.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = 2^{x \operatorname{Arctg}(\sqrt{x} \log x)};$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f nei punti di $\operatorname{dom}(f)$ (non è necessario semplificare il risultato).

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x|^{\frac{3}{2}} - x^3 \right) e^{\frac{x+1}{x+3}}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^{2x} - e^{3x}}{3 \log \cos x}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt[5]{x^5 + 3x^3 + x}}{\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - x}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \operatorname{Argsh}(2x) dx .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che $2x+3 > 0$, cioè tali che $x > -\frac{3}{2}$; si ha quindi $\text{dom}(f) =]-\frac{3}{2}, +\infty[$

b) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+3) \log^3(2x+3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} (2x+3) \log^3(2x+3) = \lim_{y \rightarrow 0} y \log^3 y = 0$$

c) Sia $x \in \text{dom}(f)$. Si ha

$$f'(x) = 2 \log^3(2x+3) + (2x+3) 3 \log^2(2x+3) \frac{1}{2x+3} 2$$

$$= 2 \log^2(2x+3) (\log(2x+3) + 3)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\log^2(2x+3) = 0$ o

$\log(2x+3) + 3 = 0$, cioè se e solo se $\log(2x+3) = 0$

o $\log(2x+3) = -3$, cioè se e solo se $2x+3 = 1$ o

$2x+3 = e^{-3}$, cioè se e solo se $x = -1$ o $x = \frac{e^{-3}-3}{2}$.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $\log(2x+3) + 3 > 0$ e

$\log(2x+3) \neq 0$, cioè se e solo se $x > \frac{e^{-3}-3}{2}$ e $x \neq -1$

Si ha $\frac{e^{-3}-3}{2} < -1$ se e solo se $e^{-3}-3 < -2$,

cioè se e solo se $e^{-3} < 1$, cioè se e solo se $-3 < 0$;

non è vero; si ha dunque $\frac{e^{-3}-3}{2} < -1$

Si ha quindi $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \frac{e^{-3}-3}{2}$.

Quindi f è strettamente crescente su

$[\frac{e^{-3}-3}{2}, -1]$ e su $[-1, +\infty[$; quindi

2
su $\left[\frac{e^{-3}-3}{2}, +\infty \right]$; f è strettamente
decrescente su $\left] -\frac{3}{2}, \frac{e^{-3}-3}{2} \right]$.

Si ha quindi

$$M(\nearrow) = \left\{ \left[\frac{e^{-3}-3}{2}, +\infty \right] \right\}, \quad M(\rightarrow) = \emptyset$$

$$M(\searrow) = \left\{ \left[-\frac{3}{2}, \frac{e^{-3}-3}{2} \right] \right\}$$

d) Il prolungamento continuo di f in $-\frac{3}{2}$ è la
funzione g

$$g: \left[-\frac{3}{2}, +\infty \right[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{per } x > -\frac{3}{2} \\ 0 & \text{per } x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} 2 \log^2(2x+3) (\log(2x+3) + 3) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \log^3(2x+3) = -\infty \end{aligned}$$

Quindi g è derivabile rispetto a $\mathbb{R}$ in $-\frac{3}{2}$ e

$$g'(-\frac{3}{2}) = -\infty$$

e) Sia $x \in \text{dom}(f)$. Si ha

$$f'(x) = 2 \log^3(2x+3) + 6 \log^2(2x+3)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6 \log^2(2x+3) \cdot \frac{1}{2x+3} \cdot 2 + 12 \log(2x+3) \cdot \frac{1}{2x+3} \cdot 2 = \\ &= \frac{12}{2x+3} \log(2x+3) (\log(2x+3) + 2) \end{aligned}$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $\log(2x+3) = 0$ o

$\log(2x+3) + 2 = 0$, avē se e solo se $2x+3 = 1$ o

$2x+3 = e^{-2}$, avē se e solo se $x = -1$ o $x = \frac{e^{-2}-3}{2}$

Si ha $\frac{e^{-2}-3}{2} < -1$ se e solo se $e^{-2}-3 < -2$, avē

se e solo se $e^{-2} < 1$; avē se e solo se $-2 < 0$; uō ē

vero; si ha quindi $\frac{e^{-2}-3}{2} < -1$.

Si ha quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{e^{-2}-3}{2}$ o

$x > -1$; si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $\frac{e^{-2}-3}{2} < x < -1$.

