Analisi Matematica 1 - 11/1/'16 - Compito 1 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{|x|} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);

   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

   (d) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

   NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

   Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $e \approx 2.72$.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^3+1} - \sqrt[4]{n^3} \right) .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Dire se la seguente serie è convergente e, in caso affermativo, determinarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot 3^{2n+1}}{5^{3n-1}} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 = 2\sqrt{3} + 2i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = x^2 \,\mathrm{Arccos}(\mathrm{tg}(2x)) ;$$

   (a) (p. .5) determinare il dominio naturale di f;
   (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
   (c) (p. .5) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia $(a_n)_{n\in N}$ la successione di numeri reali

$$\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)_{n\in N} \quad ;$$

(a) studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in N}$ (cioè dire dimostrandolo se $(a_n)_{n\in N}$ è monotona specificando, in caso affermativo, il tipo di monotonia).

(b) tenendo conto della monotonia, dire se $(a_n)_{n\in N}$ ammette massimo se $(a_n)_{n\in N}$ ammette minimo e in caso affermativo determinarli;

(c) tenendo conto della monotonia, determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $(a_n)_{n\in N}$ rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\log(1+x^2)}\right)\frac{x}{1-\cos(2x)} \ .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Sia $\alpha\in\mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\alpha x}-x-2\right) \ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^4+1}}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_1^8 \frac{x+\alpha}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \log\frac{2+x}{2-x}\,dx\,.$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 11/1/'16 - Compito 1 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = \frac{e^x}{|x+1|} \ ,$$
rispondendo alle seguenti domande:
   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;
   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
   (d) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

   NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[5]{n^2+n} - \sqrt[5]{n^2} \right) \ .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Dire se la seguente serie è convergente e, in caso affermativo, determinarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1} \cdot 5^{n-1}}{7^{2n-1}} \ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 = 2\sqrt{3} - 2i \ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = x^4 \operatorname{Arcsin}(\operatorname{tg}(2x)) \ ;$$

   (a) (p. .5) determinare il dominio naturale di f;
   (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
   (c) (p. .5) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia $(a_n)_{n\in N}$ la successione di numeri reali

$$\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)_{n\in N} ;$$

(a) studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in N}$ (cioè dire dimostrandolo se $(a_n)_{n\in N}$ è monotona specificando, in caso affermativo, il tipo di monotonia).

(b) tenendo conto della monotonia, dire se $(a_n)_{n\in N}$ ammette massimo se $(a_n)_{n\in N}$ ammette minimo e in caso affermativo determinarli;

(c) tenendo conto della monotonia, determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $(a_n)_{n\in N}$ rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{1-\cos x}\right)\frac{\log(1+2x)}{\sin x^2} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+\alpha x^2}-2x+2\right) .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[5]{x^5+1}}\, dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_1^{27} \frac{\alpha - x}{x + \sqrt[3]{x}}\, dx\ .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \log \frac{3+x}{3-x}\, dx\ .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 11/1/'16 - Compito 1 - Versione 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = -\frac{e^{-x}}{|x|} \ ,$$
rispondendo alle seguenti domande:
   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;
   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
   (d) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

   NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

   Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $e \approx 2.72$.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[6]{n^3 - n} - \sqrt{n} \right) .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Dire se la seguente serie è convergente e, in caso affermativo, determinarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} \cdot 7^{n-2}}{11^{2n-1}} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 = 18\sqrt{3} + 18i .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = x \operatorname{Arccos}(\operatorname{tg} x) ;$$

   (a) (p. .5) determinare il dominio naturale di f;
   (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
   (c) (p. .5) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia $(a_n)_{n\in N}$ la successione di numeri reali

$$\left(\frac{n+5}{3n+2}\right)_{n\in N} \quad ;$$

(a) studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in N}$ (cioè dire dimostrandolo se $(a_n)_{n\in N}$ è monotona specificando, in caso affermativo, il tipo di monotonia).

(b) tenendo conto della monotonia, dire se $(a_n)_{n\in N}$ ammette massimo se $(a_n)_{n\in N}$ ammette minimo e in caso affermativo determinarli;

(c) tenendo conto della monotonia, determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $(a_n)_{n\in N}$ rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{e^{x^2}-1}\right)\frac{\operatorname{sh} x}{\log(1+2x^2)} \; .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+\alpha x^3}-x+1\right) \; .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{6x^5+1}{\sqrt[6]{x^6+x+1}}\,dx\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_8^{27} \frac{2x-\alpha}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx\ .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \log\frac{4-x}{4+x}\,dx\ .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.