

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{|x|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $e \approx 2.72$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^3 + 1} - \sqrt[4]{n^3} \right).$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Dire se la seguente serie è convergente e, in caso affermativo, determinarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot 3^{2n+1}}{5^{3n-1}}.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^2 = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = x^2 \operatorname{Arccos}(\operatorname{tg}(2x));$$

- (a) (p. .5) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) (p. 1) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) (p. .5) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f sulla frontiera del dominio.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione di numeri reali

$$\left(\frac{n+1}{2n+3} \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

- (a) studiare la monotonia di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (cioè dire dimostrandolo se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona specificando, in caso affermativo, il tipo di monotonia).
- (b) tenendo conto della monotonia, dire se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ammette massimo se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ammette minimo e in caso affermativo determinarli;
- (c) tenendo conto della monotonia, determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\log(1+x^2)} \right) \frac{x}{1 - \cos(2x)} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; calcolare in funzione di α il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \alpha x} - x - 2 \right) .$$

Svolgimento e risposta.

- 4
9. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^4+1}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; calcolare in funzione di α il seguente integrale:

$$\int_1^8 \frac{x + \alpha}{x + \sqrt[3]{x}} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \log \frac{2+x}{2-x} dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive della funzione da integrare o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Vermone 1

Esercizio 1

a) f ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^*$

b) f ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{per } x > 0 \\ -\frac{e^x}{x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$$f \text{ ha } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{|x|} = +\infty$$

c) f ha $x > 0$. f ha

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = e^x \frac{x-1}{x^2}$$

f ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$; f ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 1$; f ha $f'(x) < 0$ se e solo se $0 < x < 1$; quindi f è strettamente crescente su $[1, +\infty[$, f è strettamente decrescente su $]0, 1]$

f ha $x < 0$. f ha

$$f'(x) = -e^x \frac{x-1}{x^2}$$

f ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x-1 < 0$, cioè se e solo se $x < 1$; quindi per ogni x , quindi f è strettamente crescente su $] -\infty, 0[$

f ha quindi

$$m(\uparrow) = \{]-\infty, 0[, [1, +\infty[\}, \quad m(\rightarrow) = \emptyset$$

$$m(\downarrow) = \{]0, 1] \}.$$

ol) Sia $x > 0$. Si ha

$$f''(x) = e^x \frac{x-1}{x^2} + e^x \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} =$$

$$= e^x \left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{-x+2}{x^3} \right) = e^x \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$$

Il polinomio $x^2 - 2x + 2$ ha discriminante Δ tale che $\frac{\Delta}{4} = 1 - 2 = -1 < 0$; si ha quindi $x^2 - 2x + 2 > 0$

per ogni x ; si ha $x^3 > 0$; si ha quindi $f''(x) > 0$. Quindi f è strettamente convessa su $]0, +\infty[$.