Quindi f ē strettamente convessa su $]-\frac{3}{2}, \frac{e^{-2}-3}{2}]$

e su $[-1, +\infty[$, f ē strettamente concava su

$[\frac{e^{-2}-3}{2}, -1]$.

Si ha quindi

$$C(\uparrow) = \{]-\frac{3}{2}, \frac{e^{-2}-3}{2}], [-1, +\infty[\}, C(\downarrow) = \emptyset$$

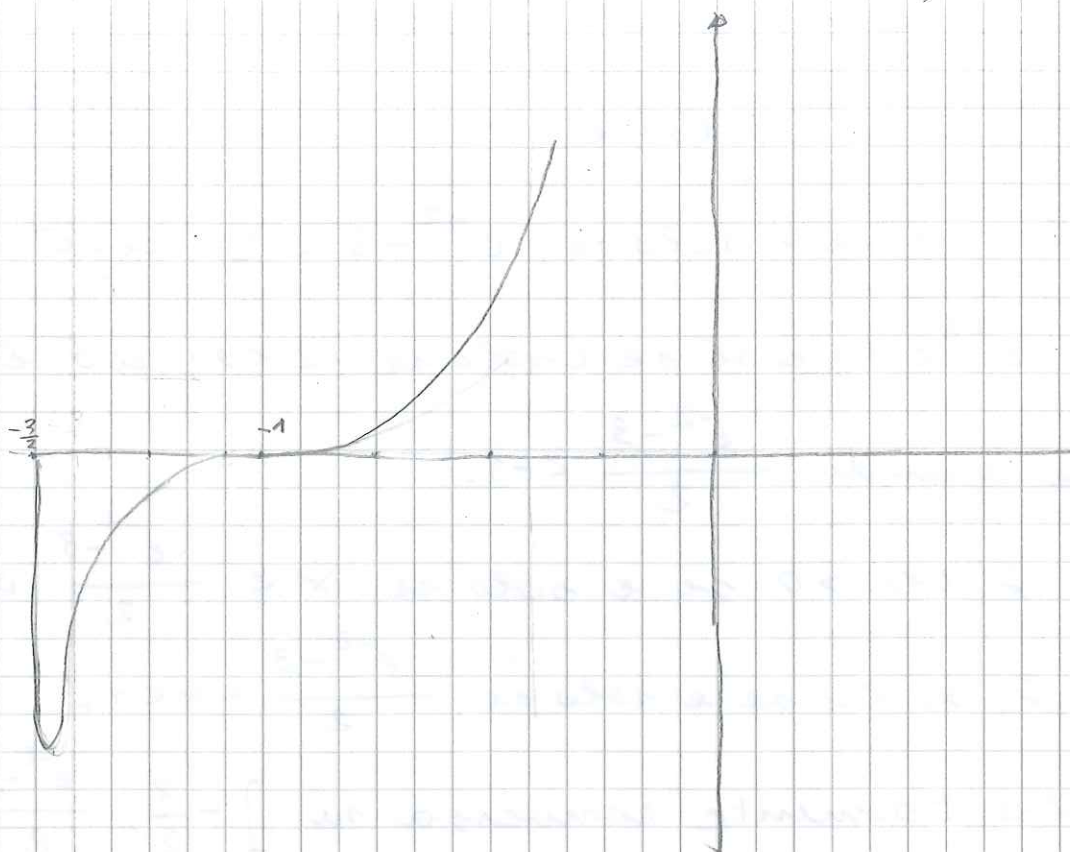
$$C(\downarrow) = \{ [\frac{e^{-2}-3}{2}, -1] \}$$

Si ha

$$\frac{e^{-3}-3}{2} \approx -1.48, f\left(\frac{e^{-3}-3}{2}\right) = -\frac{22}{e^3} \approx -1.34$$

$$\frac{e^{-2}-3}{2} \approx -1.43, f\left(\frac{e^{-2}-3}{2}\right) \approx -\frac{8}{e^2} \approx -1.08$$

