

Analisi Matematica 1 - 26/1/'16 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x-2},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 2) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $e^3 \approx 20.09$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 3) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sh} \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right).$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x}{x+1} > \frac{1}{x}.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^5 + iz = 0.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x \sin x + x^2};$$

calcolare la derivata di f nei punti $x \in \operatorname{dom}(f)$ tali che $\cos^2 x \sin x + x^2 > 0$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x} + 1 + x\sqrt{x}}{x \log x + \cos^2 x}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{\int_0^x t(\sqrt[3]{1+t^2} - 1) dt}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \operatorname{sh}(3x) \log(1+2x) - \operatorname{sh} x \sin(2x) \log(1+3x) - 3 \sin x^4}{\sqrt{1+x^5} - 1}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_0^1 (2x + 1) \log x \, dx .$$

NB Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di della funzione da integrare.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 1) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{\log^4 x}{x} \, dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} \, dx .$$

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

b) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

c) Sia $x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2) - e^x}{(x-2)^2} = \frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 3$; si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 3$; si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < 3$.

Quindi f è strettamente crescente su $[3, +\infty[$, strettamente decrescente su $] -\infty, 2[$ e su $]2, 3]$

Si ha quindi

$$m(f) = \{ [3, +\infty[\}, m(\rightarrow) = \emptyset, m(\searrow) = \{] -\infty, 2[,]2, 3] \}$$

d) Sia $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(e^x + xe^x - 3e^x)(x-2)^2 - 2(x-2)(xe^x - 3e^x)}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{(xe^x - 2e^x)(x-2) - 2(xe^x - 3e^x)}{(x-2)^3} = \\ &= \frac{x^2e^x - 2xe^x - 2xe^x + 4e^x - 2xe^x + 6e^x}{(x-2)^3} = \\ &= \frac{e^x(x^2 - 6x + 10)}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

Il polinomio $x^2 - 6x + 10$ ha discriminante $\Delta < 0$; si ha quindi $x^2 - 6x + 10 > 0$; si ha quindi

$f''(x) > 0$ se e solo se $x > 2$, $f''(x) < 0$ se e solo se $x < 2$

Quindi f è strettamente convessa su $]2, +\infty[$,

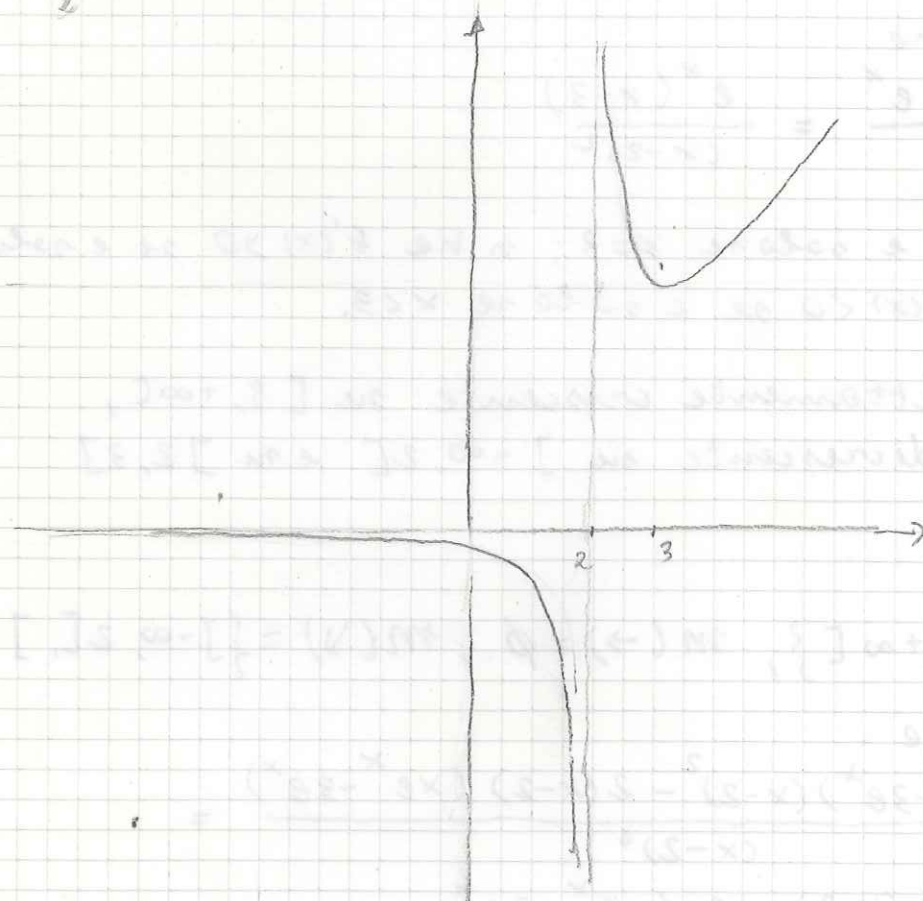
strettamente concave su $] -\infty, 2[$.