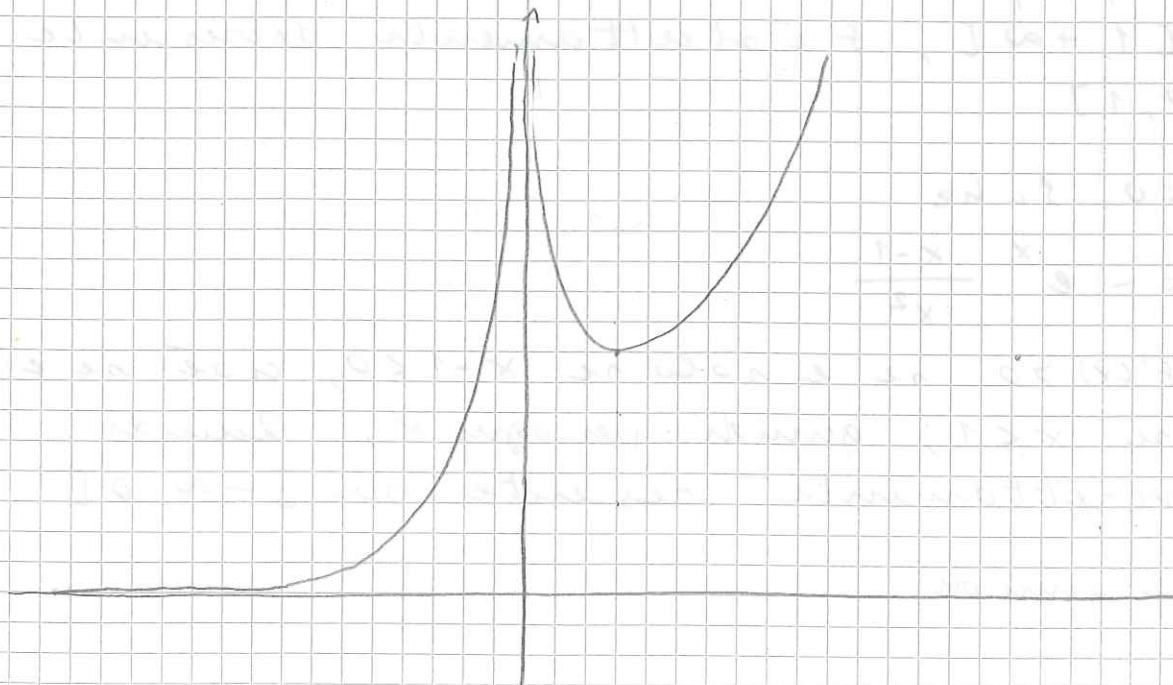
Sia $x < 0$. Si ha

$$f''(x) = -e^x \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$$

Essendo $x^3 < 0$, si ha $f''(x) > 0$; quindi f è strettamente convessa su $] -\infty, 0[$.

Si ha quindi $e(\uparrow) = \{]-\infty, 0[,]0, +\infty[\}$, $e(\downarrow) = \emptyset$, $e(\rightarrow) = \emptyset$

Si ha $f(1) = e \approx 2.72$



Esercizio 2

Si ha

$$\sqrt[4]{n^3+1} - \sqrt[4]{n^3} = n^{\frac{3}{4}} \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^3}} - 1 \right) \sim$$

$$n^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{4} \frac{1}{n^{\frac{9}{4}}}$$

Essendo $\frac{9}{4} > 1$, la serie è convergente

Esercizio 3

Si ha

$$\frac{2^{n-1} \cdot 3^{2n+1}}{5^{3n-1}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2^n \cdot 9^n}{125^n} =$$

$$= \frac{15}{2} \left(\frac{18}{125} \right)^n$$

Quindi la serie è geometrica di ragione

 $\frac{18}{125}$; essendo $-1 < \frac{18}{125} < 1$, la serie è convergente.

La somma della serie è

$$\frac{15}{2} \frac{1}{1 - \frac{18}{125}} = \frac{15}{2} \frac{125}{107} = \frac{1875}{214}$$

Esercizio 4

Si ha

$$|2\sqrt{3} + 2i| = 2|\sqrt{3} + i| = 2\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$$

Si ha

$$2\sqrt{3} + 2i = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

4
Sia $t \in \mathbb{R}$; t è un argomento di $2\sqrt{3} + 2i$

se e solo se

$$\begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi $\frac{\pi}{6}$ è arg $(2\sqrt{3} + 2i)$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} z &= \pm \sqrt{4} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \\ &= \pm 2 \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} \right) = \\ &= \pm 2 \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \right) = \\ &= \pm 2 \left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} \right) = \\ &= \pm \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Esercizio 5

a) Il dominio di f è dato dalle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} (\forall k \in \mathbb{Z}) \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ -1 \leq \tan(2x) \leq 1 \end{cases}$$

Supponiamo $-\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2}$

La relazione $-1 \leq \tan(2x) \leq 1$ equivale a

$$\operatorname{Arctg}(-1) \leq 2x \leq \operatorname{Arctg} 1, \text{ cioè } 2$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq 2x \leq \frac{\pi}{4}$$

Quindi essendo la funzione tangente periodica di periodo π , supposto che

$(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, la relazione $-1 \leq \tan(2x) \leq 1$ equivale a

$$(\exists h \in \mathbb{Z}) \quad -\frac{\pi}{4} + h\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{4} + h\pi$$

Tale relazione implica in particolare che $(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Supponiamo infatti per assurdo che $(\exists k \in \mathbb{Z}) (\exists h \in \mathbb{Z}) \quad -\frac{\pi}{4} + h\pi \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq \frac{\pi}{4} + h\pi$

Si ha $-1 + 4h \leq 2 + 4k \leq 1 + 4h$; quindi $-3 + 4h \leq 4k \leq -1 + 4h$;

Da $-3 + 4h \leq 4k$ ricavare $4(h-k) \leq 3$; quindi $h \leq k$. Da $4k \leq -1 + 4h$ ricavare

$4(h-k) \geq 1$; quindi $h > k$. Ciò è assurdo

Il dominio di f è quindi dato dalle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$(\exists h \in \mathbb{Z}) \quad -\frac{\pi}{4} + h\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{4} + h\pi$$

cioè tali che

$$(\exists h \in \mathbb{Z}) \quad -\frac{\pi}{8} + h \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{8} + h \frac{\pi}{2}$$

Si ha quindi

$$\text{dom}(f) = \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + h \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + h \frac{\pi}{2} \right]$$

b) Per

$$x \in \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + h \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + h \frac{\pi}{2} \right], \text{ si ha}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \operatorname{Arccos}(\tan 2x) + x^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2(2x)}} (1 + \tan^2(2x)) \cdot 2 \right) = \\ &= 2x \operatorname{Arccos}(\tan 2x) - \frac{2x^2 (1 + \tan^2(2x))}{\sqrt{1 - \tan^2(2x)}} \end{aligned}$$

c) Sia $h \in \mathbb{Z}$ e ne $\varphi = \frac{\pi}{8} + h \frac{\pi}{2}$.