$$-\frac{3}{2} = -1.5$$



Esercizio 2

Si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{(-1)^n n + \log n}{n^2 + 3 \log n} &= (-1)^n \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n n + \log n}{n^2 + 3 \log n} - (-1)^n \frac{1}{n} = \\
 &= (-1)^n \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n n^2 + n \log n - (-1)^n n^2 - 3(-1)^n \log n}{n(n^2 + 3 \log n)} = \\
 &= (-1)^n \frac{1}{n} + \frac{n \log n - 3(-1)^n \log n}{n(n^2 + 3 \log n)}
 \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{n \log n - 3(-1)^n \log n}{n(n^2 + 3 \log n)} \right| &\sim \frac{n \log n}{n^3} = \\
 &= \frac{1}{n^2} \log n < \frac{1}{n^{3/2}}
 \end{aligned}$$

quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n - 3(-1)^n \log n}{n(n^2 + \log n)}$$

è assolutamente convergente

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente per il criterio di Leibniz; quindi la serie assegnata è convergente

Esercizio 3

Si ha

$$|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{4} = 2$$

Si ha

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

Se $t \in \mathbb{R}$, t è un argomento di $1 + \sqrt{3}i$ se e solo se

$$\begin{cases} \cos t = \frac{1}{2} \\ \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

quindi $\frac{\pi}{3} \in \arg(1 + \sqrt{3}i)$

Si ha

$$z = \pm \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \pm \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$= \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

Esercizio 4

La disuguaglianza è assegnata per $x \neq -1$.

Supponiamo $x \neq -1$

Si ha

$$\frac{x+3}{x+1} < x, \text{ se e solo se}$$

$$\frac{x+3}{x+1} - x < 0, \text{ se e solo se}$$

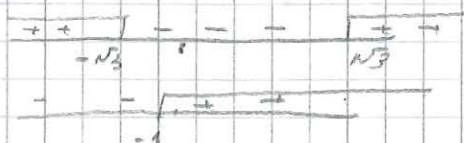
$$\frac{x+3-x^2-x}{x+1} < 0, \text{ se e solo se}$$

$$\frac{x^2-3}{x+1} > 0$$

Si ha $x^2-3 > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{3}$ o $x > \sqrt{3}$;

o si ha $x+1 > 0$ se e solo se $x > -1$

Si ha $-\sqrt{3} < -1 < \sqrt{3}$



Quindi la disuguaglianza è soddisfatta se e solo se

$$-\sqrt{3} < x < -1 \quad \text{o} \quad x > \sqrt{3}$$

Esercizio 5

a) Si ha $\text{dom}(f) =]0, +\infty[$

b) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$f'(x) = 2^{x \operatorname{Arctg}(\sqrt{x} \log x)} \log 2 (\operatorname{Arctg}(\sqrt{x} \log x) +$$

$$+ x \frac{1}{1 + x \log^2 x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \sqrt{x} \frac{1}{x} \right) =$$

$$= 2^{\operatorname{Arctg}(\sqrt{x} \log x)} \log 2 \left(\operatorname{Arctg}(\sqrt{x} \log x) + \frac{\sqrt{x}(\log x + 2)}{2(1 + x \log^2 x)} \right)$$

Esercizio 6

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x|^{\frac{3}{2}} - x^3 \right) e^{\frac{x+1}{x+3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 e = +\infty$$

Esercizio 7

Si ha

$$3 \log \cos x = 3 \log(1 + \cos x - 1) \sim 3(\cos x - 1) \sim$$

$$3 \left(-\frac{x^2}{2} \right) = -\frac{3}{2} x^2$$

Per $y \rightarrow 0$, si ha

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2} y^2 + o(y^2)$$

Si ha quindi

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2} (2x)^2 + o(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{1}{2} (3x)^2 + o(x^2) = 1 + 3x + \frac{9}{2} x^2 + o(x^2)$$

Si ha quindi

$$x + e^{2x} - e^{3x} = x + 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) - 1 - 3x - \frac{9}{2} x^2 =$$

$$= -\frac{5}{2} x^2 + o(x^2) \sim -\frac{5}{2} x^2$$

Si ha quindi

$$\frac{x + e^{2x} - e^{3x}}{3 \log \cos x} \sim \frac{-\frac{5}{2}x^2}{-\frac{3}{2}x^2} = \frac{5}{3}$$

Esercizio 8

Si ha

$$\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - x = x \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - 1 \right) \sim$$

$$x \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) \sim x \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{x}$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}y + o(y)$$