Si ha quindi:

$$\mathcal{D}(f) = \{]2, +\infty[\}, \quad \mathcal{D}(f') = \{]-\infty, 2[\}$$

$$f(3) = e^3 \approx 20.09$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} = -0.5$$



Esercizio 2

Si ha che $\sinh x = x + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$

Si ha quindi:

$$\sinh \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Si ha che $\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$

Si ha quindi:

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \text{sh } \frac{1}{n} - \text{sn } \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

Essendo $3 > 1$, la serie è convergente

Esercizio 3

La disequazione è assegnata per $x \neq 0$ e $x \neq -1$

Supponiamo dunque $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$

La disequazione

$$\frac{x}{x+1} > \frac{1}{x}$$

è equivalente a

$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x} > 0, \quad \text{cioè a}$$

$$\frac{x^2 - x - 1}{x(x+1)} > 0$$

Si ha $x^2 - x - 1 > 0$ se e solo se $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Si ha $x(x+1) > 0$ se e solo se $x < -1$ o $x > 0$

Si ha

$$-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} : \text{infatti ciò equivale a } -2 < 1-\sqrt{5},$$

cioè a $\sqrt{5} < 3$, cioè a $5 < 9$ e ciò è vero

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$-1$$

La disequazione sopra è quindi equivalente

$$x < -1 \quad \text{or} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0 \quad \text{or} \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Esercizio 4

Si ha

$$z^5 + iz = 0 \quad \text{se e solo se}$$

$$z(z^4 + i) = 0; \quad \text{quindi se e solo se}$$

$$z = 0 \quad \text{or} \quad z^4 + i = 0.$$

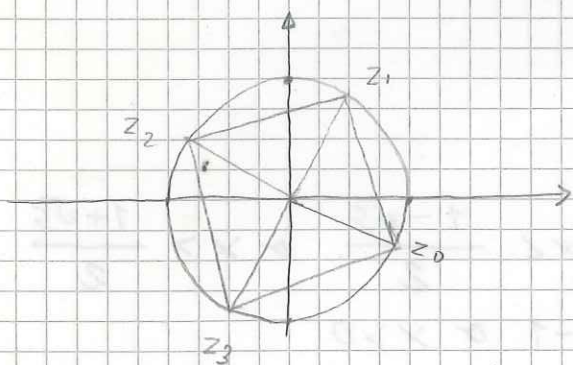
Si ha $z^4 + i = 0$ se e solo se $z^4 = -i$

Si ha $|-i| = 1$ e $-\frac{\pi}{2} \in \arg(-i)$

Si ha quindi

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{8} + k \frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8} + k \frac{2\pi}{4}\right)$$

per $k = 0, 1, 2, 3$



Si ha

$$z_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} =$$

$$\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} - i \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} - i \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi:

$$\left\{ 0, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right\}$$

Esercizio 5

Si ha

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}; \cos^2 x \sin x + x^2 > 0\}$$

Si ha $\text{dom}(f)$; cioè $\cos^2 x \sin x + x^2 > 0$.

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos^2 x \sin x + x^2}} (2 \cos x (-\sin x) \sin x + \\ + \cos^2 x \cos x + 2x) = \\ = \frac{\cos^3 x - 2 \cos x \sin^2 x + 2x}{2\sqrt{\cos^2 x \sin x + x^2}}$$

Esercizio 6

Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$; ne consegue quindi:

$$x^2 e^{-x} + 1 + x\sqrt{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x}$$

Si ha

$$x \log x + \cos^2 x \sim_{x \rightarrow +\infty} x \log x$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x} + 1 + x\sqrt{x}}{x \log x + \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x \log x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\log x} = +\infty$$

Esercizio 7

Il limite è della forma $\frac{0}{0}$; applicando la regola di De l'Hospital, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{\int_0^x t(\sqrt[3]{1+t^2}-1)dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 \cdot 2x}{x(\sqrt[3]{1+x^2}-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x \cdot \frac{1}{3} x^2} = 6 \end{aligned}$$

Esercizio 8

Si ha

$$\sqrt{1+x^5} - 1 \sim \frac{1}{2} x^5$$

Si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

Si ha per $y \rightarrow 0$

$$\sinh y = y + \frac{1}{6} y^3 + o(y^3)$$

Si ha quindi:

$$\sinh(3x) = 3x + \frac{1}{6} (3x)^3 + o(x^3) = 3x + \frac{9}{2} x^3 + o(x^3)$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 + o(y^3)$$