Si ha $\tan(2\varphi) = 1$

Da ciò segue subito che

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = -\infty$$

Quindi f è derivabile in a rispetto a $\bar{\mathbb{R}}$ e $f'(a) = -\infty$

Si ha $h \in \mathbb{Z}$ e non $a = -\frac{\pi}{8} + h\frac{\pi}{2}$. Si ha $\lg(2a) = -1$

Da ciò segue subito che

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = -\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\bar{\mathbb{R}}$ in a e $f'(a) = -\infty$

Esercizio 6

a) Proviamo che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è strettamente crescente, cioè che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < a_{n+1}$.

Ciò equivale infatti a

$$\frac{n+1}{2n+3} < \frac{n+1+1}{2(n+1)+3}, \quad \text{cioè } a$$

$$\frac{n+1}{2n+3} < \frac{n+2}{2n+5}, \quad \text{cioè } a$$

$$2n^2 + 5n + 2n + 5 < 2n^2 + 3n + 4n + 6, \quad \text{cioè } a$$

$$7n + 5 < 7n + 6, \quad \text{cioè } a$$

$$5 < 6 \quad \text{e ciò è vero.}$$

b) Essendo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strettamente crescente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ammette minimo e non ammette massimo.

$$\text{Si ha } \min((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = a_0 = \frac{1}{3}$$

c) Si ha

$$\inf((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \min((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \frac{1}{3}$$

$$\sup (a_n / n \in \mathbb{N}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

Esercizio 7

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\log(1+x^2)} \right) \cdot \frac{x}{1 - \cos(2x)} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{x \log(1+x^2)} \cdot \frac{x}{\frac{(2x)^2}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{x \cdot x^2} \cdot \frac{2x}{4x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{2x^4} \end{aligned}$$

Si ha per $y \rightarrow 0$

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2);$$

quindi

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4); \text{ quindi}$$

$$\log(1+x^2) - x^2 = -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \sim -\frac{1}{2}x^4$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^4}{2x^4} = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 8

Si ha per $x \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{x^2 + \alpha x} = x \sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}}$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha:

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y)$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} x \sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}} &= x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{\alpha}{x}\right) \right) = x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= x + \frac{\alpha}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \alpha x} - x - 2 &= x + \frac{\alpha}{2} + o(1) - x - 2 = \\ &= \frac{\alpha}{2} - 2 + o(1) \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \alpha x} - x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{2} - 2 + o(1) \right) = \frac{\alpha}{2} - 2$$

Esercizio 9

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^4+1}} dx &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x^4+1)^{-\frac{1}{4}} (4x^3) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left(2^{\frac{3}{4}} - 1 \right) = \frac{\sqrt[4]{8} - 1}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 10

Poniamo $\sqrt[3]{x} = t$. Si ha $x = t^3$; quindi:

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2$$

Per $x=1$ si ha $t=1$; per $x=8$, si ha $t=2$.

Si ha quindi

$$\int_1^8 \frac{x+\alpha}{x+\sqrt[3]{x}} dx = \int_1^2 \frac{t^3+\alpha}{t^3+t} 3t^2 dt =$$

$$= 3 \int_1^2 \frac{t^4+\alpha t}{t^2+1} dt$$

Eseguirò la divisione $(t^4+\alpha t):(t^2+1)$

$$\begin{array}{r} t^4 \quad \quad \quad + \alpha t \\ -t^4 \quad -t^2 \\ \hline -t^2 + \alpha t \\ \quad t^2 \quad \quad +1 \\ \hline \alpha t + 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} t^2+1 \\ t^2-1 \end{array} \right.$$