Si ha quindi

$$\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} =$$

$$= x \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) =$$

$$= x + \frac{1}{3} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sqrt[5]{1+y} = 1 + \frac{1}{5}y + o(y)$$

Si ha quindi

$$\sqrt[5]{x^5 + 3x^3 + x} = x \sqrt[5]{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} =$$

$$= x \left(1 + \frac{1}{5} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) =$$

$$= x \left(1 + \frac{3}{5} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x + \frac{3}{5} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si ha quindi:

$$\sqrt[3]{x^3 - x + 1} - \sqrt[5]{x^5 + 3x^3 + x} =$$

$$= x + \frac{1}{3} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - x - \frac{3}{5} \frac{1}{x} = -\frac{4}{15} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sim -\frac{4}{15} \frac{1}{x}$$

Si ha quindi:

$$\frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt[5]{x^5 + 3x^3 + x}}{\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - x} \sim$$

$$\frac{-\frac{4}{15} \frac{1}{x}}{\frac{1}{4} \frac{1}{x}} = -\frac{16}{15}$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt[5]{x^5 + 3x^3 + x}}{\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - x} = -\frac{16}{15}$$

Esercizio 9 (1° modo)

Poniamo $\sqrt{e^x - 1} = t$; si ha $e^x - 1 = t^2$;

quindi $e^x = t^2 + 1$; quindi $x = \log(t^2 + 1)$

Si ha quindi:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

Per $x = \log 2$ si ha $t = 1$; per $x = \log 5$ si ha $t = 2$.

Si ha $e^{2x} = (t^2 + 1)^2$.

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 & \int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \\
 & = \int_1^2 \frac{(t^2+1)^2}{t} \cdot \frac{2t}{t^2+1} dt = \\
 & = 2 \int_1^2 (t^2+1) dt = 2 \left[\frac{1}{3} t^3 + t \right]_1^2 = \\
 & = 2 \left(\frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{20}{3}
 \end{aligned}$$

Esercizio 9 (2° modulo)

$$\begin{aligned}
 & \text{Si ha} \\
 & \int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}} dx = \int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x} - e^x + e^x}{\sqrt{e^x-1}} dx = \\
 & = \int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^x(e^x-1) + e^x}{\sqrt{e^x-1}} dx = \\
 & = \int_{\log 2}^{\log 5} \left(\frac{e^x(e^x-1)}{\sqrt{e^x-1}} + \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}} \right) dx = \\
 & = \int_{\log 2}^{\log 5} \left((e^x-1)^{\frac{1}{2}} e^x + (e^x-1)^{-\frac{1}{2}} e^x \right) dx =
 \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{(e^x - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{(e^x - 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{\log 2}^{\log 5} =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + (e^x - 1)^{\frac{1}{2}} \right]_{\log 2}^{\log 5} =$$

$$= 2 \left(\frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{20}{3}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x^2 + 3x + 2 - 3x - 2 + 1}{x^2 + 3x + 2} = 1 - \frac{3x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Si ha

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

Esistono A, B, GR tali che

$$\frac{3x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$$

Si ha

$$3x + 1 = A(x + 2) + B(x + 1)$$

Per $x = -1$ si ha $-2 = A$; quindi $A = -2$

Per $x = -2$ si ha $-5 = -B$; quindi $B = 5$

Si ha quindi

$$\frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} = -\frac{2}{x + 1} + \frac{5}{x + 2}$$

Siehe quader

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x+2} \right) dx =$$

$$\left[x + 2 \log(x+1) - 5 \log(x+2) \right]_0^1 =$$

$$1 + 2 \log 2 - 5 \log 3 + 5 \log 2 = 1 - 5 \log 3 + 7 \log 2$$

= 1 - 5 \log 3 + 7 \log 2

Siehe

$$\int_0^1 \operatorname{Arqsh}(2x) dx = \left[x \operatorname{Arqsh}(2x) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} dx =$$

$$= \left[x \operatorname{Arqsh} x \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 (1+4x^2)^{-\frac{1}{2}} 8x dx$$

$$= \left[x \operatorname{Arqsh} x \right]_0^1 - \frac{1}{4} \left[\frac{(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 =$$

$$= \left[x \operatorname{Arqsh} x - \frac{1}{2} \sqrt{1+4x^2} \right]_0^1 =$$

$$= \operatorname{Arqsh} 1 - \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{2}$$