Siehe qundi

$$\begin{aligned}\log(1+2x) &= 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 + o(x^3) = \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Siehe qundi

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \sinh(3x) \log(1+2x) &= \\ &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \left(3x + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)\right) \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right) = \\ &= \left(3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}x^4\right) \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right) = \\ &= \left(3x^2 + 4x^4 + o(x^4)\right) \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right) = \\ &= 6x^3 - 16x^4 + 8x^5 + o(x^5) + 8x^5 = \\ &= 6x^3 - 6x^4 + 16x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

Siehe

$$\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Per $y \rightarrow 0$ siehe

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$$

Qundi n he

$$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Siehe

$$\begin{aligned}\log(1+3x) &= 3x - \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{3}(3x)^3 + o(x^3) = \\ &= 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Siehe qundi

$$\text{sh } x \operatorname{sh}(2x) \log(1+3x) =$$

$$\left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) \left(3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{3}x^4\right) \left(3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= \left(2x^2 - x^4 + o(x^4)\right) \left(3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= 6x^3 - 9x^4 + 18x^5 + o(x^5) - 3x^5 =$$

$$= 6x^3 - 9x^4 + 15x^5 + o(x^5)$$

Si he

$$\operatorname{sh} y = y + o(y^2)$$

2undi n he

$$\operatorname{sh} x^4 = x^4 + o(x^8)$$

3undi

$$3 \operatorname{sh} x^4 = 3x^4 + o(x^8)$$

Si he qundi

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(3x) \log(1+2x) - \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(2x) \log(1+3x) - 3 \operatorname{sh} x^4 =$$

$$= 6x^3 - 6x^4 + 16x^5 + o(x^5) - 6x^3 + 9x^4 - 15x^5 - 3x^4 =$$

$$= x^5 + o(x^5) \sim x^5$$

Si he qundi

$$\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(3x) \log(1+2x) - \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(2x) \log(1+3x) - 3 \operatorname{sh} x^4}{\sqrt{1+x^5} - 1} \sim \frac{x^5}{\frac{1}{2}x^5} = 2$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln(3x) \log(1+2x) - \ln x \sin(2x) \log(1+3x) - 3 \sin x^4}{\sqrt{1+x^5} - 1} = 2$$

Esercizio 9

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (2x+1) \log x$$

$$\text{Si ha } (2x+1) \log x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \log x$$

Essendo l'integrale improprio $\int_0^1 \log x \, dx$ convergente, anche l'integrale improprio assegnato è convergente.

Si è $y \in]0, 1]$; si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x+1) \log x \, dx &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 (2x+1) \log x \, dx \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\left[(x^2+x) \log x \right]_y^1 - \int_y^1 (x^2+x) \frac{1}{x} \, dx \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\left[(x^2+x) \log x \right]_y^1 - \int_y^1 (x+1) \, dx \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[(x^2+x) \log x - \frac{1}{2} x^2 - x \right]_y^1 = \end{aligned}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} - 1 - (y^2 + y) \log y + \frac{1}{2} y^2 + y \right) = \frac{3}{2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\int_1^2 \frac{\log^4 x}{x} dx = \int_1^2 \log^4 x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{5} \log^5 x \right]_1^2 = \frac{1}{5} \log^5 2$$

Esercizio 11 (10 modo)

Poniamo $\sqrt{\frac{x+3}{x+1}} = t$. Si ha $\frac{x+3}{x+1} = t^2$; quindi

$$x+3 = t^2 x + t^2; \quad \text{quindi} \quad x(t^2 - 1) = 3 - t^2;$$

$$\text{quindi} \quad x = \frac{3 - t^2}{t^2 - 1}$$

Si ha

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2t(t^2 - 1) - 2t(3 - t^2)}{(t^2 - 1)^2} = \frac{-2t^3 + 2t - 6t + 2t^3}{(t^2 - 1)^2} = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2}$$

Per $x=0$, si ha $t = \sqrt{3}$; per $x=1$, si ha $t = \sqrt{2}$

Si ha quindi

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} t \left(-\frac{4t}{(t^2 - 1)^2} \right) dt =$$

$$= 4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt$$

Si ha $(t^2-1)^2 = (t-1)^2 (t+1)^2$

Esistono $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}$$

Si ha

$$t^2 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t-1)^2(t+1) + D(t-1)^2$$

Per $t=1$ si ha $1 = 4B$; quindi $B = \frac{1}{4}$

Per $t=-1$ si ha $1 = 4D$; quindi $D = \frac{1}{4}$

Si ha quindi

$$t^2 = A(t-1)(t+1)^2 + \frac{1}{4}(t^2+2t+1) + C(t-1)^2(t+1) + \frac{1}{4}(t^2-2t+1)$$