Il quoziente della divisione è t^2-1 , il resto $\alpha t+1$

Si ha quindi $t^4+\alpha t = (t^2+1)(t^2-1) + \alpha t+1$

Quindi

$$\frac{t^4+\alpha t}{t^2+1} = t^2-1 + \frac{\alpha t+1}{t^2+1}$$

Si ha quindi

$$3 \int_1^2 \frac{t^4+\alpha t}{t^2+1} dt = 3 \int_1^2 \left(t^2-1 + \frac{\alpha t+1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= 3 \int_1^2 \left(t^2-1 + \frac{\alpha}{2} \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= 3 \left[\frac{1}{3} t^3 - t + \frac{\alpha}{2} \log(t^2+1) + \operatorname{Arctg} t \right]_1^2 =$$

$$= 3 \left(\frac{8}{3} - 2 + \frac{\alpha}{2} \log 5 + \operatorname{Arctg} 2 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{\alpha}{2} \log 2 - \operatorname{Arctg} 1 \right) =$$

$$= 4 + \frac{3}{2} \alpha \log \frac{5}{2} + 3 \operatorname{Arctg} 2 - \frac{3}{4} \pi$$

Esercizio 11 (1° modo)

Si ha

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \log \frac{2+x}{2-x} dx &= \\
 &= \left[x \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2-x}{2+x} \frac{2-x+2+x}{(2-x)^2} dx = \\
 &= \left[x \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 - 4 \int_0^1 \frac{x}{(2-x)(2+x)} dx = \\
 &= \left[x \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{x}{(x-2)(x+2)} dx
 \end{aligned}$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Si ha

$$x = A(x+2) + B(x-2)$$

Per $x=2$ si ha $2 = 4A$; quindi

$$A = \frac{1}{2}$$

Per $x=-2$ si ha $-2 = -4B$; quindi

$$B = \frac{1}{2}$$

Si ha quindi

$$\frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+2}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
& \left[x \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{x}{(x-2)(x+2)} dx = \\
& = \left[x \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 + 4 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+2} \right) dx = \\
& = \left[x \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) dx = \\
& = \left[x \log \frac{2+x}{2-x} + 2 \log |x-2| + 2 \log (x+2) \right]_0^1 = \\
& = \left[x \log \frac{2+x}{2-x} + 2 \log ((2-x)(2+x)) \right]_0^1 = \\
& = \left[x \log \frac{2+x}{2-x} + 2 \log (4-x^2) \right]_0^1 = \\
& = \log 3 + 2 \log 3 - 2 \log 4 = \\
& = 3 \log 3 - 2 \log 4 = \log \frac{27}{16}
\end{aligned}$$

Exercice 11 (20 points)

Soit

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \log \frac{2+x}{2-x} dx = \int_0^1 (\log (2+x) - \log (2-x)) dx = \\
& = \int_0^1 \log (2+x) dx - \int_0^1 \log (2-x) dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(x+2) \log (x+2) \right]_0^1 - \int_0^1 (x+2) \frac{1}{x+2} dx \\
& - \left[-(2-x) \log (2-x) \right]_0^1 + \int_0^1 -(2-x) \frac{1}{2-x} (-1) dx = \\
& = \left[(x+2) \log (x+2) \right]_0^1 - \int_0^1 dx + \left[(2-x) \log (2-x) \right]_0^1 + \int_0^1 dx = \\
& = \left[(x+2) \log (x+2) + (2-x) \log (2-x) \right]_0^1 = \\
& = 3 \log 3 - 2 \log 2 - 2 \log 2 = \\
& = 3 \log 3 - 4 \log 2 = \log \frac{27}{16}
\end{aligned}$$

Exercício 11 (3º modo)

Se ha

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log \frac{2+x}{2-x} dx &= \left[x \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2-x}{2+x} \frac{2-x+2+x}{(2-x)^2} dx = \\
&= \left[x \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4x}{(2-x)(2+x)} dx = \\
&= \left[x \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2} dx = \\
&= \left[x \log \frac{2+x}{2-x} + 2 \log (4-x^2) \right]_0^1 = \\
&= \log 3 + 2 \log 3 - 2 \log 4 = 3 \log 3 - 2 \log 4 = \\
&= \log 27 - \log 16 = \log \frac{27}{16}
\end{aligned}$$

Beispiel 11 (4^o mod 9)

Siehe

$$\int_0^1 \log \frac{2+x}{2-x} dx =$$

$$= \left[(2+x) \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (2+x) \frac{2-x}{2+x} \frac{2-x+2+x}{(2-x)^2} dx =$$

$$= \left[(2+x) \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4}{2-x} dx =$$

$$= \left[(2+x) \log \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 - 4 \left[-\log(2-x) \right]_0^1 =$$

$$= \left[(2+x) \log \frac{2+x}{2-x} + 4 \log(2-x) \right]_0^1 =$$

$$= 3 \log 3 - 4 \log 2 = \log 27 - \log 16 =$$

$$= \log \frac{27}{16}$$