Quindi

$$4t^2 = 4A(t-1)(t+1)^2 + t^2 + 2t + 1 + 4C(t-1)^2(t+1) + t^2 - 2t + 1$$

Quindi

$$2t^2 - 2 = 4A(t-1)(t+1)^2 + 4C(t-1)^2(t+1)$$

Quindi

$$2(t-1)(t+1) = 4A(t-1)(t+1)^2 + 4C(t-1)^2(t+1)$$

Quindi

$$1 = 2A(t+1) + 2C(t-1)$$

Per $t=1$ si ha $1 = 4A$; quindi $A = \frac{1}{4}$

Per $t=-1$ si ha $1 = -4C$; quindi $C = -\frac{1}{4}$

Si ha quindi

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t+1)^2}$$

Se he quando:

$$\begin{aligned} 4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt &= 4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \\ &= \left[\log(t-1) - \frac{1}{t-1} - \log(t+1) - \frac{1}{t+1} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \log(\sqrt{3}-1) - \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \log(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \log(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \log(\sqrt{2}+1) + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \\ &= \log \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \\ &= \log \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} - \log (\sqrt{2}-1)^2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \log \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2} - \log (2-2\sqrt{2}+1) - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \\ &= \log (2-\sqrt{3}) - \log (3-2\sqrt{2}) - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \log \frac{2-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \log (2-\sqrt{3})(3+2\sqrt{2}) - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \\ &= \log (6+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6}) - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercício 11 (2º modo)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} dx &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x+3} \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1} \sqrt{x+3}} dx = \int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx + \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 4x + 3)^{-\frac{1}{2}} (2x + 4) dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4 - 4 + 3}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 4x + 3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2 - 1}} dx =$$

$$= \left[(x^2 + 4x + 3)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{Argh} (x+2) \right]_0^1 =$$

$$= 8^{\frac{1}{2}} + \operatorname{Argh} 3 - 3^{\frac{1}{2}} - \operatorname{Argh} 2 =$$

$$= 2\sqrt{2} + \log (3 + \sqrt{8}) - \sqrt{3} - \log (2 + \sqrt{3}) =$$

$$= \log \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} =$$

$$= \log (3 + 2\sqrt{2})(2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} =$$

$$= \log (6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}) - \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

Esercizio 11 (3° modulo)

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}} dx$$

Poniamo $\sqrt{x+1} = t$; si ha $x+1 = t^2$; $x = t^2 - 1$
 $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 0$ si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha

$t = \sqrt{2}$; si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{t^2 - 1 + 3}}{t} 2t dt =$$

$$= 2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2 + 2} \, dt$$

Poniamo $t = \sqrt{2} \operatorname{sh} u$; allora $\frac{dt}{du} = \sqrt{2} \operatorname{ch} u$
 per $t = 1$ allora $u = \operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2}$; per $t = \sqrt{2}$
 allora $u = \operatorname{Arghsh} 1$; anche quindi:

$$2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2 + 2} \, dt = 2 \int_{\operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\operatorname{Arghsh} 1} \sqrt{2 \operatorname{sh}^2 u + 2} \sqrt{2} \operatorname{ch} u \, du =$$

$$= 2 \int_{\operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\operatorname{Arghsh} 1} \sqrt{2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1} \sqrt{2} \operatorname{ch} u \, du =$$

$$= 4 \int_{\operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\operatorname{Arghsh} 1} \operatorname{ch}^2 u \, du = 4 \int_{\operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\operatorname{Arghsh} 1} \frac{\operatorname{ch}(2u) + 1}{2} \, du =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh}(2u) + u \right]_{\operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\operatorname{Arghsh} 1} = \left[\operatorname{sh}(2u) + 2u \right]_{\operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\operatorname{Arghsh} 1} =$$

$$= \operatorname{sh}(2 \operatorname{Arghsh} 1) + 2 \operatorname{Arghsh} 1 - \operatorname{sh}(2 \operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2}) - 2 \operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2 \operatorname{sh} \operatorname{Arghsh} 1 \operatorname{ch} \operatorname{Arghsh} 1 + 2 \log(1 + \sqrt{2}) - 2 \operatorname{sh} \operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ch} \operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2}}\right) =$$

$$= 2 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \operatorname{Arghsh} 1} + 2 \log(1 + \sqrt{2}) - 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \operatorname{Arghsh} \frac{\sqrt{2}}{2}} - 2 \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{2} + \log(3 + 2\sqrt{2}) - \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2}} - \log\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \log \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{3}} =$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \log(6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6})$$